



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

LOCALIZZAZIONE DI MATRICI INVERSE E
APPLICAZIONI A MATRICI LAPLACIANE
DI RETICOLO

Relatore:
Prof. Luca Guido MOLINARI

Elaborato finale di:
Andrea RIVA
Matricola 810685

PACS: 02.10.Yn
03.65.-w
11.15.Ha

ANNO ACCADEMICO 2014 - 2015

Indice

Introduzione	1
1 Il teorema di Demko-Moss-Smith	4
1.1 Approssimazione della funzione $1/x$	4
1.2 Inverse di matrici a banda	6
1.3 Il caso non positivo e di matrici sparse	9
1.3.1 Problematiche delle stime	12
2 Matrici di trasferimento ed esponenti di Lyapunov	15
2.1 Relazione di dualità	15
2.2 Limiti esponenziali sui valori singolari	17
2.3 Matrici casuali	22
2.3.1 Tasso di decadimento	25
3 Hamiltoniane a banda	29
3.1 L'operatore di Laplace discreto	29
3.1.1 Il risolvente	31
3.2 Il modello di Harper	37
3.2.1 Invarianza di gauge su reticolo	37
3.2.2 Localizzazione degli autostati	41
Conclusioni	45
Bibliografia	46

Introduzione

Nel presente lavoro vengono studiate le proprietà di localizzazione delle inverse di una particolare classe di matrici, chiamate a banda. Tale problema è stato oggetto di svariati studi nel passato, soprattutto ad opera di Meurant [12] e Nabben [18]. Le matrici a banda rivestono infatti un ruolo importante non solo in matematica, dove trovano applicazioni perlopiù nella soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali, ma anche in fisica. In particolare un sistema hamiltoniano discreto unidimensionale con interazione a k vicini è rappresentato in maniera naturale attraverso una matrice $(2k+1)$ -diagonale. Più in generale sono inclusi in una descrizione di questo tipo i modelli di reticolo in d dimensioni, di volume n^d , la cui larghezza di banda risulta pari a kn^{d-1} . L'inversione di tali matrici riveste dunque un ruolo fondamentale nell'ambito di questi sistemi, ogniqualvolta sia necessario calcolare il risolvente dell'hamiltoniana.

Nel prima parte della tesi tutta l'attenzione è rivolta a un risultato ottenuto da Demko, Moss e Smith [2]. Essi riescono a stimare la velocità con cui decadono a zero allontanandosi dalla diagonale principale gli elementi di una qualunque matrice a banda, tanto di rango finito quanto infinito, intendendo con ciò endomorfismi limitati su uno spazio di Hilbert separabile. Il loro studio si basa su alcune conclusioni di teoria spettrale degli operatori autoaggiunti, combinate con un risultato sull'approssimazione uniforme mediante polinomi della funzione $1/x$, ottenuta originariamente da Chebychev e descritta da Meinardus [1]. Una volta ricavato parzialmente questo risultato di teoria dell'approssimazione, viene dimostrato il teorema di DMS, inizialmente valido soltanto per operatori definiti positivi ed esteso poi a qualunque operatore a banda invertibile tramite l'identità $A^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}$. Dopo aver enunciato un'ulteriore generalizzazione applicabile alla classe di matrici con un gran numero di elementi nulli, dette matrici sparse, il capitolo si chiude con un'analisi dei limiti di applicabilità del teorema, analizzati in termini del numero di condizionamento, usato in analisi numerica per descrivere la bontà di un'approssimazione.

Una generica matrice a banda codifica un sistema di equazioni lineari, che può essere riscritto nella forma di un'equazione ricorsiva per le componenti del vettore soluzione, con l'introduzione di determinate condizioni al contorno. Questa equazione può essere risolta grazie a un'opportuna matrice di trasferimento, costruita moltiplicando un numero di fattori pari alla dimensione della matrice di partenza. Nella prima sezione del capitolo 2 viene messa in luce una relazione di dualità trovata da Molinari [7], che lega gli autovalori della matrice a banda (livelli energetici del sistema), agli autovalori della matrice di trasferimento (che sintetizzano le condizioni al contorno imposte al problema). Il risultato sulle matrici sparse del

