



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO  
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE  
LAUREA TRIENNALE IN FISICA

EVOLUZIONE ADIABATICA  
E TEOREMA DI GELL-MANN E LOW

Relatore:

**Prof. Luca Guido MOLINARI**

Elaborato finale di:  
**Giovanni TRICELLA**

775887

PACS: 03.70.+k

**Anno Accademico 2012-2013**

## Indice

Introduzione	7
Capitolo 1. L'equazione di Schrödinger	9
1.1. La dinamica di un sistema	9
1.2. Operatori unitari	10
1.3. Le traslazioni temporali	13
Capitolo 2. Il Teorema Adiabatico	17
2.1. Caratterizzazione di un sistema adiabatico	17
2.2. L'evoluzione adiabatica	20
2.3. Trasformazioni di gauge	23
2.4. La rappresentazione ad assi rotanti	24
Capitolo 3. Il Teorema di Gell-Mann e Low	33
3.1. Evoluzione rispetto al fattore di ordine di grandezza	34
3.2. Il Teorema di Gell-Mann e Low	36
3.3. Teorema di Gell-Mann e Low e Teorema Adiabatico	40
3.4. Teorema di Gell-Mann e Low e leggi di evoluzione	41
3.5. Accenni alla teoria dei campi	43
Capitolo 4. Spazi finito-dimensionali	49
4.1. Hamiltoniane $2 \times 2$ , esempio pedagogico	49
4.2. L'evoluzione temporale per le matrici $2 \times 2$	56
4.3. Considerazioni sulle Hamiltoniane $3 \times 3$	60
4.4. Imposizioni sulla soluzione	63
Conclusioni	65
Bibliografia	67

## Introduzione

Nel contesto della meccanica quantistica, particolare interesse presentano i sistemi dinamici in cui l'Hamiltoniana  $H(t)$  dipende esplicitamente dal tempo. Da ognuna di esse, mediante il riscaldamento dei tempi, si può definire una famiglia di Hamiltoniane, tra le quali  $H(\epsilon t)$  varia tanto più lentamente quanto più la velocità di trasformazione  $\epsilon$  è piccola [5].

In questo lavoro sono state considerate Hamiltoniane lentamente variabili, in cui la velocità di trasformazione è portata, al limite, ad essere nulla.

Il formalismo più conveniente per la descrizione delle trasformazioni lente è quello della rappresentazione adiabatica. Questa consiste nel caratterizzare per ogni tempo la decomposizione spettrale dell'Hamiltoniana e nel determinare un operatore unitario continuo che connetta gli autospazi dell'Hamiltoniana tra due tempi diversi.

Questi sono i termini generali impiegati da Kato per la sua dimostrazione del Teorema Adiabatico temporale (1950) [1], che generalizza studi precedenti, in cui ha introdotto la costruzione dell'operatore di evoluzione adiabatica e ha dimostrato come esso sia uguale, nel limite di velocità di trasformazione nulla, all'operatore che risolve l'equazione di Schrödinger. La trattazione di Kato è particolarmente comoda nello studio di perturbazioni che vengono accese e spente, o possono comunque essere parametrizzate nel tempo, divenendo uno strumento utile per fare asserzioni di stabilità in un sistema complesso: esso esprime entro che margine di errore si possa affermare che un autostato evolva dinamicamente in un autostato, in funzione dei tempi caratteristici di variazione di una perturbazione.

In questo contesto Gell-Mann e Low pubblicarono nel 1951 un articolo [2] in cui compariva in appendice una formula che descrive come un autostato di un'Hamiltoniana perturbata possa essere ricavato da quello imperturbato secondo considerazioni analoghe a quelle del Teorema Adiabatico: mediante un'opportuna funzione di accensione che modula la perturbazione, si costruisce un sistema la cui Hamiltoniana si trasforma dall'essere uguale a quella imperturbata fino a diventare uguale a quella perturbata. La funzione di accensione opera in un tempo infinito e ad una velocità arbitraria, al limite nulla.

La forma a cui si arriva, nota come Teorema di Gell-Mann e Low, è una scrittura

particolarmente compatta e valida senza dover richiedere forti limitazioni sul sistema fisico preso in considerazione, e permette di fornire risultati generali su fenomeni di interazione, esprimibili mediante gli autostati dell'Hamiltoniana non perturbata.

In questo lavoro si discute in termini generali come si possa determinare la dinamica di un sistema, e si caratterizzano il formalismo e gli strumenti che a questo fine sono stati impiegati tradizionalmente in meccanica quantistica. Mediante questi strumenti si definiscono rigorosamente i sistemi con evoluzioni lente, e si presenta in una forma generale il Teorema Adiabatico, di cui si fornisce dimostrazione.

Viene esposto il Teorema di Gell-Mann e Low, mostrando le caratteristiche dell'accensione che viene introdotta, fornendo una dimostrazione originale del teorema ottenuta mediante principi variazionali ed esponendo il risultato a cui esso conduce. Vengono messi in luce i forti rapporti tra il Teorema di Gell-Mann e Low e il Teorema Adiabatico, mostrando anche le relazioni che intercorrono tra gli operatori che compaiono in queste trattazioni. Del Teorema di Gell-Mann e Low si sono inoltre commentate le possibili generalizzazioni secondo differenti rappresentazioni di evoluzione, e nel particolare della rappresentazione di interazione si mostra come, proprio attraverso questo teorema, si costruisca la base formale che permette di giustificare gli strumenti dei diagrammi di Feynman [8].

Infine si effettua una trattazione esaustiva nel caso di sistemi a due stati, descritti da matrici  $2 \times 2$ , per i quali si ottengono in maniera esatta gli oggetti descritti (muovendo da un lavoro di Brouder, Stoltz e Panati [10]), per poi introdurre le problematiche che emergono nel caso di sistemi più articolati, a partire da quello a tre stati.

## CAPITOLO 1

# L'equazione di Schrödinger

### 1.1. La dinamica di un sistema

Bisogna fare delle assunzioni iniziali elementari che garantiscano che sia possibile descrivere un sistema secondo delle leggi dinamiche. Dobbiamo supporre che esistano delle variabili atte a descrivere il sistema, che l'insieme dei valori assunti da queste variabili definisca uno stato del sistema, che esista un parametro rispetto al quale esprimere per ogni stato delle leggi che descrivano la variazione dello stato stesso, e che queste leggi siano funzioni sullo spazio degli stati, ovvero che queste leggi garantiscano che al variare del parametro scelto un solo stato finale sia prevedibile.

L'esistenza di un formalismo ed il comportamento non (interamente) casuale del sistema che invece rispetti delle leggi analitiche sono due condizioni che permettono di descrivere analiticamente una funzione di evoluzione per quelle variabili non casuali. In meccanica quantistica, nella sua formulazione tradizionale, è possibile impiegare come parametro il tempo, e gli stati quantistici appartengono per ogni tempo ad uno spazio di Hilbert. Siamo così portati ad interpretare le assunzioni della dinamica come la necessità che esista una base dello spazio e che esista un isomorfismo definito su tale spazio che definisca l'evoluzione temporale.

Il fatto che esista un prodotto interno tra stati in tale spazio, e che il prodotto tra due stati normalizzati si possa interpretare in termini di probabilità, induce naturalmente la richiesta che l'operatore che descrive l'evoluzione temporale sia unitario:

$$(1.1.1) \quad |a(t)\rangle = U(t, t_0)|a(t_0)\rangle$$

$$\langle a(t)|a(t)\rangle = \langle a(t_0)|U(t, t_0)^\dagger U(t, t_0)|a(t_0)\rangle$$

considerando la consistenza dell'interpretazione del prodotto bra-ket in termini di probabilità, e considerando la necessità che l'evoluzione temporale di uno stato sia univocamente definita, ha senso imporre la conservazione della probabilità, cioè imponiamo che

$$\langle a(t)|a(t)\rangle = \langle a(t_0)|U(t, t_0)^\dagger U(t, t_0)|a(t_0)\rangle \stackrel{!}{=} \langle a(t_0)|a(t_0)\rangle \quad \forall |a(t_0)\rangle$$

da cui consegue che

$$(1.1.2) \quad U(t, t_0)^\dagger U(t, t_0) = \mathbb{I}$$

ovvero l'operatore deve essere unitario perché di ogni stato sia preservata la norma, la probabilità, durante l'evoluzione temporale che è definita per ogni stato in maniera univoca [13].

Questa imposizione è buona perché implica che uno stato sia ben definito, anche in norma, indipendentemente dalla sua storia, dalla storia del sistema, e dall'istante di tempo in cui vive. Si assume quindi che lo spazio  $\mathcal{H}$  abbia una natura fissata, e non cambino nel tempo le sue proprietà. Questo ci permette in generale di adoperare ad ogni tempo una stessa base dello spazio, ed ha senso confrontare oggetti che non vivono nello stesso istante.

## 1.2. Operatori unitari

Per un operatore unitario vale da definizione che  $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{I}$ , ovvero  $U^\dagger = U^{-1}$ , dove per  $U^\dagger$  si intende l'operatore aggiunto di  $U$ . Da questo consegue che nel caso in cui lo spazio degli stati sia finito-dimensionale risulta  $\det(U) = e^{i\theta}$ . Ad un operatore unitario possiamo associare una cambiamento di base nello spazio, osservando che una trasformazione unitaria trasforma una base ortonormale in un'altra base ortonormale, poiché è un operatore che applicato ad entrambi gli stati di cui si considera il prodotto interno, lascia il prodotto invariato.

$$[\{|e_i\rangle\}] = \mathcal{H} : \langle e_j | e_i \rangle = \delta_{ji} = \langle e_j | U^\dagger U | e_i \rangle \Rightarrow [\{U|e_i\rangle\}] = \mathcal{H}$$

Dove si intende  $[\{|e_i\rangle\}]$  lo spazio generato dal set  $\{|e_i\rangle\}$  di stati appartenenti ad  $\mathcal{H}$ , lo spazio che stiamo prendendo in considerazione.

Dalla definizione di unitarietà di un operatore risulta immediatamente che, presa in considerazione un qualsiasi parametro  $z$ , deve essere

$$\frac{\partial}{\partial z} (U^\dagger U) = \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{I} = 0 = \left( \frac{\partial}{\partial z} U^\dagger \right) U + U^\dagger \left( \frac{\partial}{\partial z} U \right)$$

da cui si ottiene direttamente che

$$(1.2.1) \quad \left( \frac{\partial}{\partial z} U \right) = -U \left( \frac{\partial}{\partial z} U^\dagger \right) U$$

(o indifferentemente  $(\frac{\partial}{\partial z}U^\dagger) = -U^\dagger(\frac{\partial}{\partial z}U)U^\dagger$ ). Da qui si ricava anche che

$$(1.2.2) \quad \left(-U\left(\frac{\partial}{\partial z}U^\dagger\right)\right)^\dagger = -\left(\frac{\partial}{\partial z}U^\dagger\right)^\dagger U^\dagger = U\left(\frac{\partial}{\partial z}U\right)^\dagger UU^\dagger = U\left(\frac{\partial}{\partial z}U\right)^\dagger$$

dove nell'ultimo passaggio è stato necessario sfruttare nuovamente la definizione di unitarietà di  $U$ .

Quando vale che  $(\frac{\partial}{\partial z}U)^\dagger = (\frac{\partial}{\partial z}U^\dagger)$ , che è un'equazione verificata quando  $z$  è un parametro strettamente reale, che rinominiamo  $x$ , si ottiene che  $-U(\frac{\partial}{\partial x}U^\dagger)$  è un operatore anti-hermitiano.

Definendo quindi  $H_U = -iU(\frac{\partial}{\partial x}U^\dagger)$ , che risulta quindi essere un operatore hermitiano, ovvero  $H_U = H_U^\dagger$ , essendo  $i$  l'unità immaginaria, si ricava un problema di Cauchy generale piuttosto semplice

$$(1.2.3) \quad \begin{cases} i\frac{\partial}{\partial x}U &= H_U U \\ U(x_0) &= \mathbb{I} \end{cases}$$

Questa forma tornerà più volte associata a diversi operatori di trasformazione. Questa scrittura vuole sottolineare come  $U$  provochi una evoluzione degli stati del sistema che, per un incremento infinitesimo di  $x$ , sono dati istantaneamente dall'applicazione di  $H_U$  sugli stati, e quindi come una evoluzione corrisponda ad una traslazione rispetto a  $x$ :

$$\begin{aligned} |a(x_0 + dx)\rangle &= U(x_0 + dx, x_0)|a(x_0)\rangle = \\ &= U(x_0, x_0)|a(x_0)\rangle + \left(\frac{\partial}{\partial x}U(x, x_0)\right)_{x=x_0} dx |a(x_0)\rangle = \\ &= (1 - iH_U(x_0) dx) |a(x_0)\rangle \end{aligned}$$

Gli operatori unitari che vengono usati per la descrizione di un'evoluzione sono oggetti definiti a due parametri, il valore iniziale e il valore finale che il parametro assume durante l'evoluzione. Questo porta direttamente alla legge di composizione dei propagatori:

$$U(x, x_0)|a(x_0)\rangle = U(x, x_1)U(x_1, x_0)|a(x_0)\rangle$$

Una forma particolarmente comoda di descrivere una trasformazione unitaria è quella dell'esponenziale di un operatore hermitiano, ovvero l'estensione agli operatori

dell'idea che sia possibile rappresentare un numero complesso mediante un esponenziale  $e^{i\varphi}$ .

Prendiamo quindi in considerazione la scrittura

$$O = e^{iG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iG)^n$$

$$O^\dagger = e^{-iG^\dagger}$$

è evidente che se l'operatore  $G$  è hermitiano, l'operatore  $O$  deve essere unitario, in quanto il commutatore  $[G, G^\dagger] = GG^\dagger - G^\dagger G = G^2 - G^2 = 0$  e sussiste l'uguaglianza  $e^{iG}e^{-iG} = e^{iG-iG} = \mathbb{I}$ . Esplicitamente:

$$\begin{aligned} OO^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} i^{n-m} G^{n+m} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(s-n)!} i^{2n-s} G^s = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^s \frac{1}{n!} \frac{1}{(s-n)!} \frac{s!}{s!} (-i)^{s-n} i^n G^s = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(i-i)^s}{s!} G^s = \\ &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

Facendo un confronto con la scrittura in forma di equazione differenziale precedente si coglie subito la difficoltà che si riscontra nella risoluzione di problemi associati a queste trasformazioni: risulta ad esempio  $H_U = -iU \left( \frac{\partial}{\partial x} U^\dagger \right) = -ie^{iG} \left( \frac{\partial}{\partial x} e^{-iG} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} i^{n-m-1} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} G^n \frac{\partial}{\partial x} G^m$ , dove varrà per definizione  $\left( \frac{\partial}{\partial x} e^{-iG} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (-iG)^n \right)$  e inoltre in generale  $[e^{iG}, \left( \frac{\partial}{\partial x} e^{-iG} \right)] \neq 0$  dal momento che in generale per un operatore hermitiano  $[G, \left( \frac{\partial}{\partial x} G \right)] \neq 0$ .

Nel caso tipico ci si trova a studiare una situazione in cui è nota  $H_U$  e si desidera ricavare l'operatore unitario  $U$  definito da  $G$ . Per descrivere  $U$  la forma esponenziale è evidentemente quella più compatta, ed ottenere  $U$  o  $G$  è equivalente; tuttavia il legame tra  $G$  e  $H_U$  è non banale, a meno che  $H_U$  non sia indipendente da  $x$ , e allora, e solo allora, dovrà valere  $G = -H_U x$ .

Più in generale si ottiene che  $H_U(x) = -\frac{\partial}{\partial x} G(x)$ , ma sempre nel caso in cui si annulli il commutatore appena definito.

Per risolvere questi problemi si possono usare strumenti come lo sviluppo di Dyson, che ottiene  $G$  da una iterazione di integrazioni di  $H_U$  rispetto a  $x$  con l'introduzione di un ordinamento nell'integrazione, essendo nota una condizione al contorno del problema [12, 7].

Quello che otteniamo è quindi che ogni operatore hermitiano definisce una trasformazione unitaria. Tale trasformazione ammette come autostati gli autostati dell'operatore che compare ad argomento della propria riscrittura esponenziale, a cui è associato come autovalore un fattore di fase:

$$\begin{aligned} |a(x)\rangle &: G(x)|a(x)\rangle = g_a(x)|a(x)\rangle \\ |a(x)\rangle &= U(x; x_0)|a(x_0)\rangle \\ U(x; x_0) &\equiv e^{iG(x)}, \quad G(x_0) = 0, \quad G = G^\dagger \\ |a(x_0)\rangle &= U(x; x_0)^\dagger |a(x)\rangle = e^{-iG(x)} |a(x)\rangle = e^{-ig_a(x)} |a(x)\rangle \end{aligned}$$

allora l'operatore hermitiano  $G$  è in definitiva "l'invariante" associata alla trasformazione  $U$ , i cui autospazi in funzione di  $x$  sono conservati, anche se possono smettere di essere tali, nel caso in cui  $[G(x), G(x_0)] \neq 0$  per  $x \neq x_0$ .

Un operatore hermitiano è diagonalizzabile ed ammette autovalori reali: in meccanica quantistica associamo alle grandezze osservabili degli operatori hermitiani poiché si identifica la realizzazione di una misura come l'applicazione di un operatore, che deve ammettere come risultato un valore reale per senso fisico della descrizione.

Quello che arriviamo ad affermare è quindi che in meccanica quantistica un'osservabile genera una trasformazione unitaria, a questa trasformazione associamo un'evoluzione del sistema, che può essere interpretata in senso generale come una rotazione della base nello spazio  $\mathcal{H}$  (o un'inversione, che in un contesto di evoluzione è un caso patologico), secondo una traslazione rispetto a  $x$ , ricordando però che la relazione tra l'operatore i cui autostati sono conservati al variare di  $x$ , durante l'evoluzione, e l'osservabile  $H_U$  nota non è in generale banale qualora  $H_U = H_U(x)$ .

L'analogia con la meccanica classica è molto forte, ed è lecito aspettarsi di ottenere ancora, tendendo ad opportuni limiti, gli stessi risultati studiati nella meccanica analitica.

### 1.3. Le traslazioni temporali

Le leggi dell'evoluzione temporale in meccanica quantistica possono essere ricavate dalle caratteristiche degli operatori unitari che la descrivono.

Conviene innanzitutto considerare il caso in cui il sistema sia descritto per ogni tempo dalle stesse leggi, ovvero supponendo che esista un operatore indipendente dal tempo (che sarà l'Hamiltoniana) che permetta di definire una base privilegiata con cui studiare il sistema (quella dei suoi autostati) e che rappresenti una grandezza conservata. La dualità tempo-energia fornisce una rappresentazione ottimale che permette anche nel limite classico di assumere la conservazione dell'energia in un sistema che non subisca modifiche nel tempo.

Ricordiamo che comunque si definisca un operatore hermitiano, che ha quindi autovalori reali, ed un parametro, purché non si arrivi a violare le necessarie imposizioni che permettono di definire una dinamica, si può trovare un operatore di evoluzione dall'equazione differenziale  $i\frac{\partial}{\partial x}U = H_U U$ , e possiamo comunque chiamare *tempo* quel parametro rispetto a cui l'operatore hermitiano che ha come autovalori i valori energetici ammissibili per il sistema risulti soddisfare questa equazione. La rappresentazione energetica non è quindi una rappresentazione privilegiata a priori, ma assumerà valenza in termini di conservazione dell'energia.

