# Corso di Metodi Computazionali della Fisica

**Alessandro Vicini (Università di Milano)**

## Esercizi di Mathematica

- Si calcoli $\arccos(0.707107)$
  Si calcolino $\cos(2\ i)$, $\cosh(2), 1/2\,(\exp(-2)+\exp(2))$.
  Che differenza si ottiene inserendo i numeri secondo le seguenti notazioni: 2 oppure 2. ?

- Si definiscano $a=-5+i$ e $b=1+2i$.
  Si discuta la validità dell'uguaglianza $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$. Per illustrare il risultato si disegni la parte immaginaria di $\log(z)$ con $z$ complesso.

- Si disegni, utilizzando il comando `ParametricPlot3D` la superficie di Riemann della funzione $f(z)=z^{1/2}$.

- **Calcolo di integrali**
  Si calcolino i seguenti integrali

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{1-2\sin^2(x)}}$$
$$\int_0^\infty dx\ x\ \exp(-x^2)$$
$$\int_0^\infty dx\ \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{x^3}{3}+xt\right)$$

- Si scriva un algoritmo per calcolare il determinante di una matrice 3x3, nota l'espressione del determinante di una matrice 2x2.

- **Soluzione di (sistemi di) equazioni**
  Si risolvano i seguenti sistema di equazioni lineari, sia con il formalismo matriciale che con la scrittura esplicita delle equazioni:

$$\begin{aligned} \mathrm{x}+3\,\mathrm{y}+5\,\mathrm{z} &= 7 \\ \mathrm{x}+2\,\mathrm{y}+4\,\mathrm{z} &= 6 \\ \mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z} &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{x}+3\,\mathrm{y}+5\,\mathrm{z} &= 0 \\ \mathrm{x}+2\,\mathrm{y}+4\,\mathrm{z} &= 0 \\ \mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{x}+2\,\mathrm{y}+3\,\mathrm{z} &= 7 \\ 4\,\mathrm{x}+5\,\mathrm{y}+6\,\mathrm{z} &= 6 \\ 7\,\mathrm{x}+8\,\mathrm{y}+9\,\mathrm{z} &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{x}+2\,\mathrm{y}+3\,\mathrm{z} &= 0 \\ 4\,\mathrm{x}+5\,\mathrm{y}+6\,\mathrm{z} &= 0 \\ 7\,\mathrm{x}+8\,\mathrm{y}+9\,\mathrm{z} &= 0 \end{aligned}$$

- Si risolva il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x^2 + y^2 - z &= 3 \end{aligned} \qquad (1)$$

Si disegnino le due superfici descritte dalle due equazioni, considerando $x$ e $y$ nell'intervallo $[-5, 5]$.
Si spieghi il significato dell'intersezione delle due superfici.
Si uguaglino le due equazioni, risolte rispetto a $z$ e si ricavi $y$ in funzione di $x$.
Si determini l'intervallo di $x$ permesso per avere una soluzione reale del problema.
Si disegnino in questo intervallo di $x$ le due soluzioni.

- **Funzioni, in varie salse** Si scriva una funzione $f(r, s)$ che descriva il risultato del seguente integrale in termini dei due parametri $r$ ed $s$:

$$f(r, s) = \int_0^1 dt\ t^{r-1}(1-t)^{s-1}$$

.
Si consideri la possibilità di usare l'opzione `GenerateConditions->False` del comando `Integrate`.

- Si verifichi che i polimoni di Hermite possono essere ottenuti derivando ripetutamente una funzione generatrice, secondo la formula

$$H_n(x) = \exp(x^2)\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \exp(-(x-t)^2)\right]_{t=0}$$

- Nota le relazioni di ricorrenza soddisfatta dai polinomi di Hermite,

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \\ H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \end{aligned}$$

si costruiscano i primi 20 polinomi $H_n(x)$ $1 \leq n \leq 20$ e si verifichi che soddisfano una relazione di ortogonalità rispetto alla misura $\exp(-x^2)$ sull'intervallo $(-\infty, \infty)$ .

- **Oscillatore armonico**
Si risolva la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + (2n + 1 - x^2)y(x) = 0$$

che descrive un sistema quantistico unidimensionale soggetto a un potenziale armonico.
Si scartino le soluzioni che divergono per $x \to \pm\infty$.
Si calcoli la normalizzazione delle autofunzioni $y_n(x)$, per dato $n$.
Si disegnino le prime 5 autofunzioni dell'oscillatore armonico, $\psi_n(x) = \exp(-1/2\, x^2) y_n(x)$ con $x$ compreso nell'intervallo $[-5, 5]$.