capitolo 1 viene poi impiegato per trovare dei vincoli esponenziali sui valori singolari della matrice di trasferimento associata al problema con condizioni al contorno periodiche. Nell'ultima sezione, dopo una parentesi di teoria di probabilità, viene enunciato il cosiddetto teorema di Osceledec, che introduce l'importante concetto di esponenti di Lyapunov, definiti come opportuni limiti dei valori singolari della matrice di trasferimento. In particolare esso afferma che se il sistema è ergodico, il prodotto di un gran numero di matrici casuali agisce su un generico vettore dilatandolo o contraendolo di un fattore esponenziale determinato dagli esponenti di Lyapunov, che non dipendono dalla realizzazione di tale prodotto, ma solo dalla sua distribuzione. Infine, tenendo conto dei limiti sui valori singolari della matrice di trasferimento forniti dal teorema di DMS e del loro legame con gli esponenti di Lyapunov, viene mostrato con delle semplici analisi numeriche come questi ultimi stabiliscano il vero tasso di decadimento esponenziale degli elementi dell'inversa di una generica matrice a banda.

Nel capitolo 3 vengono studiate due situazioni particolari con le quali è possibile confrontare le stime trovate a partire dal teorema di DMS. Innanzitutto viene analizzato il problema dell'inversione del laplaciano di reticolo, ottenuto discretizzando l'operatore di Laplace in modo da passare dallo spazio $L^2(\mathbb{R}^m)$ a \mathbb{R}^{mn} . In questo caso, sfruttando il teorema dei residui applicato alla funzione di Green del reticolo, è possibile trovare delle espressioni analitiche per gli elementi del risolvete del laplaciano discreto, che possono essere confrontate direttamente con le previsioni teoriche dei precedenti capitoli. In secondo luogo viene preso in considerazione il cosiddetto modello di Harper, che descrive il moto di una particella carica in un reticolo bidimensionale con interazione a primi vicini soggetto a un campo magnetico trasversale. Dopo aver chiarito i problemi derivanti dall'implementazione del campo di gauge A_μ su uno spazio discreto, derivando il cosiddetto path ordered exponential, viene ricavata l'hamiltoniana del sistema, rappresentata da un'opportuna matrice tridiagonale. I concetti studiati nei capitoli 1 e 2 vengono infine applicati allo studio della transizione di fase del modello di Harper, determinata dall'incommensurabilità tra la periodicità del reticolo e del potenziale. Grazie agli esponenti di Lyapunov, che determinano la lunghezza di localizzazione delle funzioni d'onda, viene evidenziato il passaggio da autofunzioni estese (metallo) ad autofunzioni localizzate (isolante), al variare di un parametro descrivente le anisotropie del reticolo [17].

Capitolo 1

Il teorema di Demko-Moss-Smith

In questo capitolo vengono trattate alcune proprietà delle matrici a banda, che in questo contesto possono essere interpretate come hamiltoniane di un sistema discreto. Sfruttando un'idea di Chebychev di teoria dell'approssimazione unita a elementi di analisi funzionale viene dimostrato che gli elementi dell'inversa di una matrice a banda sono vincolati a decadere esponenzialmente lontano dalla diagonale principale, risultato ottenuto originariamente da Demko, Moss e Smith.

Vengono in seguito studiate due generalizzazioni del suddetto teorema, che permettono di trattare una classe più ampia di matrici rinunciando all'ipotesi di positività e comprendendo le cosiddette matrici sparse. Le conclusioni ottenute vengono infine raggruppate grazie alla nozione di numero di condizionamento, utilizzata perlopiù nell'ambito dell'analisi numerica, con la quale vengono messi in luce i limiti di applicabilità dei risultati trovati.

1.1 Approssimazione della funzione $1/x$

Indichiamo con P_n l'insieme dei polinomi di grado non superiore a n (nel nostro caso polinomi a valori reali o complessi e polinomi a valore di operatore), e con $\mathcal{C}(I)$ l'insieme delle funzioni continue sull'intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Il simbolo $\|\cdot\|_\infty^I$ denota la norma uniforme su $\mathcal{C}(I)$, definita per ogni funzione f appartenente a questo spazio da

$$\|f\|_\infty^I = \sup_{x \in I} |f(x)|. \quad (1.1)$$

Una volta scelto il dominio (tipicamente un intervallo I) e il grado del polinomio, l'obiettivo principale in teoria dell'approssimazione consiste nel minimizzare la quantità

$$\max_{x \in I} |p_n(x) - f(x)|,$$

ovvero nel trovare il polinomio $p_n \in P_n$ che renda il più piccolo possibile l'errore peggiore ϵ dell'approssimazione. In base al teorema di approssimazione di Stone-Weierstrass si può dimostrare che per funzioni sufficientemente regolari definite su un intervallo compatto esiste un polinomio di grado n che le interpola in $n + 1$ punti, e al quale è associata una curva dell'errore che oscilla in $[-\epsilon, \epsilon]$ un totale di $n + 2$ volte.