Supponendo allora  $H_U = H_U^\dagger$  e  $\frac{\partial}{\partial x}H_U = 0$  ad ogni valore di  $x$ , per tutte le considerazioni affrontate in precedenza,

$$U(x, x_0) = e^{-iH_U(x-x_0)}$$

risulta soddisfare l'equazione e le condizioni al contorno date dalla definizione di evoluzione, per cui  $U(x_0, x_0) = \mathbb{I}$ :  $|a(x)\rangle = U(x, x_0)|a(x_0)\rangle$ .

Se quindi si ha una descrizione del sistema per il quale si ha un operatore hermitiano costante, gli autospazi dell'operatore e gli autovalori ad essi associati si conservano. Nel caso di una Hamiltoniana (che descrivendo lo spettro energetico reale applicherà come un operatore hermitiano) che si conserva nel tempo tempo, l'equazione di evoluzione temporale si presenta nella forma nota:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H_0U(t, t_0)$$

Questa è l'equazione di Schrödinger del sistema per l'operatore di evoluzione temporale a partire da un tempo  $t_0$ . La forma esplicita per l'operatore di evoluzione è  $U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)}$ . In questa equazione compare la costante fondamentale  $\hbar$ , la costante di Planck ridotta, che qui ha la funzione di riscaldare dimensionalmente i termini dell'equazione, avendo espresso Hamiltoniana e tempo in forma dimensionata, ma la sua esistenza definita ha implicazioni più profonde nella descrizione di sistemi fisici, è misurabile e costituisce una costante fondamentale della fisica. Essa può essere posta arbitrariamente  $\hbar = 1$ , facendo però ora attenzione a trattare  $H_0$  e

$t$  secondo opportuni riscalamanti.

Nel caso in cui le forti limitazioni che avevamo posto all'Hamiltoniana non si possano considerare verificate, l'equazione viene lasciata in questa forma, tenendo presente quanto discusso in precedenza: la rappresentazione dell'evoluzione in forma differenziale ci indica cosa produca l'evoluzione infinitesima dal tempo  $t_0$  a  $t_0 + dt$ , e questo oggetto deve essere, nel limite di variazioni lente, uguale all'Hamiltoniana perché le energie siano, al limite, conservate [13, 6]; l'Hamiltoniana è inoltre un operatore adatto all'equazione in questa forma in quanto definito istantaneamente sul solo valore assunto dal tempo  $t$ .

Inoltre questa scrittura nei termini dell'Hamiltoniana comporta che per un operatore generico anche al più dipendente dal tempo  $O(t)$ , si ottiene che la sua applicazione restituisce

$$\langle a(t)|O(t)|b(t)\rangle = \langle a(t_0)|U(t, t_0)^\dagger O(t)U(t, t_0)|b(t_0)\rangle$$

e questo implica una legge di evoluzione per il prodotto interno che è del tipo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle a(t)|O(t)|b(t)\rangle &= \langle a(t_0)|\frac{\partial}{\partial t} \left( U(t, t_0)^\dagger O(t)U(t, t_0) \right) |b(t_0)\rangle = \\ &= \langle a(t_0)|\frac{1}{i\hbar}U(t, t_0)^\dagger \left( -H(t)O(t) + i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} O(t) \right) + O(t)H(t) \right) \circ \\ &\quad \circ U(t, t_0)|b(t_0)\rangle = \\ &= \langle a(t)|\frac{1}{i\hbar} [O(t), H(t)] + \left( \frac{\partial}{\partial t} O(t) \right) |b(t)\rangle \end{aligned}$$

Questa caratterizzazione ha una forte valenza di parallelismo con la meccanica classica, in quanto mostra come l'evoluzione del valore medio dipenda dal commutatore tra l'operatore e l'Hamiltoniana, nello stesso modo in cui l'evoluzione temporale di una variabile dinamica era associata alla parentesi di Poisson tra l'Hamiltoniana classica e la variabile studiata stessa.

Concludiamo asserendo che proprio l'Hamiltoniana energetica può chiudere una formulazione coerente in questa rappresentazione di evoluzione temporale.

Infine si osserva che, a seconda delle caratteristiche dell'Hamiltoniana, si otterrà  $U$  secondo metodologie differenti: si riscontrerà una soluzione ancora banale nel caso in cui le  $[H(t_1), H(t_2)] = 0$ ,  $\forall t_1, t_2$ , e questa sarà in particolare

$U(x, x_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x H(x') dx'}$ , ma più in generale, quando  $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$ , occorre ricorrere a strumenti iterativi per l'ottenimento della soluzione. Una soluzione ottenuta mediante un processo iterativo risulterà una approssimazione valida entro un

certo ordine  $n$  nel caso si siano presi in considerazione degli intervalli di tempo limitati; mentre occorre cercare di ottenere la soluzione analitica nel caso in cui la richiesta sia di caratterizzare l'evoluzione sino agli estremi dell'asse dei tempi, per  $t \rightarrow \pm\infty$ , che è proprio il caso che ci si trova a dover studiare per quanto riguarda il teorema di Gell-Mann e Low: per esso il procedimento iterativo in generale porta ad una soluzione che non converge [7].

## Il Teorema Adiabatico

In questa parte si seguirà la traccia di Kato [1], Messiah [5], e di Nenciu e Rasche [3], che hanno dimostrato in forma estremamente generale il Teorema Adiabatico, fornendo uno studio relativo alla derivata di ordine  $n$  generico rispetto al tempo degli oggetti di accensione tramite cui è costruita l'Hamiltoniana del sistema. A noi non interesserà, in questa trattazione, lo studio di un sistema che soddisfi tali condizioni; ad ogni modo, si tenga presente che sotto condizioni di regolarità le caratteristiche descritte possono essere ulteriormente estese.

### 2.1. Caratterizzazione di un sistema adiabatico

Il Teorema Adiabatico studia Hamiltoniane in cui la variazione temporale sia lenta, ed in particolare in cui la variazione sia data da un lento variare di un termine perturbativo. L'interesse di studiare tali Hamiltoniane sta nel fatto ci si aspetta che la loro variazione lenta induca delle regolarità al variare del tempo dei propri autostati e degli autovalori ad essi associati. Conviene allora dare la definizione [1]:

**DEFINIZIONE 1.** Un'Hamiltoniana  $H(t)$  è una *Hamiltoniana adiabatica* se comunque si prendano un tempo  $t_0$  e un autospazio  $\tilde{S}$  a cui è associato il proiettore  $\tilde{P}$  tale che  $H(t_0)\tilde{P} = \tilde{E}\tilde{P}$ , preso un intorno  $I$  di  $t_0$ , esiste un'unica applicazione continua (nella metrica indotta dalla norma in  $\mathcal{H}$ ) e derivabile  $P : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , per cui valga che  $P^2 = P$ ,  $P(t_0)|\tilde{a}\rangle = |\tilde{a}\rangle$ , e  $H(t)P(t) = E(t)P(t)$  per  $\forall t \in I$ . La funzione  $E(t)$  così definita deve essere continua in  $I$ , e necessariamente  $E(t_0) = \tilde{E}$ .

$P(t)$  è quindi un operatore continuo che associa ad ogni tempo un proiettore su un autospazio dell'Hamiltoniana (e  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  è lo spazio di Banach degli operatori da  $\mathcal{H}$  a  $\mathcal{H}$  [12]). Questa definizione indica come gli autostati e le energie ad essi associate siano funzioni continue sul tempo; questa definizione può estendersi nel caso in cui sia valida quasi ovunque rispetto al tempo e si presenti crossing energetico accidentale, lasciando gli autospazi comunque ben distinti.

Si sottolinea che all'esistenza di un proiettore dipendente dal tempo con il comportamento qui descritto, si può associare una famiglia di funzioni che associa ad ogni tempo un autostato dell'Hamiltoniana; tali funzioni danno autostati che differiscono

tra loro al più per norma e per un fattore di fase per ogni tempo.

Con l'ipotesi di Hamiltoniana adiabatica così definita, Kato ha superato il problema del crossing nel Teorema Adiabatico ed ha potuto estendere la trattazione dei sistemi adiabatici a spettri continui, avendo definito una proprietà di continuità per il generico e singolo autostato.

Queste proprietà sono particolarmente generali, lo studio di Nenciu e Rasche è stato svolto su ipotesi più stringenti su di un numero finito di autospazi, con autovalori discreti distinti per ogni tempo (considerando una collezione finita di indici naturali, per Nenciu e Rasche [3]  $\exists d = \min_{s \in \mathbb{R}} \inf_{i \neq j} |E_i(s) - E_j(s)| > 0$ , dove si associano agli indici le funzioni continue su  $s$  dei proiettori su autospazi ortogonali, e le funzioni continue su  $s$  delle energie a tali autospazi associate), che è un caso che rientra in quello qui espresso, dove si prendono in considerazione oltre agli autostati noti anche il complemento ortogonale rispetto ad  $\mathcal{H}$  allo spazio che essi generano.

Qui ci si concentra nello studio delle Hamiltoniane per cui il termine perturbativo indipendente dal tempo, tramite un fattore moltiplicativo reale. Questa è la forma su cui si costruirà il Teorema di Gell-Mann e Low.

$$\tilde{H}(t) = H_0 + f(\epsilon t)V$$

In questa scrittura si intende il termine  $H_0$  come l'Hamiltoniana costante e non perturbata, di cui è noto lo spettro, e rispetto alla quale prenderemo una base di autostati per lo spazio considerato  $\mathcal{H}$ , o comunque un set di autostati ortogonali che appartenga allo spazio. Lo spettro di  $H_0$  si richiede inferiormente limitato. Questo richiesta è fisicamente ragionevole nello studio di casi reali in cui la limitatezza dello spettro deve esistere per verificare condizioni di stabilità. D'altro canto, la possibilità che l'Hamiltoniana non sia limitata in norma garantisce che casi di interesse non banali possano essere affrontati.

Il termine  $H_0$  deve naturalmente rispettare tutte le richieste fatte in precedenza per un'Hamiltoniana: deve essere hermitiana ed ammettere quindi uno spettro reale di autovalori.

La funzione  $f(\epsilon t)$  esprime quantitativamente la caratteristica della lentezza; essa è la *switching function*, la funzione di accensione, che deve rispettare condizioni di regolarità per avere valenza pratica nella trattazione. Tale funzione è definita sull'asse reale dei tempi in maniera indiretta, in quanto il tempo deve comparire in termini adimensionati: conviene scegliere di studiare il problema in termini di  $\epsilon$  che è la

nostra velocità di trasformazione, così che  $\epsilon t$  risulti adimensionato;  $\epsilon$  è il parametro che determinerà le caratteristiche del sistema al proprio variare.

La funzione  $f(\epsilon t)$  viene quindi presa definita su tutto  $\mathbb{R}$ ; deve assumere valori reali; essa deve essere continua, lipschitziana e limitata, dove è ragionevole ma non strettamente necessario che  $0 \leq f(s) \leq 1$  (si può al più operare una partizione di  $\mathbb{R}$  per dividere a tratti il problema, considerando diversi termini perturbativi in ogni tratto, ma essendo la perturbazione fissata è comunque preferibile che sia ridefinita la perturbazione  $V$  riscalandola su  $\sup_{s \in \mathbb{R}} f(s)$ ); deve assumere massimo per un valore finito di  $s$  e si impone tale  $s = 0$  e, dopo aver operato un eventuale riscaldamento, è quindi  $f(0) = 1$ , fatto che può sempre essere imposto ridefinendo per traslazione l'asse dei tempi; ai fini di questa trattazione, devono essere  $f, \frac{\partial}{\partial s} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Inoltre essa deve svanire per tempi grandi in valore assoluto, e quindi tende asintoticamente a 0 [3].

DEFINIZIONE 2. Si definisce *funzione di accensione* una funzione lipschitziana  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:  $f, \frac{\partial}{\partial s} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ,  $\sup_{s \in \mathbb{R}} f(s) = f(0) = 1$ ,  $0 \leq f(s) \leq 1 \forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} f(s) = 0$ .

Infine, il termine perturbativo  $V$  deve naturalmente essere hermitiano, perché anche  $\tilde{H}(t)$  sia una Hamiltoniana ben definita, e deve essere limitato. Si sceglie  $V$  indipendente dal tempo; impiegare una funzione di accensione per modulare la perturbazione è un limite alla fisica che rappresentabile, in quanto ci si riduce a descrivere la lenta crescita della perturbazione fino ad un valore finito  $V$ , non abbiamo costruito un oggetto che perturbi gli stati nel modo più variabile e disomogeneo possibile con la sola condizione della lentezza; ad ogni modo questa descrizione è profondamente utile perché ha in sé la caratteristica che ora è principale: non la generalità della perturbazione, ma lentezza con cui varia l'Hamiltoniana, che è una informazione contenuta nel solo parametro  $\epsilon$ .

A questo punto, visto che la dipendenza dal tempo è tutta contenuta in  $f(\epsilon t)$  e che la definizione sul tempo è implicita, scegliamo la ridefinizione  $t \rightarrow s = \epsilon t$ , da cui  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} = \epsilon \frac{\partial}{\partial s}$ , e che ci permette di studiare ora

$$(2.1.1) \quad H(s) = H_0 + f(s)V$$

in termini del tempo adimensionato  $s$  con cui si era già studiata  $f$ .

Si può ora affermare che [3]:

**TEOREMA 3.** *Sia  $H(s) = H_0 + f(s)V$  l'Hamiltoniana del sistema. Sia  $H_0$  limitata inferiormente, sia  $V$  limitata, sia  $f(s)$  una funzione di accensione. Allora  $H(s)$  è un'Hamiltoniana adiabatica.*

La dimostrazione può essere svolta sfruttando la teoria delle perturbazioni; il risultato è banale nel caso finito dimensionale. In particolare, fissando un  $\varepsilon$  arbitrariamente piccolo e trovando un  $\delta s = \delta s(\varepsilon)$  opportuno, si prendono un autostato  $|a(s)\rangle$  di  $H(s)$  e  $|b(s + \delta s)\rangle$  di  $H(s + \delta s)$ , per cui valga  $\langle a(s)|b(s + \delta s)\rangle > 1 - \varepsilon$ . Questi possono essere trovati per le caratteristiche della funzione di accensione. Da  $\langle a(s)|H(s + \delta s)|b(s + \delta s)\rangle$  si ottengono le informazioni sullo spettro, applicando l'Hamiltoniana a destra e a sinistra: si trova  $|E_b(s + \delta s) - E_a(s)| < k \delta s$  dal fatto che  $H(s + \delta s)|b(s + \delta s)\rangle = E_b(s + \delta s)|b(s + \delta s)\rangle$  e che, per  $\delta s$  piccolo, si ha anche  $\langle a(s)|H(s + \delta s) = \langle a(s)|(H(s) + f'(s)\delta s V)$ . Queste particolari Hamiltoniane sono quindi Hamiltoniane adiabatiche, ed esse saranno studiate successivamente nel Teorema di Gell-Mann e Low.

Percorrendo la strada tracciata da Kato si è considerato preferibile mantenere nella dimostrazione del Teorema Adiabatico il carattere di generalità che si ottiene dalla Definizione 1.

## 2.2. L'evoluzione adiabatica

Per quanto affermato nella Definizione 1 sull'esistenza di proiettori, autostati e autovalori energetici continui rispetto al tempo, possiamo tentare di scrivere un'equazione di evoluzione per gli autostati. Prendiamo in considerazione una Hamiltoniana adiabatica per la quale una famiglia finita o numerabile di autostati sia una base per lo spazio  $\mathcal{H}$  a qualsiasi tempo; numeriamo gli stati con l'indice  $j$ :

Abbiamo  $\forall j, |a_j\rangle : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H} : s \mapsto |a_j(s)\rangle : H(s)|a_j(s)\rangle = E_j(s)|a_j(s)\rangle$ , con  $|a_j(s)\rangle, E_j(s) \in C^0(s)$ .

È ora naturale scrivere l'equazione di evoluzione associata a questa definizione degli stati, che non è quella di evoluzione temporale data dall'Hamiltoniana (è facile convincersene: se le Hamiltoniane a due tempi diversi non commutano, un autostato generico non può evolvere in un autostato secondo l'equazione di Schrödinger, perché questo implicherebbe che in quell'intervallo di tempo l'autospazio sia conservato e le Hamiltoniane, essendo l'autostato generico, commuterebbero tra loro e con l'operatore di evoluzione). Devono quindi esistere un nuovo operatore unitario di evoluzione

e un nuovo operatore hermitiano associato [1, 5, 6].

$$\begin{aligned} |a_j(s)\rangle &= A(s, s_0)|a_j(s_0)\rangle, \quad A(s_0, s_0) = \mathbb{I} \\ A(s, s_0)^\dagger A(s, s_0) &= A(s, s_0)A(s, s_0)^\dagger = \mathbb{I} \\ H(s)|a_j(s)\rangle &= E_j(s)|a_j(s)\rangle \end{aligned}$$

Dalla definizione di Hamiltoniana adiabatica viene anche naturale prendere in considerazione l'operatore di proiezione sull'autospazio generato da  $|a_j(s)\rangle$  (si considera per necessità di comodità  $\langle a_j(s)|a_j(s)\rangle = 1$ ), ovvero  $P_j(s) = |a_j(s)\rangle\langle a_j(s)|$ , dove il proiettore su di uno stato normalizzato noto ha le proprietà

$$\begin{aligned} P_j^2 &= |a_j\rangle\langle a_j|a_j\rangle\langle a_j| = |a_j\rangle\langle a_j| = P_j \\ P_j &= |a_j\rangle\langle a_j| = P_j^\dagger \end{aligned}$$

e, considerando una base ortonormale come è quella considerata a partire dall'Hamiltoniana,

$$\begin{aligned} P_j P_k &= |a_j\rangle\langle a_j|a_k\rangle\langle a_k| = \delta_{jk} P_j \\ &\Rightarrow [P_j, P_k] = 0 \end{aligned}$$

il che permette di scrivere l'Hamiltoniana nella forma:

$$(2.2.1) \quad H(s) = \sum_j E_j(s) P_j(s)$$

Questa forma è la decomposizione spettrale dell'Hamiltoniana, dove essa è scritta in forma esplicita come la somma dei proiettori sui propri autospazi. Avendo preso una base dello spazio  $\mathcal{H}$  di autostati dell'Hamiltoniana, l'insieme dei proiettori deve permettere di costruire una risoluzione dell'identità, e quindi, se è vera la scomposizione spettrale, deve valere  $\sum_j P_j(s) = \mathbb{I}$ .

Impiegando la scrittura associata all'evoluzione dello stato, si ottiene l'equazione di evoluzione espressa direttamente sui proiettori, procedendo per sostituzione:

$$P_j(s) = |a_j(s)\rangle\langle a_j(s)| = A(s, s_0)|a_j(s_0)\rangle\langle a_j(s_0)|A(s, s_0)^\dagger = A(s, s_0)P_j(s_0)A(s, s_0)^\dagger$$

ovvero, applicando a destra l'operatore unitario:

$$(2.2.2) \quad P_j(s)A(s, s_0) = A(s, s_0)P_j(s_0)$$

Abbiamo quindi scritto l'equazione dell'evoluzione dei proiettori; l'operatore unitario  $A(s, s_0)$  è definito su di essi, ed indica come dagli autostati a tempo  $s_0$  possano essere ottenuti quelli ad un tempo qualsiasi  $s$  conoscendo l'operatore di evoluzione. Chiamiamo  $A(s, s_0)$  operatore di evoluzione adiabatico.