- **Potenziale lineare** Si consideri un sistema sottoposto a un potenziale lineare

$$y''(x) - xy(x) = 0, \quad \textit{con } y(0) = 0 \textit{ e con } y'(0) = 1$$

- **Potenziale centrale, armoniche sferiche, polinomi di Legendre**
Si risolvano le equazioni per la parte angolare dell'equazione di Schrödinger, nel caso di un problema con un potenziale centrale.

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\psi_{lm}(\theta\phi) = l(l+1)\psi_{lm}(\theta\phi)$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\psi_{lm}(\theta\phi) = m^2\psi_{lm}(\theta\phi)$$

Essendo le due equazioni disaccoppiate, si riscriva la funzione incognita come prodotto di una funzione che dipende solo da $\cos\theta$ per una che dipende solo da $\phi$: $\psi_{lm}(\theta\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$.
Si ponga $\xi = \cos\theta$ e si riscriva la prima equazione, sfruttando la seconda per eliminare le derivate rispetto a $\phi$ dalla prima.
Si risolva la seconda equazione e si determini $\Phi(\phi)$. Si risolva quindi la prima equazione. Si osservi che compaiono polinomi di Legendre di 2 tipi. Imponendo la regolarità della soluzione in $\xi = \pm 1$ si fissi una delle due costanti di integrazione.
Si confrontino le soluzioni ottenute con le armoniche sferiche $Y_{lm}$ implementate in Mathematica.
Si disegnino le prime armoniche sferiche, con $l = 0, 1, 2$ e $-l \leq m \leq l$, utilizzando il comando `ParametricPlot3D` e notando che la funzione da disegnare fornisce il raggio (in coordinate sferiche) ovvero la distanza della superficie dall'origine.

- Si generino i primi 50 polinomi di Legendre, basandosi sulla relazione di ricorrenza da essi soddisfatta,
$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$$
essendo noto che $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$.

- Si verifichi, per $0 \leq i, j \leq 5$ la relazione di ortogonalità dei polinomi di Legendre.
- Si implementi una regola di sostituzione che sfrutta la relazione di ortogonalità dei polinomi di Legendre.
- **Algebra di Dirac**
  Si consideri un insieme di 4 matrici $\gamma^\mu$ $\mu = 0, 1, 2, 3$ che soddisfano la seguente regola di anticommutazione
  $$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$$
  e inoltre si consideri la matrice $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ che anticommuta con tutte le altre matrici, cioè tale per cui $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$, e che è tale per cui $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$.
  Si usi Mathematica per implementare delle regole che permettano:
  a) di calcolare la traccia del prodotto di un numero arbitrario di matrici $\gamma$;
  b) di semplificare un prodotto di matrici $\gamma$ quando un indice compaia ripetuto (due volte).
  Per raggiungere questo scopo si considerino i seguenti passaggi:
  1) si rappresentino i vettori, con un indice di Lorentz, il tensore metrico, con due indici di Lorentz, il prodotto scalare di due vettori e infine la contrazione di un tensore metrico con un vettore, utilizzando un unico simbolo;
  2) si introduca un simbolo per rappresentare una matrice $\gamma$ con indice $\mu$;
  3) si introduca un simbolo con cui scrivere il prodotto (ovviamente non commutativo) di una sequenza arbitrariamente lunga di matrici $\gamma$;
  4) si introduca un simbolo che implementi (ricorsivamente) l'operazione di traccia di matrici $\gamma$.

  Si ricordino le dimostrazioni per cui $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = 0$ e per cui $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$.
  Si ha infatti $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = \mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_5\gamma^\mu) = -\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5) = -\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_5\gamma^\mu) = -\mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = 0$ e inoltre $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \mathrm{Tr}(2g^{\mu\nu}\mathbb{1} - \gamma^\nu\gamma^\mu) = 8g^{\mu\nu} - \mathrm{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\mu)$ da cui il risultato.
  Si ricordi inoltre che
  $$\gamma^\mu\gamma^{\alpha_1}\ldots\gamma^{\alpha_n}\gamma_\mu = \begin{cases} -2\gamma^{\alpha_n}\gamma^{\alpha_{n-1}}\ldots\gamma^{\alpha_1} & \text{n dispari} \\ 4g^{\alpha_1\alpha_2} & n = 2 \\ 4 & n = 0 \end{cases}$$