In questa sede siamo interessati a un risultato di Chebychev riguardante l'approssimazione uniforme mediante polinomi della funzione $(x-a)^{-1}$ su un intervallo compatto. Infatti, vogliamo giungere nel seguito a caratterizzare gli elementi dell'inversa A^{-1} di una generica matrice a banda A , grazie a un teorema ottenuto da Demko, Moss e Smith che ne descrive il decadimento lontano dalla diagonale principale. È bene aggiungere che oltre a questo caso specifico sono state studiate approssimazioni polinomiali per altre funzioni f , come per esempio e^{-tx} con $t > t_0$ [19], che se applicate al contesto di una matrice a banda possono a loro volta portare a dei vincoli esponenziali per gli elementi della matrice $f(A)$.

Lemma 1.1.1. *Siano $f(x) = 1/x$ ($x > 0$), $0 < a < b$ e $r \equiv b/a$. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste uno e un solo $p_n \in P_n$ tale che*

$$e_n(f) \equiv \inf_{p \in P_n} \|f - p\|_{\infty}^{[a,b]} = \|f - p_n\|_{\infty}^{[a,b]}, \quad (1.2)$$

e si ha

$$e_n(f) = Cq^{n+1} \quad (1.3)$$

$$C = \frac{(\sqrt{r} + 1)^2}{2b} \quad q = \frac{\sqrt{r} - 1}{\sqrt{r} + 1}. \quad (1.4)$$

Oltre ad affermare che il miglior polinomio approssimante esiste, questo lemma mostra che l'approssimazione migliora esponenzialmente con il grado del polinomio.

Al posto della dimostrazione (cfr. [1], p. 33) riportiamo un calcolo più esplicito che sfrutta i cosiddetti polinomi di Chebychev di I tipo, definiti dalla relazione $T_k(\cos \theta) \equiv \cos(k\theta)$. Questo calcolo è svolto sullo spazio $L^2[-1, 1]$ delle funzioni a quadrato sommabili, definito dalla condizione sulla norma

$$\|f\|_2 \equiv \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

con f funzione a valori reali o complessi misurabile sull'intervallo $[-1, 1]$. Nonostante questo approccio non permetta di trovare le costanti migliori dell'approssimazione fornite dal lemma 1.1.1, ne mette comunque in luce l'andamento esponenziale.

Per procedere sfruttiamo la proprietà di ortogonalità sull'intervallo $[-1, 1]$ dei polinomi di Chebychev

$$\int_{-1}^1 \frac{T_r(x)T_s(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad r \neq s,$$

grazie alla quale è possibile scrivere lo sviluppo della funzione $f \in L^2[-1, 1]$ nella forma

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(x), \quad (1.5)$$

con

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (1.6)$$

Nel nostro caso poniamo $f(x) = (\cosh \xi + x)^{-1}$ e sfruttando il teorema dei residui otteniamo

$$c_k = (-1)^k \frac{2}{\sinh \xi} e^{-k\xi}.$$

Per trovare l'errore commesso nell'approssimazione della funzione al grado n , considerando che i polinomi $T_k(x)$ sono di grado k , è sufficiente calcolare la somma parziale fino all' n -esimo termine del nostro sviluppo. Con alcuni passaggi di pura algebra si giunge al risultato

$$\sum_{k=0}^n c_k T_k(x) = \frac{1}{\cosh \xi + x} + \left[e^{-(n+1)\xi} \frac{(-1)^n e^\xi T_{n+1}(x) + T_n(x)}{\sinh \xi \cosh \xi + x} \right].$$

L'argomento delle parentesi quadre rappresenta l'errore $\delta_n(\xi)$ del troncamento, che può essere riscritto nella forma

$$|\delta_n(\xi)| \leq e^{-(n+1)\xi} \frac{1}{\sinh \xi} \frac{e^\xi + 1}{\cosh \xi - 1}, \quad (1.7)$$

avendo sfruttato la proprietà dei polinomi di Chebychev

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = 1.$$

Questo risultato non consiste nella miglior approssimazione della funzione $(x - a)^{-1}$, poichè non si ritrovano le costanti (1.4) definite nel lemma 1.1.1. Nonostante ciò, il termine $e^{-n\xi}$ permette di apprezzare il miglioramento esponenziale dell'approssimazione al crescere del grado del polinomio approssimante.