Avendo stabilito che l'evoluzione che stiamo considerando non è quella classica, la dinamica del sistema considerato non potrà essere descritto contemporaneamente dall'equazione di Schrödinger classica e dalla base  $\{|a_j(s)\rangle\}$ : occorre definire quindi una equazione di Schrödinger equivalente come osservato studiando gli operatori unitari: deve cioè esistere un operatore hermitiano che denominiamo  $K$  tale che:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial s} A(s, s_0) = K(s)A(s, s_0)$$

$$K(s) = K(s)^\dagger = i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial s} A(s, s_0) \right) A(s, s_0)^\dagger = -i\hbar A(s, s_0) \left( \frac{\partial}{\partial s} A(s, s_0)^\dagger \right)$$

L'operatore  $K$  è stato introdotto da Kato [1] e lo indicheremo con il suo nome.

Leghiamo ora direttamente l'operatore di Kato ai proiettori, potendo combinare l'equazione di evoluzione dei proiettori e l'equazione di Schrödinger equivalente, sia infatti da 2.2.2

$$P_j(s) = A(s, s_0)P_j(s_0)A(s, s_0)^\dagger$$

osserviamo l'applicazione della derivata rispetto ad  $s$ :

$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial s} P_j(s) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial s} \left( A(s, s_0)P_j(s_0)A(s, s_0)^\dagger \right) = \\ &= K(s)A(s, s_0)P_j(s_0)A(s, s_0)^\dagger - A(s, s_0)P_j(s_0)A(s, s_0)^\dagger K(s) = \\ &= K(s)P_j(s) - P_j(s)K(s) = \\ &= [K(s), P_j(s)] \end{aligned}$$

L'operatore di Kato è ben definito purché applichi in modo tale che il proprio commutatore con un proiettore su un autospazio dia la derivata del proiettore stesso; così, trovato un operatore che verifichi questa condizione necessaria, possiamo ricostruire l'operatore di evoluzione adiabatica.

Da questa scrittura si ottiene subito una forma conveniente per  $K(s)$ ,

$$\begin{aligned} i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial s} P_j(s) \right) P_j(s) &= K(s)P_j(s) - P_j(s)K(s)P_j(s) \\ i\hbar \sum_j \left( \frac{\partial}{\partial s} P_j(s) \right) P_j(s) &= K(s) - \sum_j P_j(s)K(s)P_j(s) \end{aligned}$$

### 2.3. Trasformazioni di gauge

Gli operatori  $A$  e  $K$  sono evidentemente legati, e possiamo osservare quali trasformazioni di gauge ne lascino invariata la validità.

Se anche  $A_1(s, s_0)$  rispetta la definizione di evolutore adiabatico, per entrambi vale 2.2.2 e quindi:

$$\begin{aligned} P_j(s) &= A_1(s, s_0)P_j(s_0)A_1(s, s_0)^\dagger \\ &= A(s, s_0)P_j(s_0)A(s, s_0)^\dagger \end{aligned}$$

da cui discende direttamente, potendo uguagliare i due termini a destra:

$$\begin{aligned} A(s, s_0)P_j(s_0)A(s, s_0)^\dagger &= A_1(s, s_0)P_j(s_0)A_1(s, s_0)^\dagger \\ A_1(s, s_0)^\dagger A(s, s_0)P_j(s_0) &= P_j(s_0)A_1(s, s_0)^\dagger A(s, s_0) \end{aligned}$$

$$\left[ A_1(s, s_0)^\dagger A(s, s_0), P_j(s_0) \right] = 0$$

Allora il prodotto  $A_1(s, s_0)^\dagger A(s, s_0)$  è un operatore diagonalizzabile sulla base degli autostati a tempo  $s_0$ , e si ottiene quindi  $A_1(s, s_0)^\dagger A(s, s_0) = \sum_j \bar{c}_j(s)P_j(s_0)$ , con  $c_j(s) \in \mathbb{C}$  e  $\|c_j(s)\| = 1$  per le condizioni di unitarietà. Allora possiamo riscrivere  $c_j(s) = e^{i f_j(s)}$ , con  $f_j(s)$  funzioni reali.

$$A_1(s, s_0) = \sum_j e^{i f_j(s)} A(s, s_0)P_j(s_0)$$

Per delle funzioni  $f_j(s)$  generiche possiamo ottenere un operatore adiabatico equivalente a partire da un operatore noto e dai proiettori sugli autospazi dell'Hamiltoniana a un tempo fissato. L'operatore di Kato dovrà variare di conseguenza, rispettando

l'equazione di Schrödinger equivalente

$$\begin{aligned}
K_1(s) &= i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial s} A_1(s, s_0) \right) A_1(s, s_0)^\dagger = \\
&= i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \sum_j e^{i f_j(s)} A(s, s_0) P_j(s_0) \right) \right) \left( \sum_k e^{-i f_k(s)} P_k(s_0) A(s, s_0)^\dagger \right) = \\
&= \sum_j \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial s} e^{i f_j(s)} + e^{i f_j(s)} K(s) \right) e^{-i f_j(s)} A(s, s_0) P_j(s_0) A(s, s_0)^\dagger = \\
&= \sum_j \left( i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial s} e^{i f_j(s)} \right) e^{-i f_j(s)} + K(s) \right) P_j(s) \\
(2.3.1) \quad &= -\hbar \sum_j f'_j(s) P_j(s) + K(s)
\end{aligned}$$

Una trasformazione sull'operatore unitario induce direttamente una ridefinizione sull'operatore di Kato; allo stesso modo l'operatore di Kato mostra come, scelta una base di autostati in un qualsiasi tempo, è possibile ridefinire la diagonale sommando ad ogni termine una diversa generica funzione reale sommabile, e l'operatore unitario associato cambia conseguentemente.

Ma abbiamo scritto in precedenza:  $i\hbar \sum_j \left( \frac{\partial}{\partial s} P_j(s) \right) P_j(s) = K(s) - \sum_j P_j(s) K(s) P_j(s)$ , dove il secondo termine a destra è proprio la diagonale dell'operatore di Kato nella base di autostati al tempo  $s$  fissato, che può essere posta identicamente nulla per ogni tempo, con la condizione che i proiettori siano operatori a derivata definita, che è una proprietà che discende direttamente dalla definizione di Hamiltoniana adiabatica. Cioè possiamo imporre grazie a (2.3.1) che  $P_j(s) K(s) P_j(s) = 0$ .

Allora si ottiene una soluzione possibile particolarmente semplice per  $K(s)$ , che può comunque essere trasformata in seguito secondo le condizioni di gauge:

$$(2.3.2) \quad K(s) = i\hbar \sum_j \left( \frac{\partial}{\partial s} P_j(s) \right) P_j(s) = -i\hbar \sum_j P_j(s) \left( \frac{\partial}{\partial s} P_j(s) \right)$$

e la condizione necessaria  $i\hbar \frac{\partial}{\partial s} P_j(s) = [K(s), P_j(s)]$  è immediatamente verificata.

## 2.4. La rappresentazione ad assi rotanti

**2.4.1. La costruzione di una rappresentazione.** Prendiamo in considerazione due propagatori  $U(x, x_0) \equiv U(x)$  e  $U_1(x, x_1) \equiv U_1(x)$  di cui siano noti gli operatori hermitiani che compaiono nelle due equazioni di Schrödinger equivalenti

associate.

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial x}U(x) &= H_U(x)U(x) \\ i\frac{\partial}{\partial x}U_1(x) &= H_{U_1}(x)U_1(x) \end{aligned}$$

Innanzitutto ricordiamo che naturalmente il prodotto di due operatori unitari è unitario, così come è evidentemente unitario l'aggiunto di un operatore unitario.

Ci aspettiamo che al prodotto dei due operatori  $U(x)^\dagger U_1(x) \equiv U_1^{(U)}(x)$  nella nuova equazione di Schrödinger equivalente relativa allo stesso parametro  $x$ , sia associato un operatore hermitiano di cui sia possibile fornire caratterizzazioni:

$$\begin{aligned} (2.4.1) \quad i\frac{\partial}{\partial x} \left( U_1^{(U)}(x) \right) &= i\frac{\partial}{\partial x} \left( U(x)^\dagger U_1(x) \right) = \\ &= -U(x)^\dagger H_U(x)U_1(x) + U(x)^\dagger H_{U_1}(x)U_1(x) = \\ &= \left( -U(x)^\dagger H_U(x)U(x) + U(x)^\dagger H_{U_1}(x)U(x) \right) U(x)^\dagger U_1(x) = \\ &= U(x)^\dagger (H_{U_1}(x) - H_U(x)) U(x)U(x)^\dagger U_1(x) = \\ &= \left( H_{U_1}^{(U)}(x) - H_U^{(U)}(x) \right) U(x)^\dagger U_1(x) = \\ &= H_{U_1^{(U)}}(x)U_1^{(U)}(x) \end{aligned}$$

Allora chiamiamo l'operatore unitario  $U_1^{(U)}$  rappresentazione trasformata di  $U_1$  rispetto ad  $U$ , e l'operatore hermitiano  $U(x)^\dagger H_{U_1}(x)U(x) \equiv H_{U_1}^{(U)}(x)$  rappresentazione trasformata di  $H_{U_1}$  rispetto a  $U$ . Si osserva che il nuovo operatore hermitiano si ottiene mediante la differenza dei due operatori hermitiani in rappresentazione trasformata, ovvero la trasformazione della differenza.

Questa scrittura generalizza le possibilità di rappresentazione trasformata degli operatori mediante un operatore unitario che determini un'evoluzione caratterizzata da un operatore hermitiano noto (quello che compare nell'equazione di Schrödinger equivalente relativa allo stesso parametro). La *rappresentazione di interazione* è un caso particolare di questo formalismo, per cui il parametro è il tempo e l'operatore hermitiano noto è l'Hamiltoniana non perturbata, che determina un operatore di evoluzione che è diagonale nella base degli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata stessa per ogni coppia di tempi; l'Hamiltoniana imperturbata viene sottratta a quella perturbata per lasciare una equazione di Schrödinger equivalente che presenta la trasformazione della perturbazione.

Nel caso specifico dell'evoluzione temporale, l'operatore unitario è un propagatore

che è definito a due parametri: il tempo finale ed il tempo iniziale dell'evoluzione. Allora rappresentazione di interazione si applica a destra un ulteriore operatore  $U(x_0)$ , per cui restano definite le proprietà di composizione su più tempo, come mostrato in precedenza. Ma l'operatore a destra non è altro che una costante rispetto a  $x$  che preserva delle caratteristiche di simmetria della scrittura.

Generalizzando la scrittura delle rappresentazioni trasformate ad operatori a due parametri di definizione,  $U_1 = U_1(x, x_0)$ , mediante l'operatore unitario  $U(x)$  si definisce:

$$U_1^{(U)}(x, x_0) = U(x)^\dagger U_1(x, x_0) U(x_0)$$

Da questa definizione si ottengono le equazioni di Schrödinger equivalenti associate ai due parametri e la legge di composizione in rappresentazione trasformata:

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial x} U_1^{(U)}(x, x_0) &= U(x)^\dagger (H_{U_1}(x) - H_U(x)) U_1(x, x_0) U(x_0) = \\ &= \left( H_{U_1}^{(U)}(x) - H_U^{(U)}(x) \right) U_1^{(U)}(x, x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial x_0} U_1^{(U)}(x, x_0) &= U(x)^\dagger U_1(x, x_0) (H_U(x_0) - H_{U_1}(x_0)) U(x_0) = \\ &= -U_1^{(U)}(x, x_0) \left( H_{U_1}^{(U)}(x_0) - H_U^{(U)}(x_0) \right) \end{aligned}$$

$$(2.4.3) \quad \begin{aligned} U_1^{(U)}(x, x_1) U_1^{(U)}(x_1, x_0) &= U(x)^\dagger U_1(x, x_1) U(x_1) U(x_1)^\dagger U_1(x_1, x_0) U(x_0) = \\ &= U(x)^\dagger U_1(x, x_1) U_1(x_1, x_0) U(x_0) = \\ &= U(x)^\dagger U_1(x, x_0) U(x_0) = \\ &= U_1^{(U)}(x, x_0) \end{aligned}$$

Si ritrovano tutte le forme note dal caso della rappresentazione di interazione, e dalle proprietà che ci aspettiamo per gli operatori di evoluzione rispetto al parametro  $x$ . In questa ultima formulazione anche  $U(x)$  può naturalmente essere un oggetto a due indici:  $U(x) = U(x, x_1)$ , ma  $x_1$  è generalmente trascurato perché puramente arbitrario, ovvero può essere fissato a 0 o uguale al secondo parametro dell'operatore a cui viene applicato, a seconda della comodità.

### 2.4.2. Trasformazione adiabatica e rappresentazione ad assi rotanti.

Per quanto riguarda il caso adiabatico, dove valgono  $H(s) = \sum_j E_j(s) P_j(s)$  e  $K(s) =$

$i\hbar \sum_j \left( \frac{\partial}{\partial s} P_j(s) \right) P_j(s) = -i\hbar \sum_j P_j(s) \left( \frac{\partial}{\partial s} P_j(s) \right)$ , operatori hermitiani associati rispettivamente agli operatori unitari  $U(s, s_0)$ , di evoluzione temporale, e  $A(s, s_0)$  di evoluzione adiabatica, possiamo facilmente scrivere la trasformazione dell'Hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
 H^{(A)}(s; s_0) &= A(s, s_0)^\dagger H(s) A(s, s_0) = \\
 &= A(s, s_0)^\dagger \sum_j E_j(s) P_j(s) A(s, s_0) = \\
 (2.4.4) \qquad &= \sum_j E_j(s) P_j(s_0)
 \end{aligned}$$

Dove  $s_0$  è di natura interamente arbitraria. Naturalmente da  $A(s_0, s_0) = \mathbb{I}$  si ottiene  $H^{(A)}(s_0; s_0) = H(s_0)$ . Questo operatore è diagonale nella base degli autostati a tempo  $s_0$ ; la rappresentazione adiabatica è conveniente perché permette di prendere in considerazione una base fissa [9].

Si studia quindi l'evoluzione temporale del sistema in questa rappresentazione, definita *rappresentazione ad assi rotanti* [5], che definisce la nuova equazione di Schrödinger

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial s} U^{(A)}(s, s_0; \epsilon) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial s} \left( A(s, s_0)^\dagger U(s, s_0; \epsilon) \right) = \\
 &= -A(s, s_0)^\dagger K(s) U(s, s_0; \epsilon) + \frac{1}{\epsilon} A(s, s_0)^\dagger H(s) U(s, s_0; \epsilon) = \\
 (2.4.5) \qquad &= \left( \frac{1}{\epsilon} H^{(A)}(s; s_0) - K^{(A)}(s; s_0) \right) U^{(A)}(s, s_0; \epsilon)
 \end{aligned}$$

$$U^{(A)}(s, s; \epsilon) = A(s, s)^\dagger U(s, s; \epsilon) A(s, s) = \mathbb{I}$$

Nell'equazione 2.4.5 è evidente come il termine dominante risulterà, per piccoli valori di  $\epsilon$ , quello associato all'Hamiltoniana del sistema. In particolare, è da sottolineare come la soluzione dell'equazione differenziale senza l'operatore di Kato trasformato sarebbe banale e risulterebbe diagonale nella base a tempo  $s_0$  (avendo fissato il secondo parametro dell'operatore di evoluzione adiabatica  $A(s, s_0)$  uguale a quello dell'operatore di evoluzione temporale  $U(s, s_0; \epsilon)$ ), questo per via della forma dell'Hamiltoniana in rappresentazione ad assi rotanti  $H^{(A)}(s, s_0)$  in 2.4.4. Cerchiamo quindi, in forma esplicita, l'operatore unitario associato a quest'ultimo operatore hermitiano, imponendo la solita condizione al contorno che garantisce l'unitarietà:

$$i\hbar \epsilon \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s, s_0; \epsilon) = H^{(A)}(s; s_0) \Phi(s, s_0; \epsilon) = \sum_j E_j(s) P_j(s_0) \Phi(s, s_0; \epsilon)$$

$$\begin{aligned}\Phi(s_0, s_0; \epsilon) &= \mathbb{I} \\ \implies \Phi(s, s_0; \epsilon)^\dagger &= \Phi(s, s_0; \epsilon)^{-1}\end{aligned}$$

La soluzione si ottiene per semplice integrazione, e risulta

$$\Phi(s, s_0) = e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon} \sum_j \int_{s_0}^s E_j(s') ds' P_j(s_0)} = \sum_j e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon} \int_{s_0}^s E_j(s') ds'} P_j(s_0)$$

che possiamo riscrivere per compattezza, definendo le funzioni ad indice  $j$  che descrivono la fase:

$$\begin{aligned}\Phi(s, s_0; \epsilon) &= \sum_j e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon} \varphi_j(s, s_0)} P_j(s_0) \\ \varphi_j(s, s_0) &= \frac{1}{\hbar} \int_{s_0}^s E_j(s') ds'\end{aligned}$$

Per quanto detto in 2.4.4,  $\Phi(s, s_0; \epsilon)$  e l'Hamiltoniana in rappresentazione ad assi rotanti commutano ed è la base di autostati a tempo  $s_0$  quella in cui sono entrambi diagonali.

$\Phi(s, s_0; \epsilon)$  è un operatore che contiene l'informazione sulla fase, che ai limiti dell'asse dei tempi diverge indipendentemente da  $\epsilon$ .

Per quanto osservato in precedenza, ovvero che per una velocità di trasformazione dell'Hamiltoniana  $\epsilon$  piccola il termine  $H^{(A)}(s; s_0)$  deve essere prevalente, ci aspettiamo che, per piccoli valori di  $\epsilon$ ,  $\Phi(s, s_0; \epsilon)$  non sia molto diverso da  $U^{(A)}(s, s_0; \epsilon) = A(s, s_0)^\dagger U(s, s_0; \epsilon)$ . Esprimiamo analiticamente questa condizione ricordando che quelli da confrontare sono operatori di evoluzione unitari, e quindi esisterà un operatore unitario  $W(s, s_0; \epsilon) = \Phi(s, s_0; \epsilon)^\dagger A(s, s_0)^\dagger U(s, s_0; \epsilon)$  che ci aspettiamo essere circa l'identità, perlomeno nel limite di  $\epsilon$  piccolo.

L'equazione di Schrödinger equivalente rispettata da  $W(s, s_0; \epsilon)$  è

$$\begin{aligned}(2.4.6) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial s} W(s, s_0; \epsilon) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s, s_0; \epsilon)^\dagger A(s, s_0)^\dagger U(s, s_0; \epsilon) = \\ &= \Phi(s, s_0; \epsilon)^\dagger \left( -\frac{1}{\epsilon} H^{(A)}(s; s_0) + \frac{1}{\epsilon} H^{(A)}(s; s_0) - K^{(A)}(s; s_0) \right) \circ \\ &\quad \circ A(s, s_0)^\dagger U(s, s_0; \epsilon) = \\ &= -\Phi(s, s_0; \epsilon)^\dagger K^{(A)}(s; s_0) A(s, s_0)^\dagger U(s, s_0; \epsilon) = \\ &= -K^{(A\Phi)}(s; s_0, \epsilon) W(s, s_0; \epsilon)\end{aligned}$$

Da questa equazione in forma differenziale si osserva immediatamente che

$$(2.4.7) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial s} W(s, s_0; \epsilon) \right\| \leq \frac{1}{\hbar} \|K^{(A\Phi)}(s; s_0, \epsilon)\| \leq \frac{1}{\hbar} \|K^{(A)}(s; s_0)\| \leq \frac{1}{\hbar} \|K(s)\|$$

da cui si deduce che se  $K(s)$  è limitato per ogni tempo, lo è anche  $\frac{\partial}{\partial s} W(s, s_0; \epsilon)$ , dove però l'operatore di Kato non dipende esplicitamente né dal tempo iniziale  $s_0$  né soprattutto dalla velocità di trasformazione  $\epsilon$ , ma solo da  $s$  mediante la funzione di accensione.

Da 2.4.6 si ottiene mediante integrazione che:

$$(2.4.8) \quad W(s, s_0; \epsilon) = \mathbb{I} + \frac{i}{\hbar} \int_{s_0}^s K^{(A\Phi)}(s'; s_0, \epsilon) W(s', s_0; \epsilon) ds'$$

Dove si ha, secondo la formulazione adottata sino ad ora, che

$$\begin{aligned} K^{(A\Phi)}(s; s_0, \epsilon) &= \Phi(s, s_0; \epsilon)^\dagger K^{(A)}(s; s_0) \Phi(s, s_0; \epsilon) = \\ &= \sum_j \sum_k e^{\frac{i}{\epsilon} \varphi_j(s, s_0)} P_j(s_0) K^{(A)}(s; s_0) e^{-\frac{i}{\epsilon} \varphi_k(s, s_0)} P_k(s_0) = \\ &= \sum_{j \neq k} e^{\frac{i}{\epsilon} \varphi_j(s, s_0)} P_j(s_0) K^{(A)}(s; s_0) e^{-\frac{i}{\epsilon} \varphi_k(s, s_0)} P_k(s_0) = \\ &= \sum_{j \neq k} e^{\frac{i}{\epsilon} (\varphi_j(s, s_0) - \varphi_k(s, s_0))} K_{jk}^{(A)}(s; s_0) \end{aligned}$$

È facile verificare che per la proprietà espressa da 2.2.2 ed essendo  $\Phi(s, s_0; \epsilon)$  diagonale rispetto alla base a tempo  $s_0$ , risultano avere diagonale nulla tutti gli operatori  $K(s)$ ,  $K^{(A)}(s; s_0)$  e  $K^{(A\Phi)}(s; s_0, \epsilon)$  per qualsiasi tempo; questo dipende direttamente dall'imposizione in (2.3.1) secondo il gauge adoperato sull'operatore di Kato non trasformato.

Considerando l'equazione 2.4.8 in forma integrale, la condizione di quasi identità di  $W(s, s_0; \epsilon)$  si esprime nella necessità che sia verificato che

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(s, s_0; \epsilon) - \mathbb{I} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\hbar} \int_{s_0}^s K^{(A\Phi)}(s'; s_0, \epsilon) W(s', s_0, \epsilon) ds' = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\hbar} \sum_{j \neq k} \int_{s_0}^s e^{\frac{i}{\epsilon} (\varphi_j(s', s_0) - \varphi_k(s', s_0))} K_{jk}^{(A)}(s'; s_0) W(s', s_0; \epsilon) ds' = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il che implica, in norma

$$(2.4.9) \quad \left\| \int_{s_0}^s e^{\frac{i}{\epsilon}(\varphi_j(s',s_0) - \varphi_k(s',s_0))} K_{jk}^{(A)}(s'; s_0) W(s', s_0; \epsilon) ds' \right\| < \text{cost } \epsilon$$

per una qualche costante.

Questa condizione è verificata in quanto in un intervallo di tempo limitato  $K_{jk}^{(A)}(s; s_0)$  è limitato indipendentemente dal tempo e da  $\epsilon$ , e  $W(s', s_0; \epsilon)$ , che dipende da  $\epsilon$ , non può variare troppo velocemente, in quanto  $\frac{\partial}{\partial s} W(s, s_0; \epsilon)$  è limitato indipendentemente da  $\epsilon$ , il che discende direttamente da 2.4.7: si ha quindi che ad ogni tempo  $s'$  il termine integrando, considerando l'elemento di matrice su una qualsiasi coppia di autostati a tempo  $s_0$ , è un termine di fase  $e^{\frac{i}{\epsilon}(\varphi_j(s',s_0) - \varphi_k(s',s_0))}$  moltiplicato per un termine che è limitato indipendentemente da  $\epsilon$  dato da  $K_{jk}^{(A)}(s'; s_0) W(s', s_0; \epsilon)$ . Al diminuire della velocità di trasformazione la fase del primo termine diverge, ed in un intervallo infinitesimo di tempo è mediamente nullo. È possibile impiegare una successione di funzioni semplici (ovvero funzioni a gradini) per mostrare come la norma sia quindi maggiorabile con una funzione di  $\epsilon$  che sia al limite nulla indipendentemente dal tempo considerato.

Una dimostrazione in forma integrale di Messiah si trova in [5].

Le condizioni che vanno poste sono di non degenerazione degli stati, perché il termine di fase  $\varphi_j(s', s_0) - \varphi_k(s', s_0) \neq 0$  risulti non nullo tra due stati distinti, altrimenti non si avrebbe una modulazione al diminuire della velocità di trasformazione. Ma per un andamento sufficientemente buono dei proiettori e delle loro derivate, apportata dalla lipschitzianità e differenziabilità della funzione di accensione, si ha la consistenza della maggiorazione in 2.4.9, che si vuole valida indipendentemente dal tempo, anche nel caso di crossing accidentale.

Infine, si può generalizzare quanto osservato fino ad ora osservando che le conclusioni che abbiamo tratto possono essere effettuate anche prendendo in considerazione un solo autostato (ed evidentemente varranno solo per esso), senza dare informazioni sulla totalità dello spettro, purché sia garantita l'esistenza di un buon operatore di Kato per quello stato, ovvero che per il proiettore su quello stato e la sua evoluzione adiabatica rispetti la condizione necessaria 2.2.3. Allora tutte le proprietà descritte continuano ad essere valide per il singolo stato.

Questa possibilità è data dall'esistenza dell'oggetto  $P_j^\perp(s) \equiv \mathbb{I} - P_j(s)$ , il proiettore sul complemento ortogonale, che è garantita indipendentemente dalle particolarità del resto dello spettro, o dall'esistenza di una base numerabile per lo spazio  $\mathcal{H}$ .

Poter affermare questo costituisce una generalizzazione del Teorema Adiabatico ad

uno spettro continuo; inoltre, viene messo in luce un aspetto cruciale di questa trattazione, ovvero che è possibile prendere in considerazione il solo stato fondamentale di un'Hamiltoniana, ed avere che nel limite di velocità di trasformazione nulla, e nel caso in cui non si presenti un crossing, si può costruire una descrizione completa di come lo stato fondamentale trasformi nel tempo.

Enunciamo in maniera conclusiva il Teorema Adiabatico [1] asserendo che

**TEOREMA 4. - Teorema Adiabatico -** *per un'Hamiltoniana adiabatica che ammetta una decomposizione spettrale del tipo 2.2.1 per cui siano definiti gli operatori unitari  $A(s, s_0)$ ,  $\Phi(s, s_0; \epsilon)$  e  $U(s, s_0; \epsilon)$ , vale che*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(s, s_0; \epsilon) - \mathbb{I} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(s, s_0; \epsilon)^\dagger A(s, s_0)^\dagger U(s, s_0; \epsilon) - \mathbb{I} = 0$$

Che equivale ad affermare che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(s, s_0; \epsilon) \Phi(s, s_0; \epsilon)^\dagger = A(s, s_0)$$

ovvero, nota l'evoluzione adiabatica di un'autostato, vale per la sua evoluzione temporale che

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(s, s_0; \epsilon) \Phi(s, s_0; \epsilon)^\dagger |a(s_0)\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{\frac{i}{\epsilon} \varphi_a(s, s_0)} U(s, s_0; \epsilon) |a(s_0)\rangle = \\ (2.4.10) \qquad \qquad \qquad &= A(s, s_0) |a(s_0)\rangle \end{aligned}$$

Quindi, nel limite, l'evoluzione adiabatica differisce dall'evoluzione temporale per un fattore di fase complessivo che diverge, e il limite della sola azione dell'evoluzione temporale non è definito. Ma intuivamo che con una normalizzazione potrebbe comunque essere possibile ottenere informazioni sullo stato, ed in particolare  $A(s, s_0) |a(s_0)\rangle$  non è altro che, per la definizione dell'operatore di evoluzione adiabatica, un autostato a tempo  $s$ . La fondamentale asserzione del Teorema Adiabatico è quindi che nel limite di velocità di trasformazione dell'Hamiltoniana nulla un autostato evolve, secondo l'evoluzione temporale, in un autostato.

## Il Teorema di Gell-Mann e Low

Il Teorema Adiabatico suggerisce che sia possibile studiare una Hamiltoniana perturbata sfruttando il risultato 2.4.10, e quindi ottenere informazioni circa lo spettro perturbato.

Questa intuizione che ha portato Gell-Mann e Low a scrivere in appendice al loro articolo del 1951 “Bound States in Quantum Field Theory” [2] la formula che porta il loro nome, permette di scrivere un autostato dell’Hamiltoniana perturbata mediante l’uso di un solo autostato della Hamiltoniana non perturbata, attraverso un’evoluzione adiabatica costruita opportunamente.

Prendiamo in considerazione la funzione  $f(s) = e^{-|s|}$  per una Hamiltoniana che viene perturbata mediante  $gV$ . Essa si scrive nella forma

$$(3.0.11) \quad H(s; g) = H_0 + e^{-|s|}gV$$

Indichiamo, come è diffusa convenzione, con il termine  $g \in \mathbb{R}$  il fattore di ordine di grandezza della perturbazione. È ricorrente l’impiego di questo termine nel formalismo dello sviluppo in serie dell’azione di una perturbazione come somma di termini di ordini successivi di  $g^n$ , con norma di  $V$  paragonabile a quella di  $H_0$ , e  $0 < g < 1$ . Ammettiamo che  $H_0$  e  $V$  rispettino le richieste del Teorema Adiabatico, osserviamo che la funzione  $e^{-|s|}$  è una buona funzione di accensione separando nell’origine in due semirette l’asse reale dei tempi riscaldati.

Abbiamo quindi costruito una buona trasformazione arbitraria che definisce un’Hamiltoniana adiabatica, e che da un’Hamiltoniana imperturbata nota a tempo  $s = -\infty$  porta a tempo  $s = 0$  ad una sua perturbazione di interesse, di ordine di grandezza fissata; ed abbiamo costruito una nuova trasformazione adiabatica che vi si attacca bene che riporta, a tempo  $s = \infty$ , il sistema alla situazione imperturbata iniziale. Per la dipendenza temporale introdotta, abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} H(s; g) &= H(s; 0) = H_0 \\ H(0; g) &= H_0 + gV = H \end{aligned}$$

### 3.1. Evoluzione rispetto al fattore di ordine di grandezza

Ci chiediamo come trasformi il sistema sotto una variazione di fattore di ordine di grandezza. Evidentemente vi saranno dei parallelismi con l'evoluzione temporale, in quanto la costruzione della funzione di accensione qui è prettamente arbitraria, e rinominando  $g = e^\sigma$  ( $\sigma < 0$ ) si ottiene una funzione della stessa forma [4]. Considerando l'operatore di evoluzione temporale, che quindi risolve il problema di Cauchy

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} i\hbar\epsilon \frac{\partial}{\partial s} U(s, s_0; \epsilon, e^\sigma) = H(s; e^\sigma)U(s, s_0; \epsilon, e^\sigma) \\ U(s_0, s_0; \epsilon, e^\sigma) = \mathbb{I} \end{cases}$$

Dove si considera  $\tilde{H}(s; \sigma) = H(s; e^\sigma) = H_0 + e^{-|s|+\sigma}V$ . Se prendiamo in considerazione valori temporali  $s < 0$  riscriviamo  $\tilde{H}(s; \sigma) = H(s; e^\sigma) = H_0 + e^{s+\sigma}V$ , e quindi si ha evidentemente

$$(3.1.2) \quad \tilde{H}(s; \sigma) = \tilde{H}(s + \delta x; \sigma - \delta x)$$

in quanto si ha una simmetria dell'Hamiltoniana, ovvero del significato di  $s$  e  $\sigma$  in questa rappresentazione.

Cerchiamo di dedurre delle informazioni sull'operatore unitario associato all'evoluzione, allora studiamo il problema secondo dei principi variazionali (si impone  $\tilde{U}(s, s_0; \sigma) = U(s, s_0; \epsilon, e^\sigma)$ , dove il parametro di velocità di trasformazione  $\epsilon$  non è al momento particolarmente significativo); dal problema di Cauchy 3.1.1 si ottiene:

$$(3.1.3) \quad \begin{cases} i\hbar\epsilon \left( \tilde{U}(s + \delta s, s_0; \sigma) - \tilde{U}(s, s_0; \sigma) \right) = \tilde{H}(s; \sigma)\tilde{U}(s, s_0; \sigma)\delta s \\ \tilde{U}(s_0, s_0; \sigma) = \mathbb{I} \end{cases}$$

Dove imporre  $s_0 = 0$  può essere comodo per dare significato al fatto che ci interessa studiare la semiretta negativa dei tempi riscaldati. Ma va osservato che la condizione al contorno deve essere vera per un tempo  $s_0$  generico, e lo sarà quindi per tutti i tempi. L'equazione per l'aggiunto dell'operatore di evoluzione con la legge di composizione delle evoluzioni lo garantisce.

Allora introducendo la trasformazione data da 3.1.2 si osserva immediatamente che

$$(3.1.4) \quad \begin{cases} i\hbar\epsilon \left( \tilde{U}(s + \delta s + \delta x, s_0 + \delta x; \sigma - \delta x) - \tilde{U}(s + \delta x, s_0 + \delta x; \sigma - \delta x) \right) = \\ = \tilde{H}(s + \delta x; \sigma - \delta x) \tilde{U}(s + \delta x, s_0 + \delta x; \sigma - \delta x) \delta s = \\ = \tilde{H}(s; \sigma) \tilde{U}(s + \delta x, s_0 + \delta x; \sigma - \delta x) \delta s \\ \tilde{U}(s_0 + \delta x, s_0 + \delta x; \sigma - \delta x) = \mathbb{I} \end{cases}$$

Basta confrontare i due problemi 3.1.3 e 3.1.4 per riconoscere che

$$\tilde{U}(s + \delta x, s_0 + \delta x; \sigma - \delta x) = \tilde{U}(s, s_0; \sigma)$$

Ma allora (ricordando che stiamo lavorando tra tempi negativi) si ha

$$\begin{aligned} & \tilde{U}(s + \delta x, s_0 + \delta x; \sigma - \delta x) - \tilde{U}(s, s_0; \sigma) = \\ & = \delta x \left( \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s_0} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \tilde{U}(s, s_0; \sigma) = \\ & = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} & i\hbar\epsilon \frac{\partial}{\partial \sigma} \tilde{U}(s, s_0; \sigma) = \\ & = i\hbar\epsilon \left( \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s_0} \right) \tilde{U}(s, s_0; \sigma) = \\ & = \tilde{H}(s; \sigma) \tilde{U}(s, s_0; \sigma) - \tilde{U}(s, s_0; \sigma) \tilde{H}(s_0; \sigma) \end{aligned}$$

La trattazione relativa a tempi positiva è analoga, e dà un risultato simmetrico a questo (la simmetria non sarà più nella conservazione del termine  $s + \sigma$ , ma del termine  $-s + \sigma$ , essendo cambiata di definizione, nell'origine, la funzione di accensione). Si ottiene, in definitiva,

$$\begin{cases} i\hbar\epsilon \frac{\partial}{\partial \sigma} \tilde{U}(s, s_0; \sigma) = \tilde{H}(s; \sigma) \tilde{U}(s, s_0; \sigma) - \tilde{U}(s, s_0; \sigma) \tilde{H}(s_0; \sigma) & s_0 < s < 0 \\ i\hbar\epsilon \frac{\partial}{\partial \sigma} \tilde{U}(s, s_0; \sigma) = -\tilde{H}(s; \sigma) \tilde{U}(s, s_0; \sigma) + \tilde{U}(s, s_0; \sigma) \tilde{H}(s_0; \sigma) & s > s_0 > 0 \end{cases}$$

Dove è un banale problema di composizione il caso di due tempi ai lati dell'origine, o l'inversione dell'ordine tra  $s$  e  $s_0$ .

Ricordando che il tempo virtuale  $\sigma$  è stato inserito mediante la trasformazione  $g = e^\sigma$ , riscriviamo la derivata parziale come  $\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{\partial g}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial g} = g \frac{\partial}{\partial g}$ ; per cui, rispetto al fattore

d'ordine di grandezza si ottiene [4, 3, 11]:

TEOREMA 5. Sia  $H(s; g) = H_0 + e^{-|s|}gV$ ,  $U(s, s_0; \epsilon, g)$ : sia soluzione del problema 3.1.1 con  $g = e^\sigma$ ,

$$(3.1.5) \quad \Rightarrow \begin{cases} i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} U(s, s_0; \epsilon, g) = H(s; g)U(s, s_0; \epsilon, g) - U(s, s_0; \epsilon, g)H(s_0; g) & s < s_0 < 0 \\ i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} U(s, s_0; \epsilon, g) = -H(s; g)U(s, s_0; \epsilon, g) + U(s, s_0; \epsilon, g)H(s_0; g) & s > s_0 > 0 \end{cases}$$

Questa forma è lo strumento con cui dimostrare il Teorema di Gell-Mann e Low; per arrivare a questa scrittura è stato necessario l'impiego di una funzione di accensione che abbia le regole di composizione dell'esponenziale ( $e^x e^y = e^{x+y}$ ), che è stata fondamentale per riconoscere una simmetria del sistema, e che sia simmetrica rispetto all'origine. Generalizzazioni del teorema ad altre funzioni di accensione devono tener conto di questa peculiarità che ha portato alla scrittura 3.1.5.