1.2 Inverse di matrici a banda

Prima di proseguire è bene chiarire la notazione che verrà utilizzata da qui in avanti. Indichiamo con $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'insieme degli endomorfismi limitati sullo spazio di Hilbert complesso $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con $\|\cdot\|_2$ la norma hilbertiana definita su \mathcal{H} da $\|x\|_2 = \langle x, x \rangle^{1/2}$ e con $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ la norma operatoriale uniforme su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\|A\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

Inoltre usiamo $\ell^2(S)$ per indicare lo spazio di Hilbert delle successioni $\{u_n\}_{n \in S}$ a valori complessi definite su S tali che

$$\sum_{n \in S} |u_n|^2 < \infty.$$

Per $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e \mathcal{H} separabile (uno spazio di Hilbert è separabile se e solo se ammette una base ortonormale numerabile) definiamo *elemento di matrice* (i, j) di A rispetto alla base $\{e_i\}$ di \mathcal{H} il numero

$$A(i, j) = \langle e_i, Ae_j \rangle.$$

Se $\mathcal{H} = 1, \dots, N$ per qualche $N \in \mathbb{N}$ la matrice $(A(i, j)) \in M_N(\mathbb{K})$ è detta *matrice rappresentativa* dell'operatore A rispetto alla base scelta, avendo indicato con $M_N(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici quadrate di dimensione N sul campo \mathbb{K} . La matrice $(A(i, j))$ e l'operatore A sono legati da un isomorfismo che permette di confondere l'uno con l'altro, discorso che si estende senza problemi al caso infinito-dimensionale a patto che \mathcal{H} sia separabile.

Un operatore (matrice) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è detto *k-banded* se esiste una base $\{e_i\}$ di \mathcal{H} tale che

$$\forall i, j \notin [i-l, i-l+k] \cap \mathbb{N} \implies A(i, j) = 0. \quad (1.8)$$

per qualche $l, k \in \mathbb{Z}$. Se k è pari e il numero l può essere scelto uguale a $k/2$, si dice che A è *centrato*. Per una matrice centrata la condizione (1.8) si riscrive come

$$\forall i, j : |i-j| > \frac{k}{2} \implies A(i, j) = 0. \quad (1.9)$$

Ad esempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

è centrata e 2-banded (o *tridiagonale*).

Siamo ora interessati a caratterizzare gli elementi di matrice dell'inverso di un qualsiasi operatore a banda: in particolare mostriamo che è possibile ottenere un limite superiore che ne vincola il valore assoluto. Per fare ciò Demko, Moss e Smith [2] combinano il lemma 1.1.1 con la teoria spettrale degli operatori limitati, di cui enunciamo qui tre risultati che saranno utili in seguito.

Prima di procedere, indicando con $\sigma(A)$ lo spettro dell'operatore A , diciamo che se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora A è *definito positivo* se

$$\sigma(A) \subset [m, M] \quad 0 < m \leq M. \quad (1.11)$$

Lemma 1.2.1. *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è definito positivo come in (1.11), allora è anche autoaggiunto, invertibile e $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Dimostrazione. Per l'autoaggiuntezza si veda [5], p.195. Per l'invertibilità sfruttiamo il fatto che se A è definito positivo tutti i suoi autovalori sono positivi. Dato che 0 non è un autovalore di A il sistema di equazioni $Ax = 0$ non ha soluzioni non banali, perciò A è invertibile.

La limitatezza di A^{-1} è assicurata da un corollario del teorema della funzione aperta, noto come teorema dell'inverso limitato: se A è un operatore lineare limitato e iniettivo tra spazi di Banach, allora A^{-1} è limitato (cfr. [4], p. 49). \square

Lemma 1.2.2. *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è autoaggiunto e p è un polinomio, si ha*

$$\|p(A)\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)|,$$

in particolare

$$\|A\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Dimostrazione. Si veda [5], pp. 192 e 233. \square

In quest'ultimo lemma compaiono i polinomi a valore di operatore $p(A)$ ottenuti sostituendo a ogni potenza x^n nel polinomio $p(x)$ il rispettivo prodotto di operatori $A^n = AA \cdots A$ (n volte). In base a quanto affermato nella prima sezione, ogni funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua sul suo dominio compatto può essere approssimata uniformemente da una successione di polinomi $\{p_n\}$. Dal momento che possiamo costruire polinomi a valore di operatore $p(A)$, possiamo definire anche le funzioni a valore di operatore $f(A)$ come limite uniforme della successione $\{p_n(A)\}$. È possibile dimostrare che tale definizione è indipendente dalla scelta particolare di $\{p_n\}$. Nel nostro caso è sufficiente limitarsi agli operatori limitati e autoaggiunti, il cui spettro è contenuto in un intervallo compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