### 3.2. Il Teorema di Gell-Mann e Low

Prendiamo in considerazione i tempi negativi dell'evoluzione data da 3.0.11 secondo l'equazione di Schrödinger. Come dimostrato, vale da 3.1.5 che

$$H(0; g)U(0, s_0; \epsilon, g) - U(0, s_0; \epsilon, g)H(s_0; g) \pm i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} U(0, s_0; \epsilon, g) = 0 \quad \pm s_0 > 0$$

Dove si intende, senza contraddizioni, che  $U(0, s) = U(s, 0)^\dagger$  e  $U(s_2, s_1)U(s_1, s_0) = U(s_2, s_0)$ . Supponiamo di conoscere un'autostato dell'Hamiltoniana imperturbata,  $|a\rangle$ :  $H_0|a\rangle = E_0|a\rangle$ . Ricordiamo inoltre che abbiamo scelto l'evoluzione adiabatica in modo che  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} H(s; g) = H_0$  e  $H(0; g) = H_0 + gV$ , che è proprio l'Hamiltoniana perturbata che ci interessa studiare, che viene lentamente accesa fino al suo valore assunto a tempo  $s = 0$ .

Sopprimiamo ora i termini  $g$  e  $\epsilon$  negli argomenti per snellire la notazione, e fissiamo  $H(0; g) = H$ ; verranno impiegati in forma esplicita quando sarà necessario.

Deve essere allora

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned} 0 &= \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \left( HU(0, s_0) - U(0, s_0)H(s_0) \pm i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} U(0, s_0) \right) |a\rangle = \\ &= \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \left( HU(0, s_0) - U(0, s_0)H_0 \pm i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} U(0, s_0) \right) |a\rangle = \\ &= \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \left( HU(0, s_0) - E_0U(0, s_0) \pm i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} U(0, s_0) \right) |a\rangle = \\ &= \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \left( H - E_0 \pm i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} \right) U(0, s_0) |a\rangle \end{aligned}$$

Per quanto osservato nel Teorema Adiabatico, confrontando quindi con 2.4.10, non ci aspettiamo che questo limite sia ben definito, in quanto considerando un insieme illimitato dei tempi, il termine in fase che deriverà da  $\lim_{s_0 \rightarrow -\infty} U(0, s_0)$  sarà divergente. Ma il fatto che 3.2.1 presenti il termine finito e noto  $E_0$  ci suggerisce di trasformare la scrittura, per applicare alla fine una sostituzione.

$$\begin{aligned}
E_0 &= \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{\langle a | \left( H \pm i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} \right) U(0, s_0) | a \rangle}{\langle a | U(s, s_0) | a \rangle} \\
&= \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{\langle a | HU(0, s_0) | a \rangle \pm i\hbar\epsilon g \langle a | \frac{\partial}{\partial g} U(0, s_0) | a \rangle}{\langle a | U(0, s_0) | a \rangle} = \\
&= \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{\langle a | HU(0, s_0) | a \rangle}{\langle a | U(0, s_0) | a \rangle} \pm \frac{i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} \langle a | U(0, s_0) | a \rangle}{\langle a | U(0, s_0) | a \rangle}
\end{aligned}$$

Che riscriviamo in maniera più compatta rendendo implicito che i valori medi sono effettuati sullo stato  $|a\rangle$  noto, intendendo quindi il risultato appena raggiunto

$$(3.2.2) \quad \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{\langle HU(0, s_0) \rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} \pm \frac{i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} \langle U(0, s_0) \rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} = E_0$$

Prima di applicare la sostituzione, operiamo una trasformazione sul termine in derivata rispetto al fattore d'ordine di grandezza, avendo visto come un termine analogo appaia nell'ultima equazione 3.2.2:

$$\begin{aligned}
i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} U(0, s_0) | a \rangle &= i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} \left( \langle U(0, s_0) \rangle \frac{U(0, s_0) | a \rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} \right) = \\
&= i\hbar\epsilon g \langle U(0, s_0) \rangle \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{U(0, s_0) | a \rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} \right) + i\hbar\epsilon g \left( \frac{\partial}{\partial g} \langle U(0, s_0) \rangle \right) \frac{U(0, s_0) | a \rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} = \\
(3.2.3) \quad &= i\hbar\epsilon g \left( \left( \frac{\partial}{\partial g} \langle U(0, s_0) \rangle \right) + \langle U(0, s_0) \rangle \frac{\partial}{\partial g} \right) \frac{U(0, s_0) | a \rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle}
\end{aligned}$$

Questa trasformazione è suggerita dal risultato 3.2.2, e il fatto che sia conveniente studiare l'evoluzione dell'autostato normalizzato rispetto al valor medio di  $U$  su  $|a\rangle$  risulterà poi più chiaro.

Allora applichiamo la sostituzione in 3.2.1 delle ultime due equazioni ottenute 3.2.2 e 3.2.3:

$$\begin{aligned}
& \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} HU(0, s_0)|a\rangle - \left( \frac{\langle HU(0, s_0) \rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} \pm \frac{i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} \langle U(0, s_0) \rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} \right) U(0, s_0)|a\rangle + \\
& \quad \pm i\hbar\epsilon g \left( \left( \frac{\partial}{\partial g} \langle U(0, s_0) \rangle \right) + \langle U(0, s_0) \rangle \frac{\partial}{\partial g} \right) \frac{U(0, s_0)|a\rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} = \\
& = \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \left( \langle U(0, s_0) \rangle H - \langle HU(0, s_0) \rangle \pm i\hbar\epsilon g \langle U(0, s_0) \rangle \frac{\partial}{\partial g} \right) \frac{U(0, s_0)|a\rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} = 0
\end{aligned}$$

Potendo garantire che  $\inf_{s_0 \in \mathbb{R}} \|\langle U(0, s_0) \rangle\| > 0$ , ovvero che l'elemento diagonale dell'operatore di evoluzione temporale non sia mai nullo, e quindi un autospazio non sia interamente ruotato in un altro ortogonale, possiamo eliminare questo fattore moltiplicativo; imponiamo questa condizione ed otteniamo che

$$(3.2.4) \quad \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \left( H - \frac{\langle HU(0, s_0) \rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} \pm i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} \right) \frac{U(0, s_0)|a\rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} = 0$$

Un aspetto fondamentale di questa scrittura è che i termini  $U(0, s_0)|a\rangle$  e  $\langle a|U(0, s_0)|a\rangle$  non esistono separatamente, a meno che non sia valido contemporaneamente che siano fissati  $\epsilon > 0$  e  $s_0 \in \mathbb{R}$ , che non è il caso di nostro interesse; i due limiti che vogliamo porre contrastano proprio con queste due necessità. Il denominatore nello stato serve esattamente a cancellare la problematica della fase data da  $e^{i\frac{1}{\epsilon} \dots}$  dell'evoluzione. La *normalizzazione* dello stato ci permette di considerare solo i rapporti con il termine diagonale di  $U$  associato all'autostato applicato  $|a\rangle$ .

Possiamo quindi affermare il Teorema di Gell-Mann e Low [2, 4, 8]:

**TEOREMA 6. - Teorema di Gell-Mann e Low** - Sia  $H(s)$  una Hamiltoniana che verifica il Teorema 5. Se esiste  $|\psi_a\rangle = |\psi_a^\pm\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{U(0, s_0)|a\rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle}$

$$\begin{aligned}
\implies \exists E = E^\pm &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{\langle HU(0, s_0) \rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} \\
H|\psi_a\rangle &= E|\psi_a\rangle
\end{aligned}$$

Ovvero  $|\psi_a\rangle$  è un autostato dell'Hamiltoniana a tempo 0.

Resterebbe da dimostrare che si ha necessariamente  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} \frac{U(0, s_0)|a\rangle}{\langle U(0, s_0) \rangle} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} |\psi_a^\pm\rangle = 0$ .

Si è però assunto che sia strettamente positivo  $\inf_{s_0 \in \mathbb{R}} \|\langle U(0, s_0) \rangle\| > 0$ , deve necessariamente risultare che  $\langle \psi_a(s_0) | \psi_a(s_0) \rangle$  sia limitato per ogni ordine della perturbazione, cioè per ogni valore di  $g$ , e una derivata rispetto a  $g$  non cambia questa proprietà. Possiamo quindi affermare che la limitatezza della norma dello stato è valida per ogni  $g$  ed avrà rispetto al fattore d'ordine di grandezza un andamento regolare che continua a garantire l'esistenza limitata in norma di  $g \frac{\partial}{\partial g} |\psi_a(s_0)\rangle$  anche nel limite  $s_0 \rightarrow \pm\infty$ .

Infine moltiplicare per il termine  $\epsilon$  arbitrariamente piccolo, permette di far svanire il termine portato dalla derivata  $\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} |\psi_a^\pm\rangle$ . Questa però è possibile per le particolari condizioni che lo stato normalizzato verifica, non sarebbe in generale sempre vero; la normalizzazione permette di eliminare i termini in fase, che dalla derivata avrebbero apportato il contributo  $i\frac{1}{\epsilon}$ .

Abbiamo deciso arbitrariamente di studiare contemporaneamente le due semirette positiva e negativa, centrando nell'origine dei tempi il tempo d'arrivo dell'evoluzione. Avremmo potuto trattare separatamente le due semirette positiva e negativa dell'asse, ed ottenere che fissato un qualsiasi tempo  $s$ , si può ottenere un autostato di  $H(s)$  analogamente, avendo appena discusso il fatto che  $g \frac{\partial}{\partial g} |\psi_a(s_0)\rangle$  svanisce sempre.

Ciò che resta da dimostrare è che prendere in considerazione tempi positivi o tempi negativi dà lo stesso risultato

$$|\psi_a\rangle = |\psi_a^+\rangle = |\psi_a^-\rangle$$

che è un risultato atteso, in quanto l'Hamiltoniana passa dallo stato imperturbato a quello perturbato per ritornare nella condizione iniziale, che allora ha necessariamente gli stessi autostati, secondo una trasformazione che è simmetrica rispetto all'asse dei tempi. L'adiabaticità inoltre garantisce, in presenza di una perturbazione piccola, che lo stato torni esattamente in se stesso, con una differenza che può, al più, essere in fase: se si considera infatti lo stato

$$|\psi_a^\pm(|s|\rangle) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s_0 \rightarrow \infty} \frac{|U(\pm|s|, \pm s_0)|a\rangle}{\langle a|U(\pm|s|, \pm s_0)|a\rangle}$$

esso risulta essere un autostato di  $H(|s|) = H(-|s|)$ , per le stesse considerazioni operate in precedenza,

$$\implies H(s)|\psi_a^\pm(|s|\rangle) = H(-s)|\psi_a^\pm(|s|\rangle) = E^\pm(s)|\psi_a^\pm(|s|\rangle)$$

Ma essendo  $H(s) = H(-s)$ , ed essendo la trasformazione adiabatica, priva di degenerazioni, i due autostati ottenuti per i due tempi  $\pm s$  a partire dallo stesso stato  $|a\rangle$  appartengono allo stesso autospazio:

$$\implies E^+(s) = E^-(s)$$

Ma osserviamo che proprio grazie alla rinormalizzazione, che esclude le problematiche della fase

$$\begin{aligned} \langle a|\psi_a^\pm(|s|\rangle) \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s_0 \rightarrow \infty} \frac{\langle a|U(\pm|s|, \pm s_0)|a\rangle}{\langle a|U(\pm|s|, \pm s_0)|a\rangle} = 1 \\ \implies |\psi_a^+(|s|\rangle) \rangle &= |\psi_a^-(|s|\rangle) \rangle \quad \forall s \end{aligned}$$

Allora necessariamente si ottiene

$$\implies |\psi_a\rangle = |\psi_a^\pm(0)\rangle = |\psi_a^\pm\rangle$$

si ottiene quindi che, quando la trasformazione ha completato la costruzione della perturbazione a tempo  $s = 0$ , non importa da che verso vi si sia arrivati, ma l'autostato dell'Hamiltoniana perturbata che si ottiene è il medesimo, se esiste.

### 3.3. Teorema di Gell-Mann e Low e Teorema Adiabatico

Le condizioni di regolarità che permettono i risultati del Teorema di Gell-Mann e Low sono soddisfatte grazie alla trasformazione adiabatica che si è inserita arbitrariamente per passare dal sistema imperturbato a quello perturbato; operando un confronto tra gli strumenti impiegati nella rappresentazione di evoluzione adiabatica ci proponiamo di operare un confronto tra gli oggetti operatoriali che compaiono.

Innanzitutto ricordiamo che  $U(s, s_0) = A(s, s_0)\Phi(s, s_0; \epsilon)W(s, s_0; \epsilon)$ , dove  $W(s, s_0; \epsilon)$  è un operatore unitario per cui vale che  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} W(s, s_0; \epsilon) = \mathbb{I}$ ,  $A(s, s_0)$  è l'operatore unitario di evoluzione adiabatica che trasporta ogni autostato dell'Hamiltoniana a tempo  $s_0$  in un autostato dell'Hamiltoniana a tempo  $s$ , e  $\Phi(s, s_0; \epsilon) = \sum_j e^{-\frac{i}{\epsilon\hbar} \int_{s_0}^s E_j(s') ds'} P_j(s_0)$  è l'operatore che introduce i fattori di fase dell'evoluzione adiabatica, diagonale nella base di autostati dell'Hamiltoniana a tempo  $s_0$ . Questi operatori, nel caso della trasformazione  $f(s) = e^{-|s|}$ , avranno una definizione per casi che sarà differente alla destra o alla sinistra dell'origine, ma sulle due semirette in cui l'asse reale viene a dividersi avranno le stesse proprietà di regolarità descritte nella discussione del teorema adiabatico, e si attaccano bene nell'origine, essendo

definito in maniera unica il sistema per  $s = 0$ .

Prendiamo in considerazione l'autostato dell'Hamiltoniana perturbata che si ottiene con per il Teorema di Gell-Mann e Low, e sostituiamo in esso la definizione degli operatori noti dalla descrizione in rappresentazione ad assi rotanti:

$$\begin{aligned} |\psi_a\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{U(0, s_0)|a\rangle}{\langle U(0, s_0)\rangle} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{A(0, s_0)\Phi(0, s_0; \epsilon)W(0, s_0; \epsilon)|a\rangle}{\langle a|A(0, s_0)\Phi(0, s_0; \epsilon)W(0, s_0; \epsilon)|a\rangle} \end{aligned}$$

Non sappiamo caratterizzare l'applicazione di  $W(s, s_0; \epsilon)|a\rangle$ , ma è noto il risultato al limite della velocità di trasformazione:

$$\begin{aligned} |\psi_a\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{A(0, s_0)\Phi(0, s_0; \epsilon)W(0, s_0; \epsilon)|a\rangle}{\langle a|A(0, s_0)\Phi(0, s_0; \epsilon)W(0, s_0; \epsilon)|a\rangle} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{A(0, s_0)\Phi(0, s_0; \epsilon)|a\rangle}{\langle a|A(0, s_0)\Phi(0, s_0; \epsilon)|a\rangle} = \end{aligned}$$

L'applicazione dell'operatore dei fattori di fase è però noto, e  $\lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \Phi(0, s_0; \epsilon)|a\rangle = \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{s_0}^0 E_a(s') ds'} |a\rangle$ . Allora l'aver operato la normalizzazione dello stato significa qui semplificare a numeratore e denominatore il termine di fase  $e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{s_0}^0 E_a(s') ds'}$ . Tutta la dipendenza dalla velocità di trasformazione è stata quindi eliminata, e possiamo scrivere

$$(3.3.1) \quad |\psi_a\rangle = \lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{A(0, s_0)|a\rangle}{\langle a|A(0, s_0)|a\rangle}$$

Che è per definizione di  $A(0, s_0)$  un autostato di  $H(0)$  [3, 11].

In questi passaggi abbiamo dovuto considerare invertibili in ordine i limiti rispetto ad  $s_0$  e  $\epsilon$  per quanto riguarda l'operatore  $W(s, s_0; \epsilon)$ , ovvero abbiamo considerato verificato che esso tenda a  $\mathbb{I}$  indipendentemente dai tempi considerati, e quindi dove essere vero anche per il limite  $s_0 \rightarrow \pm\infty$  che in norma  $\|W(s, s_0; \epsilon) - 1\| < cost \epsilon$ . Questa operazione è possibile proprio imponendo *cost* esistente ed indipendente dai tempi presi in considerazione.

### 3.4. Teorema di Gell-Mann e Low e leggi di evoluzione

Considerando l'identità 3.2.1 che porta direttamente al Teorema di Gell-Mann e Low osserviamo che possiamo giungere allo stesso risultato prendendo delle libertà

rispetto alla rappresentazione che vogliamo adoperare per la descrizione dell'evoluzione, come descritto in 2.4.2 e 2.4.3.

Prendiamo in considerazione la trasformazione apportata da un generico operatore unitario  $U_1(s) : U_1(0) = \mathbb{I}$  all'oggetto a due tempi  $U(s, s_0; \epsilon, g)$ . Otteniamo

$$\begin{aligned} U^{(U_1)}(s, s_0) &= U_1(s)^\dagger U(s, s_0) U_1(s_0) \\ H^{(U_1)}(s) &= U_1(s)^\dagger H(s; g) U_1(s) \end{aligned}$$

che invertiamo, per sostituirle nella formula di Gell-Mann e Low:

$$\begin{aligned} U(s, s_0) &= U_1(s) U^{(U_1)}(s, s_0) U_1(s_0)^\dagger \\ H(s) &= U_1(s) H^{(U_1)}(s) U_1^\dagger(s) \end{aligned}$$

Allora, prendendo  $s$  e  $s_0$  giacenti sulla retta dei tempi riscaldati dalla stessa parte rispetto all'origine, in maniera opportuna:

$$\begin{aligned} 0 &= H(s)U(s, s_0) - U(s, s_0)H(s_0) \pm i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} U(s, s_0) = \\ &= U_1(s)H^{(U_1)}(s)U^{(U_1)}(s, s_0)U_1(s_0)^\dagger - U_1(s)U^{(U_1)}(s, s_0)H^{(U_1)}(s_0)U_1(s_0)^\dagger \\ &\quad \pm i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} U_1(s)U^{(U_1)}(s, s_0)U_1(s_0)^\dagger \end{aligned}$$

E quindi, a patto che  $\frac{\partial}{\partial g} U_1 = 0$ , cosa che è generalmente verificata, a meno che non fosse proprio necessario inserire il fattore d'ordine di grandezza nella trasformazione di rappresentazione, dopo aver applicato a destra e a sinistra rispettivamente  $U_1(s_0)$  e  $U_1(s)^\dagger$ , si ottiene che

$$H^{(U_1)}(s)U^{(U_1)}(s, s_0) - U^{(U_1)}(s, s_0)H^{(U_1)}(s_0) \pm i\hbar\epsilon g \frac{\partial}{\partial g} U^{(U_1)}(s, s_0) = 0$$

Possiamo quindi concludere che, per una qualsiasi trasformazione di rappresentazione  $U_1(s)$  che non dipenda da  $g$  o non apporti in derivata un termine non trascurabile, continua a valere il teorema di Gell-Mann e Low sostituendo all'Hamiltoniana  $H(s)$  l'operatore hermitiano  $H^{(U_1)}(s)$  e all'operatore di evoluzione temporale  $U(s, s_0)$  l'operatore unitario  $U^{(U_1)}(s, s_0)$ .

Di nostro interesse però saranno le trasformazioni che verificano la condizione  $H^{(U_1)}(0) = H(0)$ ; la dimostrazione del Teorema 6 permette di arrivare alla costruzione di un autostato dell'operatore hermitiano che compare nella forma 3.2.4; a noi interesserà quindi una trasformazione  $U_1(s)$  tale che  $U_1(0) = \mathbb{I}$ , così da trovare effettivamente un autostato dell'Hamiltoniana perturbata.

Generalmente il Teorema di Gell-Mann e Low si trova esposto nella forma della rappresentazione di interazione, dove  $U_1(s) = e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon}H_0s}$ , che rispetta la condizione appena posta.

### 3.5. Accenni alla teoria dei campi

La formula di Gell-Mann e Low rende possibile la transizione di correlatori rior-  
dinati temporalmente dalla rappresentazione di Heisenberg a quella di interazione,  
introducendo l'operatore di evoluzione temporale di interazione sfruttando l'idea del-  
l'accensione adiabatica.

Prendiamo quindi in considerazione una Hamiltoniana  $H = H_0 + V$  perturbazione di  
 $H_0$  nota, con  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ , che non abbia una dipendenza esplicita dal tempo per  
l'intervallo di tempi che prendiamo in considerazione. Definiamo gli oggetti mediante  
i quali studiare il comportamento di evoluzione:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_0(t, t_0) &= H_0U_0(t, t_0) & U_0(t_0, t_0) &= \mathbb{I} \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_H(t, t_0) &= HU_H(t, t_0) = (H_0 + V)U_H(t, t_0) & U_H(t_0, t_0) &= \mathbb{I} \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0; \epsilon) &= \left(H_0 + e^{-|\epsilon t|}V\right)U(t, t_0; \epsilon) & U(t_0, t_0; \epsilon) &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

L'ultimo operatore così definito è lo stesso operatore di evoluzione temporale usato  
nella dimostrazione del teorema di Gell-Mann e Low, ma senza usare ora i tempi  
riscalati.

Possiamo considerare la rappresentazione di interazione di questi operatori, associan-  
do al tempo parametrico in  $U_0$  l'origine dell'asse dei tempi, per le considerazioni fatte  
in conclusione alla sezione 3.4:

$$\begin{aligned} U_{HI}(t, t_0) &= U_0(0, t)U_H(t, t_0)U_0(t_0, 0) & U_{HI}(t_0, t_0) &= \mathbb{I} \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_{HI}(t, t_0) &= U_0(0, t)(-H_0 + H_0 + V)U_H(t, t_0)U_0(t_0, 0) = \\ &= V_I(t)U_{HI}(t, t_0) \\ U_I(t, t_0; \epsilon) &= U_0(0, t)U(t, t_0; \epsilon)U_0(t_0, 0) & U_I(t_0, t_0; \epsilon) &= \mathbb{I} \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_I(t, t_0; \epsilon) &= U_0(0, t)\left(-H_0 + H_0 + e^{-|\epsilon t|}V\right)U(t, t_0)U_0(t_0, 0) = \\ (3.5.1) \quad &= e^{-|\epsilon t|}V_I(t)U_I(t, t_0; \epsilon) \end{aligned}$$

Dove osserviamo che, fissando il tempo  $t$ , varranno i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} U_I(t, 0; \epsilon) &= U_{HI}(t, 0) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} U(t, 0; \epsilon) &= U_H(t, 0) \end{aligned}$$

Questo perché, comunque si fissi il tempo  $t$ , per  $\epsilon$  sufficientemente piccolo, l'Hamiltoniana dipendente dal tempo  $H_0 + e^{-|\epsilon t|}V$  sarà al limite indistinguibile da  $H$  in un intervallo dei tempi limitato.

Sfruttando il Teorema di Gell-Mann e Low possiamo inoltre riscrivere l'autostato  $|\psi\rangle$  mediante  $|a\rangle$ , autostato di  $H_0$ , che attraverso l'operatore di evoluzione dà

$$\begin{aligned} \frac{|\psi\rangle}{\langle a|\psi\rangle} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{U(0, \pm\infty; \epsilon)|a\rangle}{\langle a|U(0, \pm\infty; \epsilon)|a\rangle} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{t_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{\mathbb{I}U(0, t_0; \epsilon)U_0(t_0, 0)|a\rangle}{\langle a|\mathbb{I}U(0, t_0; \epsilon)U_0(t_0, 0)|a\rangle} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{U_I(0, \pm\infty; \epsilon)|a\rangle}{\langle a|U_I(0, \pm\infty; \epsilon)|a\rangle} \end{aligned}$$

Possiamo infatti considerare l'evoluzione temporale introducendo o meno la rappresentazione di interazione data da  $H_0$  ed ottenere lo stesso risultato valido. Scegliamo di considerare l'evoluzione temporale in rappresentazione di interazione per le caratteristiche garantite, nel limite a grandi tempi, dall'equazione di Schrödinger equivalente associata a tale operatore, ovvero che sia ammesso un limite per tempi infiniti invece di un comportamento oscillante

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0; \epsilon) = 0$$

Andiamo a considerare il valore di un'osservabile sullo stato  $|\psi\rangle$ , imponendo che l'evoluzione temporale sia data dall'operatore  $U_H(t, 0)$ . Possiamo fare questa assunzione in quanto essa è consistente con l'ipotesi che  $t$  appartenga ad un intorno dell'origine, tale che l'Hamiltoniana possa assumersi  $H$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{\langle \psi | O_H(t) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \\
& = \frac{\langle \psi | U_H(t, 0)^\dagger O(t) U_H(t, 0) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\langle a | U_I(\infty, 0; \epsilon) U_H(0, t) O(t) U_H(t, 0) U_I(0, -\infty; \epsilon) | a \rangle}{\langle a | U_I(\infty, 0; \epsilon) U_I(0, -\infty; \epsilon) | a \rangle} = \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\langle a | U_I(\infty, 0; \epsilon) \mathbb{I} U_{HI}(0, t) U_0(0, t) O(t) U_0(t, 0) U_{HI}(t, 0) \mathbb{I} U_I(0, -\infty; \epsilon) | a \rangle}{\langle a | U_I(\infty, 0; \epsilon) U_I(0, -\infty; \epsilon) | a \rangle} = \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\langle a | U_I(\infty, 0; \epsilon) U_I(0, t; \epsilon) U_0(0, t) O(t) U_0(t, 0) U_I(t, 0; \epsilon) U_I(0, -\infty; \epsilon) | a \rangle}{\langle a | U_I(\infty, 0; \epsilon) U_I(0, -\infty; \epsilon) | a \rangle} = \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\langle a | U_I(\infty, t; \epsilon) O_I(t) U_I(t, -\infty; \epsilon) | a \rangle}{\langle a | U_I(\infty, -\infty; \epsilon) | a \rangle} \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\langle a | U_I(\infty, t; \epsilon) O_I(t) U_I(t, -\infty; \epsilon) | a \rangle}{\langle a | S | a \rangle}
\end{aligned}$$

L'operatore  $S$  che compare a denominatore in questa scrittura è definito mediante l'azione qui descritta, è denominato *operatore di scattering*. Questo operatore indica l'azione di evoluzione temporale in rappresentazione di interazione da un tempo  $-\infty$  a  $\infty$ , ed il suo valor medio sullo stato  $|a\rangle$  è lo stesso che troveremmo considerando l'evoluzione temporale senza adoperare la rappresentazione di interazione, consistentemente con l'indipendenza sostanziale dalla scelta di rappresentazione operata mostrata in precedenza.  $S$  è ben definito poiché si può ottenere l'azione di questo oggetto indipendentemente da  $H_0$  mediante l'equazione 3.5.1; inoltre è importante osservare come ora tutta l'informazione sulla perturbazione sia contenuta nell'operatore di scattering, infatti l'osservabile  $O_I$  è in rappresentazione di interazione e dipende dal solo termine di Hamiltoniana imperturbata  $H_0$ . Scegliere quindi l'impiego della rappresentazione di interazione è conveniente in quanto permette di separare completamente l'azione della perturbazione da quella dell'Hamiltoniana imperturbata.

Possiamo pensare di ripetere queste operazioni considerando l'azione di più osservabili che agiscono ordinatamente ed a tempi diversi sull'autostato dell'Hamiltoniana perturbata, secondo l'evoluzione data da  $H$

$$\frac{\langle \psi | \mathcal{T} (O_{1H}(t_1) O_{2H}(t_2) \dots O_{nH}(t_n)) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

dove  $\mathcal{T}$  è l'operatore di ordinamento temporale, che associa al prodotto degli operatori ad argomento quell'unica permutazione degli operatori stessi tale che

$$\mathcal{T}(O_{1H}(t_1)O_{2H}(t_2)\dots O_{nH}(t_n)) = O_{i_1H}(t_{i_1})O_{i_2H}(t_{i_2})\dots O_{i_nH}(t_{i_n})$$

con

$$t_{i_1} > t_{i_2} > \dots > t_{i_n}$$

Importante è osservare che questo comporta che sotto  $\mathcal{T}$ -ordinamento tutti gli operatori considerati commutino.

Procedendo come già osservato si ottiene ora che

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \psi | \mathcal{T}(O_{1H}(t_1)\dots O_{nH}(t_n)) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \\ & = \frac{\langle \psi | O_{i_1H}(t_{i_1})\dots O_{i_nH}(t_{i_n}) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\langle a | U_I(\infty, t_{i_1}; \epsilon) O_{i_1I}(t_{i_1})\dots O_{i_nI}(t_{i_n}) U_I(t, -\infty; \epsilon) | a \rangle}{\langle a | S | a \rangle} = \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\langle a | \mathcal{T}(U_I(\infty, t_{i_1}; \epsilon) O_{i_1I}(t_{i_1})\dots O_{i_nI}(t_{i_n}) U_I(t, -\infty; \epsilon)) | a \rangle}{\langle a | S | a \rangle} = \\ (3.5.2) \quad & = \frac{\langle a | \mathcal{T}(SO_{1I}(t_1)\dots O_{nI}(t_n)) | a \rangle}{\langle a | S | a \rangle} \end{aligned}$$

Dove nel penultimo passaggio abbiamo potuto reintrodurre il  $\mathcal{T}$ -ordinamento in quanto tutti gli operatori che apparivano al passaggio precedente erano già  $\mathcal{T}$ -ordinati; nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che gli operatori considerati commutino sotto  $\mathcal{T}$ -ordinamento, e i due termini di evoluzione a destra e sinistra possono essere riassemblati nell'operatore di scattering.

La scrittura 3.5.2 è il risultato principale del Teorema di Gell-Mann e Low. Essa permette di scrivere il valor medio di una generica combinazione ordinata di operatori su di un autostato dell'Hamiltoniana perturbata, con un'evoluzione temporale determinata da essa, come valor medio su di un autostato dell'Hamiltoniana imperturbata  $H_0$ , che determina l'evoluzione temporale degli operatori (questo significato della rappresentazione di interazione come qui impiegata si riconosce facilmente anche in 3.5.1) ancora nello stesso ordine mediante l'operatore di scattering che contiene tutta l'informazione riguardo alla perturbazione.

A partire da questo risultato, opportunamente riportato agli operatori di campo mediante il Teorema di Wick, si costruisce la base formale che permette di giustificare gli strumenti dei diagrammi di Feynman; il Teorema di Gell-Mann e Low acquista quindi grande importanza in teoria dei campi e soprattutto nello studio delle interazioni a molti corpi.

Per lo studio delle peculiarità di tali sistemi complessi si rimanda a quanto trattato da Fetter e Walecka in “Quantum Theory of Many Particle Systems” [8].

## Spazi finito-dimensionali

### 4.1. Hamiltoniane $2 \times 2$ , esempio pedagogico

Per addentrarci nella comprensione degli strumenti fino ad ora studiati, possiamo seguire la traccia di Brouder, Stoltz e Panati che nell'articolo del 2008 "Adiabatic approximation, Gell-Mann and Low theorem and degeneracies: a pedagogical example" [10] hanno studiato il caso di un Hamiltoniana a due livelli ed una perturbazione a diagonale nulla per mostrare concretamente il comportamento degli oggetti che sono stati descritti.

Questa trattazione non vuole mostrare una modalità pratica di impiegare il Teorema Adiabatico o il Teorema di Gell-Mann e Low, e magari fornire un procedimento per trovare gli autostati dell'Hamiltoniana perturbata, in quanto in questo studio la conoscenza esaustiva degli oggetti coinvolti è un presupposto, e la diagonalizzazione dell'Hamiltoniana è banale, non è il risultato finale del lavoro. Quello che però si può mostrare è come siano consistenti la scelta della funzione di accensione e i limiti operati.

Innanzitutto definiamo l'Hamiltoniana imperturbata

$$H_0 = \begin{bmatrix} \mu + \delta & 0 \\ 0 & \mu - \delta \end{bmatrix}$$

Essa presenta i due valori energetici ammessi  $E_{\pm} = \mu \pm \delta$  come discostamento dall'energia media: la traccia, che per le matrici hermitiane è la somma degli autovalori, è  $2\mu$ , la separazione tra gli autovalori è  $2\delta$ . Naturalmente si può prendere  $\delta$  positivo o negativo senza problemi di sorta, mentre sceglierlo nullo vorrebbe dire andare a considerare il caso di una rottura della degenerazione, caso che conviene studiare a parte.

Introduciamo la perturbazione a diagonale nulla

$$V = \begin{bmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo prendere questa libertà di definizione al più ridefinendo  $H_0$ ; un caso più generale che potremmo considerare sarebbe la generica matrice hermitiana  $2 \times 2$  a traccia nulla, i cui i termini non diagonali possono essere complessi purché l'uno il coniugato dell'altro, mentre qui si è fissato  $v \in \mathbb{R}$ .

Possiamo ora scrivere l'Hamiltoniana dipendente dal tempo riscaldato

$$H(s) = H_0 + e^{-|s|}V = \begin{bmatrix} \mu + \delta & ve^{-|s|} \\ ve^{-|s|} & \mu - \delta \end{bmatrix}$$

Questa matrice è facile da diagonalizzare, e otteniamo i due autovalori, che sappiamo essere della forma  $E'_\pm(s) = \mu \pm y(s)$ , essendo invariata la traccia.

I due autovalori sono  $E'_\pm(s) = \mu \pm \sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}}$ ; osserviamo come nel limite  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} E'_\pm(s) = E_\pm$  la corrispondenza tra gli autovalori energetici dell'Hamiltoniana perturbata e imperturbata è ben definita ai limiti dell'asse dei tempi a partire dallo stesso autovalore nell'origine, se si è prima fissato il segno di  $\delta$ ; fissiamo dunque positivo questo parametro per comodità.

Possiamo riscrivere l'Hamiltoniana  $H(s)$  nella sua forma spettrale dopo aver trovato i suoi due autospazi per ogni tempo  $s$ :

$$\begin{bmatrix} \mu + \delta & ve^{-|s|} \\ ve^{-|s|} & \mu - \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_\pm(s) \end{bmatrix} = \left( \mu \pm \sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ x_\pm(s) \end{bmatrix}$$

$$x_\pm(s) = \frac{\pm \sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}} - \delta}{ve^{-|s|}} \equiv \frac{\pm y(s) - \delta}{\sqrt{y^2(s) - \delta^2}} = \pm \sqrt{\frac{y(s) \mp \delta}{y(s) \pm \delta}} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 \mp \gamma(s)}{1 \pm \gamma(s)}}$$

$$E'_\pm(s) = \mu \pm \sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}} = \mu \pm \frac{\delta}{\gamma(s)}$$

Dove introduciamo  $\gamma$  per comodità di scrittura; prendendo sempre le radici quadrate nella definizione aritmetica (è una buona scelta in quanto il campo è quello reale e tutte le informazioni sul segno sono rese esplicite) abbiamo adottato una scrittura che è valida se  $v > 0$ , altrimenti si rende necessario operare un cambio di segno. Lo studio sarebbe assolutamente analogo.

Abbiamo quindi definito il nuovo termine dipendente dal tempo

$$\gamma(s) = \frac{\delta}{y(s)} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}}} \in (0, 1)$$

che risulta definito positivo e minore di 1 per ogni tempo  $s \in \mathbb{R}$ .

Essendo ben definiti i due autostati dell'Hamiltoniana ortogonali per ogni tempo, ne scriviamo il proiettore sugli autospazi associati a  $E'_\pm(s)$ , normalizzando i due autovettori trovati e prendendone il prodotto  $2 \times 1 \circ 1 \times 2$ :

$$\begin{aligned} P_\pm(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_\pm^2}} \\ \frac{x_\pm}{\sqrt{1+x_\pm^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_\pm^2}} & \frac{x_\pm}{\sqrt{1+x_\pm^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x_\pm^2} & \frac{x_\pm}{1+x_\pm^2} \\ \frac{x_\pm}{1+x_\pm^2} & \frac{x_\pm^2}{1+x_\pm^2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1\pm\gamma}{2} & \pm\sqrt{\frac{1\mp\gamma}{1\pm\gamma}} \frac{1\pm\gamma}{2} \\ \pm\sqrt{\frac{1\mp\gamma}{1\pm\gamma}} \frac{1\pm\gamma}{2} & \frac{1\mp\gamma}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1\pm\gamma}{2} & \pm\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{2} & \frac{1\mp\gamma}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}} \pm \delta}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} & \pm \frac{ve^{-|s|}}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} \\ \pm \frac{ve^{-|s|}}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} & \frac{\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}} \mp \delta}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dove i proiettori permettono di scrivere la decomposizione spettrale dell'Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H(s) &= E'_+(s)P_+(s) + E'_-(s)P_-(s) = \\ &= \frac{\left(\mu + \frac{\delta}{\gamma}\right)}{2} \begin{bmatrix} 1 + \gamma & \sqrt{1 - \gamma^2} \\ \sqrt{1 - \gamma^2} & 1 - \gamma \end{bmatrix} + \frac{\left(\mu - \frac{\delta}{\gamma}\right)}{2} \begin{bmatrix} 1 - \gamma & -\sqrt{1 - \gamma^2} \\ -\sqrt{1 - \gamma^2} & 1 + \gamma \end{bmatrix} = \\ &= \left(\mu + \sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}}\right) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}} + \delta}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} & \frac{ve^{-|s|}}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} \\ \frac{ve^{-|s|}}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} & \frac{\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}} - \delta}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} \end{bmatrix} + \\ &+ \left(\mu - \sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}}\right) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}} - \delta}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} & -\frac{ve^{-|s|}}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} \\ -\frac{ve^{-|s|}}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} & \frac{\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}} + \delta}{2\sqrt{\delta^2+v^2e^{-2|s|}}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Essendo nota la forma dei proiettori per ogni tempo, possiamo a questo punto trovare la forma esatta dell'operatore di Kato, che si scrive, secondo la definizione data in 2.3.2:

$$K(s) = i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial s} P_+(s) \right) P_+(s) + i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial s} P_-(s) \right) P_-(s)$$

Ci è sufficiente ora calcolare la derivata dei proiettori:

$$\begin{aligned} P_{\pm} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \pm \gamma & \pm \sqrt{1-\gamma^2} \\ \pm \sqrt{1-\gamma^2} & 1 \mp \gamma \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} P_{\pm} &= \pm \frac{1}{2} \gamma' \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dove trovare esplicitamente la forma di  $\gamma'$  non è necessario, né particolarmente interessante; ad ogni modo è banale ricavare

$$\gamma' = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}}} = \frac{\delta v^2 e^{-2|s|} \text{sign}(s)}{\left(\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}\right)^{3/2}} = \gamma (1 - \gamma^2) \text{sign}(s)$$

infatti il termine  $\gamma'$  e tutta l'informazione riguardo al segno si ottengono come fattori moltiplicativi dell'operatore  $\frac{\partial}{\partial s} P_{\pm}(s)$ . Questo è molto comodo per andare a considerare l'operatore di Kato: secondo la definizione, si ottiene

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{i\hbar}{2} \gamma' \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & -1 \end{bmatrix} (P_+ - P_-) = \\ &= \frac{i\hbar}{2} \gamma' \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \sqrt{1-\gamma^2} \\ \sqrt{1-\gamma^2} & -\gamma \end{bmatrix} = \\ &= \frac{i\hbar}{2} \gamma' \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{i\hbar}{2} \frac{\gamma'}{\sqrt{1-\gamma^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\arcsin(\gamma(s)) + k) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O, in maniera esplicita,

$$K(s) = i\hbar \frac{\delta v e^{-|s|} \text{sign}(s)}{2 \left( \delta^2 + v^2 e^{-2|s|} \right)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto vorremmo risolvere l'equazione di Schrödinger equivalente associata all'operatore di Kato, che permette di trovare l'operatore di evoluzione adiabatica. Questo permetterebbe di verificare direttamente l'equivalenza tra Teorema di Gell-Mann e Low e Teorema Adiabatico nei termini discussi in precedenza. Se trovassimo in forma esplicita  $\lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \frac{A(0, s_0)|a\rangle}{\langle a|A(0, s_0)|a\rangle}$ , dove  $|a\rangle$  sia uno dei due autostati dell'Hamiltoniana imperturbata,  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  o  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , potremmo verificare se questi risultino effettivamente uguali a  $\begin{bmatrix} 1 \\ x_{\pm}(0) \end{bmatrix}$ , gli autostati di  $H(0) = H_0 + V$  che abbiamo calcolato.