In quest'ottica possiamo generalizzare il lemma precedente con il seguente

Lemma 1.2.3. *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è autoaggiunto e se $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua, allora*

$$\|f(A)\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|.$$

Dimostrazione. Si veda [5], p. 222. \square

Corollario 1.2.4. *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è definito positivo come in (1.11), si ha*

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \left| \frac{1}{\lambda} \right|.$$

Dimostrazione. Il membro sinistro esiste grazie al lemma 1.2.1 e la funzione $f(x) = 1/x$ è continua su $\sigma(A) \not\ni 0$, perciò applicando il lemma 1.2.3 si ottiene la tesi. \square

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per enunciare il teorema principale di questo capitolo

Teorema 1.2.5 (di Demko, Moss e Smith). *Sia $A \in \mathcal{B}(\ell^2(S))$ con $S \subseteq \mathbb{Z}$, A definito positivo come in (1.11) e k -banded. Se $a = \min \sigma(A)$ e $b = \max \sigma(A)$ ($0 < a \leq b < \infty$) allora*

$$|A^{-1}(i, j)| \leq \begin{cases} C\lambda^{|i-j|} & \text{se } i \neq j \\ 1/a & \text{se } i = j \end{cases} \quad (1.12)$$

dove $\lambda = q^{2/k}$, $r = b/a$ e C, q sono definiti in (1.4).

Dimostrazione. Dato che A è definito positivo allora è autoaggiunto (e in particolare simmetrico), invertibile e con inverso limitato per il lemma 1.2.1, dunque oltre a essere a banda A è anche centrato (cfr. (1.9)). Se A è k -banded, A^r è rk -banded $\forall r = 0, 1, \dots$, e lo stesso vale per $p_r(A)$ se $p_r \in P_r$. Pertanto $p_r(A)(i, j) = 0$ ogniqualvolta

$$|i - j| > \frac{rk}{2}. \quad (1.13)$$

Fissiamo (i, j) con $i \neq j$ e prendiamo il più grande intero che verifichi la condizione (1.13), cioè

$$r = \left\lceil \frac{2|i-j|}{k} \right\rceil - 1.$$

Possiamo usare il fatto che $p_r(A)(i, j) = 0$ per scrivere

$$|A^{-1}(i, j)| = |A^{-1}(i, j) - p_r(A)(i, j)| \leq \|A^{-1} - p_r(A)\|_{\mathcal{B}} = \sup_{x \in \sigma(A)} \left| \frac{1}{x} - p_r(x) \right|$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso dei lemmi 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3. Poiché l'estremo superiore preso su $\sigma(A)$ è minore o uguale a quello preso su $[a, b] \supset \sigma(A)$, è possibile maggiorare il membro più a destra con $e_n(f)$ (cfr. (1.15) e (1.18)) prendendo come p_r il polinomio in P_r che meglio approssima la funzione $1/x$ su $[a, b]$, che esiste ed è unico per il lemma 1.1.1. Facendo ciò e sfruttando il fatto che $r + 1 \geq 2|i-j|/k$ e $q < 1$, si ottiene

$$|A^{-1}(i, j)| \leq Cq^{r+1} \leq Cq^{2|i-j|/k}.$$

La dimostrazione si completa osservando che per $i = j$ vale

$$|A^{-1}(i, j)| \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{B}} = \frac{1}{a}.$$

□

1.3 Il caso non positivo e di matrici sparse

In questa sezione enunciamo due generalizzazioni alquanto importanti del teorema di Demko, Moss e Smith. La prima estensione si ottiene rinunciando all'ipotesi di positività dell'operatore a banda $A > 0$: questo è possibile osservando che

$$A^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}, \tag{1.14}$$

dove A^* denota il coniugato hermitiano di A . Illustriamo il risultato con il seguente teorema, specializzato al caso di operatori tridiagonali *a blocchi*, cioè del tipo

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & & \\ A_{21} & A_{22} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} & \\ & & A_{n,n-1} & A_{nn} & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

con $A_{i,j} \in M_m(\mathbb{C}) \forall i, j$. Specifichiamo che la definizione di operatore a banda a blocchi si ottiene da (1.8) sostituendo $A(i, j) = 0$ con $A_{ij} = \mathbb{O}$.

Teorema 1.3.1. *Sia $A \in \mathcal{B}(\ell^2(S))$ con $S \subseteq \mathbb{Z}$, tridiagonale a blocchi come in (1.15) e invertibile. Se $a = \min \sigma(A^*A)$ e $b = \max \sigma(A^*A)$ ($0 < a \leq b < \infty$), indicando con $A^{-1}[i, j]$ l'elemento più grande in valore assoluto all'interno del blocco A_{ij} ($i \neq j$), allora*

$$|A^{-1}[i, j]| \leq C_i q^{|i-j|/2} \quad (1.16)$$

$$C_i = \frac{C}{\sqrt{q}} m(\|A_{i-1,i}\|_{\mathcal{B}} + \|A_{ii}\|_{\mathcal{B}} + \|A_{i+1,i}\|_{\mathcal{B}}), \quad (1.17)$$

dove C e q sono definite da (1.4) con a e b come in questo teorema, facendo attenzione a porre $A_{ij} = \mathbb{O}$ nel caso in cui risulti mal definita (per esempio A_{01} e $A_{n+1,n}$).

Dimostrazione. Consideriamo il caso più generale in cui A è un'operatore centrato k -banded a blocchi. Per comodità chiamiamo $(AA^*)^{-1} \equiv B$ e ci concentriamo sul blocco B_{ij} . Questo è una matrice $m \times m$ di cui possiamo maggiorare la norma: se v è un vettore unitario in $\ell^2(S)$ di componenti $\{v_y\}_{y \in S}$ vale che

$$\|B_{ij}v\|^2 = \sum_x \left| \sum_y B(x, y)v_y \right|^2,$$

dove $m(i-1) + 1 \leq x \leq mi$ e $m(j-1) + 1 \leq y \leq mj$. Sfruttando dapprima la disuguaglianza triangolare e poi la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz l'argomento della prima sommatoria diventa

$$\left| \sum_y B(x, y)v_y \right|^2 \leq \left(\sum_y |B(x, y)| |v_y| \right)^2 \leq \left(\sum_y |B(x, y)|^2 \right) \left(\sum_y |v_y|^2 \right).$$

Questo, per il fatto che v è un vettore unitario, mostra che (omettendo il pedice \mathcal{B} alle norme)

$$\|B_{ij}\| \leq \left(\sum_x \sum_y |B(x, y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ora ricordando che B soddisfa le ipotesi del teorema 1.2.5, cosicché

$$|B(x, y)| \leq |B[i, j]| \leq C\lambda^{|i-j|}$$

(si tenga presente che C e q sono definite rispetto alla matrice AA^* , e che essendo questa $2k$ -banded $\lambda = q^{1/k}$) abbiamo $\|B_{ij}\| \leq mCq^{|i-j|/k}$. A questo punto la struttura a banda dell'operatore A fa sì che si possa scrivere

$$A_{ij}^{-1} = \sum_{r=-k/2}^{k/2} (A_{i,i+r}^* B_{i+r,j})$$

grazie a cui si ottiene (utilizzando $\|A_{ij}^*\| = \|A_{ij}\|$ e la simmetria dell'operatore A)

$$\begin{aligned} \|A_{ij}^{-1}\| &\leq \sum_{r=-k/2}^{k/2} (\|A_{i+r,i}\| \|B_{i+r,j}\|) \leq mC \sum_{r=-k/2}^{k/2} (\|A_{i+r,i}\| q^{|i-j+r|/k}) \\ &\leq m \frac{C}{\sqrt{q}} \left(\sum_{r=-k/2}^{k/2} \|A_{i+r,i}\| \right) q^{|i-j|/k} \end{aligned}$$

dove nell'ultima maggiorazione abbiamo usato $|i - j + r| \geq |i - j| - |r| \geq |i - j| - k/2$ che vale solo se $|i - j| \geq k/2$. Ponendo $k = 2$ (caso tridiagonale a blocchi) si ottiene la tesi, poiché $|A^{-1}[i, j]| \leq \|A_{ij}^{-1}\|$. \square