Vogliamo quindi trovare la soluzione del problema

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial s} A(s, s_0) &= K(s)A(s, s_0) \\ A(s_0, s_0) &= \mathbb{I} \end{cases}$$

L'operatore di evoluzione adiabatica sarà ancora rappresentato come una matrice  $2 \times 2$ , pertanto il problema si riscrive come

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial s} A(s, s_0) &= i\hbar \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} = \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\arcsin(\gamma(s)) + k) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\arcsin(\gamma(s)) + k) \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ -A_{11} & -A_{12} \end{bmatrix} \\ A(s_0, s_0) &= \mathbb{I} \end{cases}$$

Basta osservare l'operatore  $A$  per convincersi che una sua buona rappresentazione possa essere quella che sfrutta funzioni trigonometriche, da cui risulterà

$$A(s, s_0) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(s, s_0)) & \sin(\theta(s, s_0)) \\ -\sin(\theta(s, s_0)) & \cos(\theta(s, s_0)) \end{bmatrix}$$

Sostituendo questa scrittura si ottiene infatti il nuovo problema

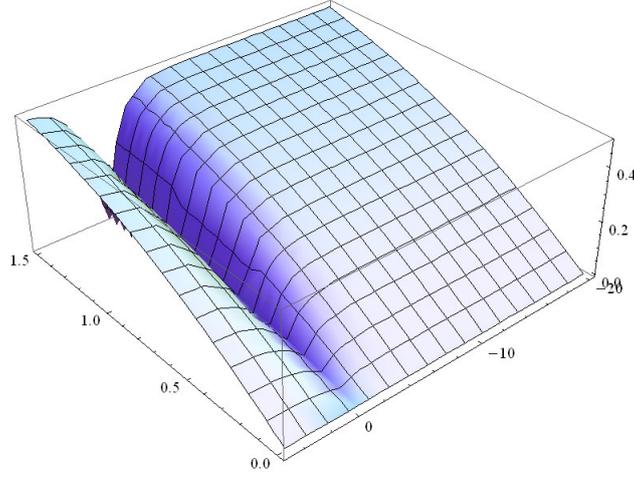


FIGURA 4.1.1. Andamento per  $\theta(s, 0)$ :  $0 < \frac{v}{\delta} < \frac{3}{2}$  sull'asse delle  $y$ ,  $-20 < s < 5$  sull'asse delle  $x$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'(s, s_0) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(s, s_0)) & \cos(\theta(s, s_0)) \\ -\cos(\theta(s, s_0)) & -\sin(\theta(s, s_0)) \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\arcsin(\gamma(s)) + k) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(s, s_0)) & \cos(\theta(s, s_0)) \\ -\cos(\theta(s, s_0)) & -\sin(\theta(s, s_0)) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos(\theta(s_0, s_0)) & \sin(\theta(s_0, s_0)) \\ -\sin(\theta(s_0, s_0)) & \cos(\theta(s_0, s_0)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Questa scrittura è evidentemente consistente con quella precedente, ed ammette soluzione. Essa permette infatti di ridurre il problema al semplice e risolvibile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'(s, s_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\arcsin(\gamma(s)) + k) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left( \arcsin \left( \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}}} \right) + k \right) \\ \theta(s_0, s_0) = 0 \end{array} \right.$$

A questo punto è banale riscrivere la fase dipendente dal tempo che è l'argomento delle funzioni trigonometriche che compaiono nell'operatore di evoluzione adiabatica:

$$\theta(s, s_0) = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}}} \right) - \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s_0|}}} \right)$$

Osserviamo come in 4.1.1 si possa vedere come  $\theta(s, s_0)$  tenda a un limite per ogni

valore di  $v$ , in questo caso anche per  $v > \delta$ . Questo indica come l'operatore di evoluzione adiabatica agisca, osservandone la definizione su funzioni trigonometriche, come una rotazione finita nello spazio degli stati, portando gli autostati imperturbati in quelli perturbati in un tempo infinito. Gran parte della rotazione è concentrata a piccoli tempi (adimensionati), per arrivare velocemente al limite.

Da questa scrittura possiamo arrivare a studiare i limiti di nostro interesse dopo aver fatto alcune semplici considerazioni sul valore che questo termine di fase può assumere. Innanzitutto osserviamo che comunque si scelga  $v$  (continuiamo a studiare  $v > 0$ ) si ottiene

$$0 < \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}}} < 1$$

Allora in generale si ottiene che

$$0 < \arcsin \left( \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s|}}} \right) < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta(s, s_0) < \frac{\pi}{2}$$

Allora dobbiamo ricordare che il termine di fase appartiene al primo o al quarto quadrante. Ricordando queste condizioni necessarie, è semplice notare come l'equazione 3.3.1 significhi che gli autostati dell'Hamiltoniana perturbata  $\begin{bmatrix} 1 \\ x_{\pm}(0) \end{bmatrix}$  possono essere trovati riscalando ogni colonna dell'operatore  $A$  con l'elemento della prima riga, ed è facile verificare che effettivamente  $x_{\pm}(0) = \lim_{s_0 \rightarrow -\infty} (\mp \tan(\theta(0, s_0)))^{\pm 1}$ , ricordando che si ottiene per il primo e il quarto quadrante che  $\tan(\theta) = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2(2\theta)}}{\sin(2\theta)}$ . Invertiamo quindi la scrittura del termine di fase cercando il limite  $\lim_{s_0 \rightarrow -\infty} \sin(2\theta(0, s_0))$ :

$$\begin{aligned} \lim_{s_0 \rightarrow -\infty} \sin(2\theta(0, s_0)) &= \\ &= \lim_{s_0 \rightarrow -\infty} \sin \left( \arcsin \left( \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2}} \right) - \arcsin \left( \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2 e^{-2|s_0|}}} \right) \right) = \\ &= \sin \left( \arcsin \left( \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2}} \right) - \arcsin(1) \right) = \\ &= -\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\delta^2 + v^2}} = \\ &= -\sqrt{1 - \gamma^2(0)} \end{aligned}$$

Il termine di fase appartiene allora al quarto quadrante. Sostituiamo ora nella formula della tangente e prendiamo il limite per tempo di inizio dell'evoluzione che va a  $-\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{s_0 \rightarrow -\infty} \tan(\theta(0, s_0)) &= \\ &= \lim_{s_0 \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2(2\theta(0, s_0))}}{\sin(2\theta(0, s_0))} = \\ &= -\frac{1 - \sqrt{\gamma^2(0)}}{\sqrt{1 - \gamma^2(0)}} = \\ &= -\sqrt{\frac{1 - \gamma(0)}{1 + \gamma(0)}} \end{aligned}$$

Ed in effetti  $\lim_{s_0 \rightarrow -\infty} (\mp \tan(\theta(0, s_0)))^{\pm 1} = \left( \pm \sqrt{\frac{1 - \gamma(0)}{1 + \gamma(0)}} \right)^{\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{1 \mp \gamma(0)}{1 \pm \gamma(0)}} = x_{\pm}(0)$ , verificando il risultato della rappresentazione di trasformazione adiabatica.

#### 4.2. L'evoluzione temporale per le matrici $2 \times 2$

La seguente trattazione sull'operatore di evoluzione temporale è ripresa ed ampliata dal lavoro già citato di Brouder, Stoltz e Panati [10].

L'operatore di evoluzione temporale per l'Hamiltoniana imperturbata, studiando in termini di tempo riscaldato, è l'operatore che risolve

$$\begin{cases} i\hbar\epsilon \frac{\partial}{\partial s} U_0(s; \epsilon) = H_0 U_0 \\ U_0(0; \epsilon) = \mathbb{I} \end{cases}$$

ed è banale ottenere nel caso  $2 \times 2$  trattato nella sezione precedente

$$U_0(s; \epsilon) = e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon} H_0 s} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon}(\mu+\delta)s} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon}(\mu-\delta)s} \end{bmatrix}$$

L'evoluzione temporale, una volta inserita la funzione di accensione che introduce la perturbazione  $V$  definita in precedenza, permette di definire il nuovo operatore di evoluzione temporale a partire dall'equazione di Schrödinger:

$$\begin{cases} i\hbar\epsilon \frac{\partial}{\partial s} U(s, s_0; \epsilon) = \left( H_0 + e^{-|s|} V \right) U(s, s_0; \epsilon) \\ U(s_0, s_0; \epsilon) = \mathbb{I} \end{cases}$$

Risulta però particolarmente conveniente impiegare gli operatori in rappresentazione di interazione, e per quanto riguarda l'operatore di evoluzione temporale in rappresentazione di interazione, per quanto osservato nella sezione 3.4, ci aspettiamo che esso verifichi il Teorema di Gell-Mann e Low. Esso si scrive

$$U_I(s, s_0; \epsilon) = U_0(s; \epsilon)^\dagger U(s, s_0; \epsilon) U_0(s_0; \epsilon)$$

che è l'operatore unitario che risolve il problema

$$\begin{cases} i\hbar\epsilon \frac{\partial}{\partial s} U_I(s, s_0; \epsilon) = U_0(s; \epsilon)^\dagger \left( -H_0 + H_0 + e^{-|s|} V \right) U(s, s_0; \epsilon) U_0(s_0, 0) = \\ \quad = e^{-|s|} V_I(s; \epsilon) U_I(s, s_0; \epsilon) \\ U_I(s_0, s_0; \epsilon) = \mathbb{I} \end{cases}$$

Ma è semplice scrivere la perturbazione in rappresentazione di interazione  $V_I(s; \epsilon)$ :

$$\begin{aligned} V_I(s; \epsilon) &= U_0(s; \epsilon)^\dagger V U_0(s; \epsilon) = \\ &= \begin{bmatrix} e^{\frac{i(\mu+\delta)s}{\hbar\epsilon}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i(\mu-\delta)s}{\hbar\epsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\frac{i(\mu+\delta)s}{\hbar\epsilon}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i(\mu-\delta)s}{\hbar\epsilon}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & v e^{\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon}} \\ v e^{-\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon}} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A questo punto il problema da risolvere si può scrivere esplicitamente nei suoi elementi di matrice

$$\begin{cases} i\hbar\epsilon \frac{\partial}{\partial s} U_I(s, s_0; \epsilon) = i\hbar\epsilon \begin{bmatrix} U'_{11} & U'_{12} \\ U'_{21} & U'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v e^{\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|} \\ v e^{-\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \\ \quad = \begin{bmatrix} v e^{\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|} U_{21} & v e^{\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|} U_{22} \\ v e^{-\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|} U_{11} & v e^{-\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|} U_{12} \end{bmatrix} \\ U_I(s_0, s_0; \epsilon) = \mathbb{I} \end{cases}$$

Avendo preso in considerazione la rappresentazione di interazione, in questo caso particolare di matrici  $2 \times 2$ , il fatto che la parte hermitiana del problema sia nei soli

due termini non diagonali, fa sì che le equazioni differenziali da risolvere si presentino in due problemi identici con differenti condizioni al contorno, ciascun problema in due equazioni e due funzioni incognite:  $U_{11}$  è accoppiata a  $U_{21}$  e  $U_{12}$  a  $U_{22}$ . Il problema si presenta quindi separato per colonne, e ogni sistema può essere semplificato studiando una sola equazione differenziale del secondo ordine invece che due del primo. Si ottiene infatti:

$$\begin{aligned} U''_{11} &= \frac{\partial}{\partial s} (U'_{11}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{i\hbar\epsilon} v e^{\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|} U_{21} \right) = \\ &= \frac{1}{i\hbar\epsilon} v \left( \frac{2i\delta}{\hbar\epsilon} - \text{sign}(s) \right) e^{\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|} U_{21} + \frac{1}{i\hbar\epsilon} v e^{\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|} \left( \frac{1}{i\hbar\epsilon} v e^{-\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|} U_{11} \right) = \\ &= \left( \frac{2i\delta - \hbar\epsilon \text{sign}(s)}{\hbar\epsilon} \right) U'_{11} - \frac{v^2}{\epsilon^2 \hbar^2} e^{-2|s|} U_{11} \end{aligned}$$

Che è una equazione differenziale lineare di secondo ordine omogenea nella sola  $U_{11}$ . Le due condizioni al contorno sono fissate scegliendo  $s_0 = 0$ , per cui deve risultare  $U_{11}(0, 0) = 1$  e  $U_{21}(s_0, 0) = U'_{11}(0, 0) = 0$ .

$$\begin{aligned} U_{11}(s, 0) &= \frac{\pi}{2} \frac{v}{\hbar\epsilon} e^{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)s} \left( J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^{-|s|}\right) + \right. \\ &\quad \left. + J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^{-|s|}\right) \right) \text{Sech} \left( \frac{\delta\pi}{\hbar\epsilon} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar\epsilon}{v e^{\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|}} U'_{11}(s, 0) &= \frac{-i\pi v}{2\hbar\epsilon} e^{-\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)s} \left( J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^{-|s|}\right) + \right. \\ &\quad \left. - J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^{-|s|}\right) \right) \text{Sech} \left( \frac{\delta\pi}{\hbar\epsilon} \right) = U_{21}(s, 0) \end{aligned}$$

$J_\nu(x)$  è la funzione di Bessel del primo tipo, che risolve quindi  $x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} J_\nu(x) + x \frac{\partial}{\partial x} J_\nu(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0$  e che sia non singolare nell'origine. Le funzioni di Bessel sono ampiamente studiate in letteratura,.

Le condizioni al contorno sono fissate per la scelta di studiare in  $s_0 = 0$  l'operatore  $U_I(s, s_0; \epsilon) = U_I(s, 0; \epsilon)$ , che sono in questa forma rispettate al limite tendendo da destra e da sinistra indifferentemente, senza presentare discontinuità per il cambiamento di definizione. Gli elementi di matrice sono di classe  $\mathcal{C}^\infty$  nelle due semirette. Per la seconda colonna le condizioni al contorno si invertono, essendo  $U_{12}(0, 0) = 0$

$$e U_{22}(0, 0) = \frac{i\hbar\epsilon}{v} U'_{12}(0, 0) = 1.$$

$$U_{12}(s, 0) = -\frac{i\pi}{2} \frac{v}{\hbar\epsilon} e^{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)s} \left( J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^{-|s|}\right) + \right. \\ \left. - J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^{-|s|}\right) \right) \text{Sech} \left(\frac{\delta\pi}{\hbar\epsilon}\right)$$

$$\frac{i\hbar\epsilon}{v e^{\frac{2i\delta s}{\hbar\epsilon} - |s|}} U'_{12}(s, 0) = \frac{\pi}{2} \frac{v}{\hbar\epsilon} e^{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)s} \left( J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^{-|s|}\right) + \right. \\ \left. - J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{\text{sign}(s)}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^{-|s|}\right) \right) \text{Sech} \left(\frac{\delta\pi}{\hbar\epsilon}\right) = U_{22}(s, 0)$$

Ricordando che vale  $U_I(s, 0; \epsilon) = U_I(0, s; \epsilon)^{-1} = U_I(0, s; \epsilon)$ , sarà necessario ricercare il limite  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \left( \frac{U_{12}(s, 0)}{U_{11}(s, 0)} \right)$  per verificare la validità del Teorema di Gell-Mann e Low. Delle funzioni di Bessel del primo tipo è noto il comportamento asintotico per argomento piccolo,  $J_\nu(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu$  quando  $z \ll 1$ . Da questo si ottiene facilmente che per  $s \rightarrow -\infty$ ,  $J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^s\right) \approx \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{v}{2\hbar\epsilon} e^s\right)^{-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}}$ . Questo ci permette di semplificare notevolmente la scrittura dei due elementi di matrice  $U_{11}$  e  $U_{12}$ :

$$U_{11}(s, 0) = \frac{\pi}{2} \frac{v}{\hbar\epsilon} e^{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}\right)s} \left( J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^s\right) + \right. \\ \left. + J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^s\right) \right) \text{Sech} \left(\frac{\delta\pi}{\hbar\epsilon}\right) \approx \\ \approx \frac{\pi}{2} \frac{v}{\hbar\epsilon} J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{2\hbar\epsilon}\right)^{-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}} \text{Sech} \left(\frac{\delta\pi}{\hbar\epsilon}\right)$$

$$U_{12}(s, 0) = -\frac{i\pi}{2} \frac{v}{\hbar\epsilon} e^{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}\right)s} \left( J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^s\right) + \right. \\ \left. - J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon} e^s\right) \right) \text{Sech} \left(\frac{\delta\pi}{\hbar\epsilon}\right) \approx \\ \approx \frac{i\pi}{2} \frac{v}{\hbar\epsilon} J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right) \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v}{2\hbar\epsilon}\right)^{-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}} \text{Sech} \left(\frac{\delta\pi}{\hbar\epsilon}\right)$$

Da cui quindi si ottiene

$$\frac{U_{12}(s, 0)}{U_{11}(s, 0)} \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} \frac{iJ_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right)}{J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right)}$$

che è un limite che è possibile studiare o per ordine di approssimazione arbitrario o per le proprietà delle funzioni di Bessel, per affermare che esso risulta uguale a

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \left( \frac{U_{12}(s, 0)}{U_{11}(s, 0)} \right) = \frac{\sqrt{\delta^2 + v^2} - \delta}{v}$$

che è esattamente  $x_+(0)$ , verificando così il Teorema di Gell-Mann e Low mediante l'impiego dell'operatore di evoluzione temporale in rappresentazione di interazione.