Riassumiamo i risultati fin qui ottenuti riguardo al teorema di Demko, Moss e Smith in un unico enunciato, che sfrutta il cosiddetto *numero di condizionamento*, indicato con $\text{cond}(\cdot)$. In analisi numerica quest'ultimo, se associato a un'equazione lineare $Ax = b$, fornisce un limite sull'inaccuratezza della soluzione x a seguito di un'approssimazione. Se e rappresenta l'errore relativo su b , assumendo che la matrice A sia non singolare e che l'errore della soluzione $A^{-1}b$ sia $A^{-1}e$, il numero di condizionamento è definito come

$$\max \frac{\|A^{-1}e\| / \|A^{-1}b\|}{\|e\| / \|b\|}.$$

È facile osservare che

$$\text{cond}(A) = \|A\|_{\mathcal{B}} \|A^{-1}\|_{\mathcal{B}} \quad (1.18)$$

(qui A è un operatore limitato con inverso limitato, cfr. [3] p. 232) e dal momento che nello spazio $\mathcal{B}(\ell^2(S))$ vale $\|AA^*\|_{\mathcal{B}} = \|A\|_{\mathcal{B}}^2$ si ha che

$$\text{cond}(AA^*) = (\text{cond}(A))^2.$$

Teorema 1.3.2. *Sia $A \in \mathcal{B}(\ell^2(S))$, $S \subseteq \mathbb{Z}$, k -banded e con inverso limitato. Se A è definito positivo allora, per $i \neq j$,*

$$|A^{-1}(i, j)| \leq C\lambda^{|i-j|}$$

con

$$\lambda = \left(\frac{\sqrt{\text{cond}(A)} - 1}{\sqrt{\text{cond}(A)} + 1} \right)^{\frac{2}{k}} \quad C = \frac{(\sqrt{\text{cond}(A)} + 1)^2}{2\|A\|}.$$

Se viene a mancare la positività allora

$$|A^{-1}(i, j)| \leq C_1\lambda_1^{|i-j|}$$

con

$$\lambda_1 = \left(\frac{\sqrt{\text{cond}(A)} - 1}{\sqrt{\text{cond}(A)} + 1} \right)^{\frac{1}{k}}$$

per qualche costante C_1 , che può essere scelta pari a

$$C_1 = (1 + k)\lambda_1^{-k} \frac{(\text{cond}(A) + 1)^2}{2\|A\|}$$

nel caso in cui A sia quasi-centrato (cioè con la diagonale principale contenuta nelle bande non banali).

Notiamo che se $S = \mathbb{Z}^+$ o $S = \{1, \dots, N\}$ allora l'ipotesi che l'operatore sia quasi-centrato è ridondante, in quanto implicata dall'invertibilità. Se invece $S = \mathbb{Z}$ è possibile rendere A quasi-centrato tramite una reindicizzazione degli elementi di base.

La seconda estensione consiste in un teorema che generalizza i risultati di DMS al caso di matrici *sparse*: queste sono definite in maniera informale come matrici con "un gran numero di zeri". Per procedere, definiamo per ogni matrice $A \in \ell^2(S)$ gli insiemi *supporto*

$$S_n(A) = \bigcup_{k=0}^n \{(i, j) : A^k(i, j) \neq 0\}$$

e gli insiemi *decadimento*

$$D_n(A) = (S \times S) \setminus S_n(A). \quad (1.19)$$

Gli insiemi $D_n(A)$ contengono tutti i siti in cui si annullano sia A sia le sue potenze fino ad A^n , compresa l'identità. Quindi la successione di insiemi $\{D_n\}$ caratterizza il modo in cui gli elementi non nulli di A si "sparpagliano" a forza di moltiplicare A per sé stessa. Possiamo enunciare il seguente

Teorema 1.3.3. *Sia $A \in \mathcal{B}(\ell^2(S))$, $S \subseteq \mathbb{Z}$ definito positivo. Allora*

$$\sup_{(i,j) \in D_n(A)} |A^{-1}(i, j)| \leq Cq^{n+1},$$

dove C e q sono definiti in (1.8).

Dimostrazione. Prendendo $(i, j) \in D_n(A)$ segue dalla definizione di insieme di decadimento che $p_n(A)(i, j) = 0$ ogniqualvolta $p_n \in \mathcal{P}_n$. Prendiamo come p_n il miglior polinomio approssimante $1/x$ su $[a, b]$, con $0 < a \leq b < \infty$. Un ragionamento analogo a quello svolto nella dimostrazione del teorema 1.2.5 porta alla tesi (notiamo che necessariamente $i \neq j$ in quanto i siti del tipo (i, i) non appartengono ad alcun insieme di decadimento). \square

Nonostante l'implementazione più complicata, questo teorema fornisce vincoli più precisi per gli elementi dell'inverso di un operatore, non necessariamente a banda. Per esempio è in grado di prevedere l'andamento non monotono dell'inverso di operatori tridiagonali a blocchi, come vedremo nel capitolo 3, oppure può essere applicato a matrici a banda cicliche di dimensione n , cioè con elementi non nulli agli angoli $(1, n)$ e $(n, 1)$.