Negli elementi di matrice i termini oscillanti dipendenti dal tempo sono portati da  $e^{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} + \frac{1}{2}\right)s}$  e  $J_{\left(-\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} - \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{v}{\hbar\epsilon}e^s\right)$ , che sono contributi che possono essere semplificati in ogni  $U_{kj}$  distintamente, senza dover fare il rapporto coi termini diagonali. Il rapporto elimina invece il contributo divergente dipendente dal parametro di velocità di trasformazione  $\epsilon$  dato dall'altro termine in funzione di Bessel  $J_{\left(\frac{i\delta}{\hbar\epsilon} \pm \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{v}{\hbar\epsilon}\right)$ . Questo risultato particolare, seppure atteso per l'equazione 3.5.1, non è scontato, ed indica come in rappresentazione di interazione la problematica della fase divergente possa diventare trascurabile rispetto a fenomeni dominanti e convergenti a tempi sufficientemente grandi in valore assoluto per Hamiltoniane della forma studiata; l'unico termine oscillante significativo dipende da  $U_0(s, 0)$ , ma è proprio quello che la rappresentazione di interazione permette di eliminare.

### 4.3. Considerazioni sulle Hamiltoniane $3 \times 3$

Possiamo tentare di prendere in considerazione alcuni aspetti del più semplice problema meno banale di quello appena trattato, che però abbia caratteri di generalità.

Per fare questo prendiamo in considerazione una perturbazione del tipo

$$V = \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ \bar{p} & 0 & 0 \\ \bar{q} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Come prima le informazioni sulla diagonale possono essere riportate in  $H_0$ , possiamo fissare uno dei termini non diagonali a 0 potendo riscalarne opportunamente le energie, mentre gli altri due termini della perturbazione devono essere valori complessi generici.

L'Hamiltoniana imperturbata considerata sarà del tipo

$$H_0 = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

che determina naturalmente un operatore di evoluzione temporale noto esplicitamente della forma

$$U_0(s; \epsilon) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon} E_1 s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon} E_2 s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon} E_3 s} \end{bmatrix}$$

Mediante l'operatore di evoluzione temporale dell'Hamiltoniana imperturbata è ancora semplice costruire gli strumenti della rappresentazione di interazione mediante i quali studiare il problema:

$$V_I(s; \epsilon) = U_0(s; \epsilon)^\dagger V U_0(s; \epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & p e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon}(E_2-E_1)s} & q e^{-\frac{i}{\hbar\epsilon}(E_3-E_1)s} \\ \bar{p} e^{\frac{i}{\hbar\epsilon}(E_2-E_1)s} & 0 & 0 \\ \bar{q} e^{\frac{i}{\hbar\epsilon}(E_3-E_1)s} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definiamo allora per comodità  $\frac{E_2-E_1}{\hbar\epsilon} = \phi_{21}$ .

$$i\hbar\epsilon \frac{\partial}{\partial s} U_I(s, s_0; \epsilon) = e^{-|s|} V_I(s; \epsilon) U_I(s, s_0; \epsilon)$$

$$\begin{bmatrix} U'_{11} & U'_{12} & U'_{13} \\ U'_{21} & U'_{22} & U'_{23} \\ U'_{31} & U'_{32} & U'_{33} \end{bmatrix} = -\frac{i e^{-|s|}}{\hbar\epsilon} \begin{bmatrix} 0 & p e^{-i\phi_{21}s} & q e^{-i\phi_{31}s} \\ \bar{p} e^{i\phi_{21}s} & 0 & 0 \\ \bar{q} e^{i\phi_{31}s} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}$$

Abbiamo così trovato il problema da risolvere dalla equazione di Schrödinger, imponendo la condizione al contorno  $U_I(0, 0; \epsilon) = \mathbb{I}$ . A questo sistema di equazioni espresso nella forma di matrici  $3 \times 3$  corrispondono ancora tre sistemi di tre equazioni differenziali che possono essere affrontati separatamente. I problemi si possono riscrivere in forma compatta come

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} U'_{1j}(s) \\ U'_{2j}(s) \\ U'_{3j}(s) \end{bmatrix} \\ U_{kj}(0) \end{cases} = -\frac{i e^{-|s|}}{\hbar\epsilon} \begin{bmatrix} U_{2j}(s) p e^{-i\phi_{21}s} + U_{3j}(s) q e^{-i\phi_{31}s} \\ U_{1j}(s) \bar{p} e^{i\phi_{21}s} \\ U_{1j}(s) \bar{q} e^{i\phi_{31}s} \end{bmatrix} \\ = \delta_{kj} \end{cases}$$

Trattare questo problema non è immediato. Ad ogni modo si può procedere riscalandolo ogni colonna rispetto al proprio termine diagonale:  $u_{kj}(s) = \frac{U_{kj}(s)}{U_{jj}(s)}$ ,  $u'_{kj}(s) = \frac{U'_{kj}(s)U_{jj}(s) - U_{kj}(s)U'_{jj}(s)}{U_{jj}^2(s)}$ . Naturalmente  $u_{jj}(s) = 1$ . Si ottengono ora tre sistemi, ognuno con tre funzioni incognite di cui una è quella posta uguale ad 1. Allora in ogni sistema si ottengono due equazioni significative in due incognite, facilmente disaccoppiabili.

Ad esempio, trasformando uno dei tre sistemi, si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u'_{12}(s) \\ u'_{22}(s) \\ u'_{32}(s) \end{bmatrix} \\ u_{k2}(0) \end{cases} = -\frac{ie^{-|s|}}{\hbar\epsilon} \begin{bmatrix} pe^{-i\phi_{21}s} + u_{32}(s)qe^{-i\phi_{31}s} - u_{12}^2(s)\bar{p}e^{i\phi_{21}s} \\ 0 \\ u_{12}(s)(\bar{q}e^{i\phi_{31}s} - u_{32}(s)\bar{p}e^{i\phi_{21}s}) \end{bmatrix} \\ = \delta_{k2} \end{cases}$$

Dall'equazione  $u'_{32}(s) = -\frac{ie^{-|s|}}{\hbar\epsilon} u_{12}(s)(\bar{q}e^{i\phi_{31}s} - u_{32}(s)\bar{p}e^{i\phi_{21}s})$  è facile ottenere per inversione una scrittura che esprima  $u_{12}(s)$  come  $u_{12} = u_{12}(u_{32}, u'_{32}, s)$ . Consideriamo  $u'_{12}(s) = -\frac{ie^{-|s|}}{\hbar\epsilon} (pe^{-i\phi_{21}s} + u_{32}(s)qe^{-i\phi_{31}s} - u_{12}^2(s)\bar{p}e^{i\phi_{21}s})$ , l'altra equazione non banale, per ricavare un'equazione differenziale del secondo ordine in  $u_{32}$  e le sue derivate, dopo aver derivato  $u_{12}$  nella forma precedentemente ottenuta ed applicando una sostituzione. Risolta quindi l'equazione disaccoppiata e ricavata  $u_{32}(s)$ , è immediatamente definita  $u_{12}(s)$ ; si ottiene da  $U'_{22}(s) = -\frac{ie^{-|s|}}{\hbar\epsilon} u_{12}(s)\bar{p}e^{i\phi_{21}s}U_{22}(s)$  l'ultima informazione cercata che definisce il sistema.

Per gli altri sistemi il procedimento è concettualmente analogo.

Per i risultati del Teorema di Gell-Mann e Low dovremmo ottenere come autostati dell'Hamiltoniana perturbata  $H = H(0) = H_0 + V$  gli stati

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \left[ \begin{pmatrix} U_{j1} \\ U_{jj} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_{j2} \\ U_{jj} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_{j3} \\ U_{jj} \end{pmatrix} \right]^\dagger$$

Una problematica che non pare sormontabile con strumenti analitici è tuttavia che la soluzione analitica è di assai difficile definizione, e non sembra siamo in grado di ottenerla mediante procedimenti noti. Le equazioni che si ottengono non si riescono neppure a ricondurre con accorgimenti semplici al caso già studiato delle matrici  $2 \times 2$  nonostante la possibilità di isolare una equazione del problema.

A partire da valori fissati è però possibile risolvere numericamente questi problemi, muovendo dalla considerazione fondamentale che il Teorema di Gell-Mann e Low fa sì che ci aspettiamo che esistano 6 rapporti al limite di  $s$  infinito in valore assoluto

che siano convergenti e definiscano gli stati.

Quanto è stato illustrato non costituisce, evidentemente, un procedimento che abbia senso in termini di computazione per diagonalizzare una matrice  $3 \times 3$ , che è numericamente banale e comunque semplice in termini generali mediante le formule cardaniche che permettono di trovare le soluzioni delle equazioni di terzo grado. Risolvere un problema del genere avrebbe senso solo in termini di verifica e caratterizzazione del comportamento degli oggetti definiti dal Teorema di Gell-Mann e Low.

#### 4.4. Imposizioni sulla soluzione

Il comportamento convergente atteso per  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \left[ \left( \frac{U_{j1}}{U_{jj}} \right) \left( \frac{U_{j2}}{U_{jj}} \right) \left( \frac{U_{j3}}{U_{jj}} \right) \right]^\dagger$  indica che potrebbe essere interessante studiare direttamente i limiti di questi rapporti, quindi converrebbe ridefinire il problema impiegando queste funzioni rapporto di interesse, aspettandoci anche, assieme all'esistenza di un valore limite, che abbiano derivata al limite nulla.

Ma questo tipo di studio, avendo mantenuto 6 funzioni incognite (le diagonali sono identicamente normalizzate a 1), non ci permette di studiare in maniera efficiente il problema: i tre distinti sistemi di equazioni, che si presentano separati in colonne, vengono riaccoppiati, in quanto ogni elemento di ogni colonna viene accoppiato ad un elemento della riga a cui appartiene. Le funzioni possono essere ricostruite numericamente solo lavorando contemporaneamente su tutte e 6.

Per poter affrontare il problema bisognerebbe conoscere delle caratteristiche necessarie sull'operatore di evoluzione che permettano di fare delle imposizioni sulla soluzione così da diminuire i gradi di libertà del problema.

Come già trattato in precedenza, sappiamo che l'operatore di evoluzione temporale per l'Hamiltoniana  $3 \times 3$  sarà a sua volta una matrice quadrata della stessa dimensione, che per ogni coppia di tempi  $(s, s_0)$  è una matrice unitaria: il determinante della matrice che rappresenta tale operatore  $U(s, s_0)$  è in generale complesso, ad appartiene quindi, per la definizione del gruppo,  $U(s, s_0) \in U(3)$ , dove  $U(3)$  è appunto il gruppo delle matrici unitarie di dimensione 3, senza imposizioni ulteriori.

Il determinante è piuttosto semplice da ricavare, in quanto è semplice dimostrare che se vale  $i \frac{\partial}{\partial s} U = H_U U$ , allora vale che  $i \frac{\partial}{\partial s} \det(U) = \text{Tr}(H_U) \det(U)$  da cui  $\det(U) = k e^{-i \int \text{Tr}(H) ds}$ , che rappresenta una sorta di fase *over-all* dipendente dal tempo. Tale risultato è equivalente alle considerazioni che vengono realizzate nello studio dei continui per definire la deformazione di un volumetto di un mezzo continuo, studiando la diagonale del gradiente delle velocità.

Tutta l'informazione sulla fase del determinante dell'operatore di evoluzione è quella che ricaviamo analiticamente dalla traccia dell'Hamiltoniana, che nel nostro caso resta invariata durante la trasformazione introdotta dalla funzione di accensione, in quanto si è fissata identicamente nulla la diagonale della perturbazione. Per questo motivo possiamo "riscalfare" l'operatore di evoluzione mediante un opportuno multiplo dell'identità, così da ottenere univocamente un elemento del gruppo  $SU(3)$  che contenga tutto il resto dell'informazione sul problema ed abbia, per definizione del gruppo unitario speciale, determinante 1. Nel caso della rappresentazione di interazione, la scelta della perturbazione a diagonale identicamente nulla garantisce direttamente che l'operatore di evoluzione in tale rappresentazione apparterrà direttamente a  $SU(3)$ .

Ricercando l'operatore tra quelli che rispettano generalmente la condizione di essere appartenenti a tali gruppi, possiamo riparametrizzare l'operatore in modo che siano le funzioni reali che determinano i parametri con cui un operatore unitario è definito univocamente ad essere studiate secondo le equazioni differenziali che definiscono il problema. Nel caso di  $SU(3)$  è noto che il gruppo ammetta 8 generatori (la dimensione di  $SU(n)$  è  $n^2 - 1$ ) e quindi cerchiamo 8 funzioni che ad ogni tempo permettano di ricostruire l'operatore unitario, essendo nota la nona funzione dall'equazione sul determinante.

Possiamo ad esempio impiegare come 8 generatori le matrici di Gell-Mann, che hanno il pregio di essere a traccia nulla, che permettono di scrivere un operatore unitario come  $e^{i\varphi(s)} \prod e^{i\alpha_j(s)\lambda_j}$ , indicando con  $\lambda_j$  la  $j$ -esima matrice; essa risulta avere determinante pari a  $e^{3i\varphi(s)}$ , fissando le  $\lambda_j$  a traccia nulla. Si intende il prodotto degli operatori unitari ordinato.

Questa forma è comunque abbastanza scomoda da trattare, per la forma articolata della derivata dell'oggetto che ne risulta, che non facilita la risoluzione dell'equazione di Schrödinger; ad ogni modo può essere impiegata una qualsiasi altra parametrizzazione efficace del gruppo. Il problema della parametrizzazione di  $SU(3)$  è ampiamente trattato per l'utilità che tale gruppo ha dimostrato nell'ambito della fisica delle particelle.

## Conclusioni

In questo lavoro si sono prese in considerazione le trasformazioni lente, e si è affrontato il Teorema Adiabatico per studiare il caso particolare delle Hamiltoniane con funzioni di accensione, per poter arrivare a studiare il Teorema di Gell-Mann e Low, che tratta evoluzioni su tempi infiniti. A partire dallo studio del Teorema Adiabatico è di interesse poter arrivare a porre delle condizioni di carattere generale sul comportamento delle funzioni di accensione nel definire il comportamento degli operatori studiati, ed in particolare è di interesse definire analiticamente le condizioni per la validità della maggiorazione in 2.4.9: a seconda delle caratteristiche della funzione di accensione, si arriva ad affermare il teorema o sull'intero asse dei tempi o sull'intervallo dell'evoluzione considerata.

Uno degli aspetti più interessanti della rappresentazione adiabatica esposti in questo elaborato è certamente la formulazione dell'operatore di Kato, di cui si dimostrano l'esistenza e le proprietà, ma risulta definito esclusivamente a partire dai proiettori e le loro derivate rispetto al tempo. Potendo definire implicitamente questo operatore in funzione dell'Hamiltoniana, ad esempio mediante integrali di cammino nel piano complesso negli intorno degli autovalori energetici, è opportuno approfondire le proprietà di tale formulazione per poter risalire alle implicazioni sull'operatore di evoluzione adiabatica. In quest'ottica è di grande rilevanza la pubblicazione di Brouder, Panati e Stoltz "Gell-Mann and Low formula for degenerate unperturbed states" [11] per la costruzione degli operatori della rappresentazione adiabatica con cui arrivare al Teorema di Gell-Mann e Low. In questo articolo viene affrontata anche la problematica della degenerazione, che risulta significativa per trarre considerazioni di carattere più generale rispetto agli stati che possono essere definiti mediante il teorema; nella trattazione qui svolta non si è voluto approfondire il caso di una perturbazione che risolva una degenerazione, anche se è possibile caratterizzare i fenomeni di degenerazione dell'Hamiltoniana iniziale e crossing energetico durante la trasformazione. Così come può essere introdotto un comportamento sempre adiabatico ma disomogeneo rispetto agli stati su cui agisce la perturbazione: si può cioè studiare una perturbazione che presenti una dipendenza dal tempo (adimensionato o meno), purché lenta.

La dimostrazione ottenuta con un semplice metodo variazionale che qui si è fornita del Teorema di Gell-Mann e Low mette in risalto il parallelismo tra il tempo (quale argomento dell'esponenziale che modula la perturbazione, e quindi come fattore determinante per essa) e l'esplicito ordine di grandezza della perturbazione; essa conferma i risultati noti, di interesse per compattezza e significato della scrittura, sia nei riguardi degli autostati dell'Hamiltoniana perturbata che dell'operatore di scattering. Questi sono oggetti di cui si è mostrata la grande portata dell'esistenza e definizione, nell'impiego formale che ne può essere fatto, più che per la risoluzione numerica di problemi che pure può essere svolta.

Così come per il Teorema Adiabatico, anche il Teorema di Gell-Mann e Low può essere ulteriormente approfondito analizzando differenti funzioni di accensione, avendo le accortezze che sono state descritte. In questo caso va però osservato che il Teorema di Gell-Mann e Low ha delle applicazioni che prescindono dalle considerazioni sull'accensione della perturbazione: il risultato fondamentale che da esso si ottiene, riguardante l'operatore di scattering, può però essere approfondito a partire da considerazioni di carattere generale per sistemi adiabatici. Per questo motivo ulteriori risultati andrebbero contestualizzati nella teoria di campo e dell'interazione a molti corpi come si introduce nella sezione 3.5, per verificare ed approfondire il significato degli strumenti che dal Teorema di Gell-Mann possono essere ricavati.

La trattazione esemplificativa svolta nel caso delle matrici  $2 \times 2$  mette in evidenza il comportamento della funzione d'accensione esponenziale, sia nella rappresentazione adiabatica che nell'evoluzione temporale. Ci aspettiamo che anche nel caso  $3 \times 3$  tale accensione determini un andamento analogo, seppure più difficile da trattare per la sovrapposizione degli effetti relativi a stati differenti della perturbazione, che è definita con più di un grado di libertà. Si possono cercare soluzioni analitiche o approssimate del problema a tre stati, muovendo da parametrizzazioni di  $U(3)$  o studiando delle sovrapposizioni di funzioni di Bessel. Ma questo caso non banale resta interessante per le implicazioni che dal caso bidimensionale possono non essere evidenti.

## Bibliografia

- [1] T. Kato, J. Phys. Soc. Japan **5**, 435 (1950)
- [2] M. Gell-Mann and F. Low, Phys. Rev. **84**, 350 (1951)
- [3] G. Nenciu and G. Rasche, Helv. Phys. Acta **62**, 372 (1989)
- [4] L. G. Molinari, J. Math. Phys. **48**, 052113 (2007)
- [5] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol. II, North Holland, Amsterdam 1981
- [6] A. Galindo and P. Pascual, *Quantum Mechanics*, Vol. I-II, Springer-Verlag, New York, 1990-1991
- [7] H. Suura, Y. Mimura and T. Kimura, Prog. Theor. Phys. **7**, 171 (1952)
- [8] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems*, McGraw-Hill, New York, 1971
- [9] S. Teufel, *Adiabatic Perturbation Theory in Quantum Dynamics*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1821, Springer-Verlag, New York, 2003
- [10] C. Brouder, G. Stoltz and G. Panati, Phys. Rev. A **78**, 042102 (2008)
- [11] C. Brouder, G. Panati and G. Stoltz, Ann. Henri Poincaré **10**, 1285 (2010)
- [12] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I-II-IV, Academic Press, New York, 1972-1975-1978
- [13] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics, Revised Edition*, Addison-Wesley, 1993