1.3.1 Problematiche delle stime

Consideriamo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se $E \notin \sigma(A)$ allora l'operatore $(A - E\mathbb{I})$ è invertibile e possiamo definire la funzione $R : \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ come

$$R(E, A) = (A - E\mathbb{I})^{-1},$$

chiamata *risolvente* di A . Grazie all'isomorfismo tra matrici quadrate e operatori appartenenti a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tutti i risultati ottenuti finora si applicano all'operatore

risolvente, che può essere visto come l'inverso di un qualunque operatore traslato di una quantità E . Non potendo quest'ultima appartenere al suo spettro, è interessante studiare cosa succede alle stime fornite da Demko, Moss e Smith quando il parametro complesso E si avvicina a un autovalore.

Nel caso definito positivo è immediato osservare che per $E \rightarrow \lambda_k$, con $\lambda_k \in \sigma(A)$, si ha

$$a = \min(\sigma(A - E\mathbb{I})) = \min_k(\lambda_k - E) \rightarrow 0.$$

Per quanto riguarda il caso non definito positivo, sfruttando l'autoaggiuntezza di A possiamo scrivere

$$(A - E\mathbb{I})(A - E\mathbb{I})^* = (A - E\mathbb{I})(A - \bar{E}\mathbb{I}) = A^2 - 2\operatorname{Re}(E)A + |E|^2,$$

i cui autovalori sono $\lambda_k^2 - 2\operatorname{Re}(E)\lambda_k + |E|^2$, tutti positivi visto che l'operatore $(A - E\mathbb{I})(A - E\mathbb{I})^*$ è definito positivo. Da ciò si vede che anche in questo caso la quantità $a = \min(\sigma((A - E\mathbb{I})(A - E\mathbb{I})^*))$ tende a zero per $E \rightarrow \lambda_k$.

Tenendo conto di queste osservazioni, analizziamo dunque l'andamento per $a \rightarrow 0$ delle costanti definite in (1.4) che compaiono nel teorema 1.2.5 e che ora dipendono dal parametro E , ottenendo

$$C(E) \sim \frac{1}{2a} \quad q(E) \sim 1 - 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Da queste formule si deduce che in ogni caso $C(E) \rightarrow \infty$ e $q(E) \rightarrow 1$ per $a \rightarrow 0$, ma mentre nel caso definito positivo a tende a zero linearmente, nel caso non definito positivo $a = \min((\lambda_k - \operatorname{Re}(E))^2 + \operatorname{Im}(E)^2)$ va a zero quadraticamente per $E \rightarrow \lambda_k$. Questo permette di concludere che i vincoli sul decadimento esponenziale degli elementi della matrice inversa diventano sempre meno significativi avvicinandosi agli autovalori del sistema, con un peggioramento più rapido nel caso non definito positivo.

In generale $C(E)$ e $q(E)$ hanno una dipendenza sconosciuta dalla dimensione della matrice n (o dal numero dei blocchi per una matrice a blocchi), dato che non si conoscono gli autovalori del problema. Per questo motivo un modo più generale di analizzare l'andamento dei limiti imposti dal teorema di DMS consiste nell'esaminare le costanti (1.4) scritte in termini del numero di condizionamento

$$C(E) = \frac{(\operatorname{cond}(A - E\mathbb{I}) + 1)^2}{2\|A - E\mathbb{I}\|_{\mathcal{B}}^2} \quad q(E) = 1 - \frac{2}{\operatorname{cond}(A - E\mathbb{I}) + 1},$$

avendo sfruttato l'uguaglianza $b = \sqrt{\max(\sigma((A - E\mathbb{I})(A - E\mathbb{I})^*))} = \|A - E\mathbb{I}\|_{\mathcal{B}}$. Per garantire che i suddetti vincoli rimangano significativi nel limite di grande n è necessario stimare la velocità con cui il numero $\operatorname{cond}(A - E\mathbb{I})$ tende a infinito. Ricordando che per il numero di condizionamento vale l'equazione (1.18), nel caso di matrice tridiagonale (è facile generalizzare al caso a blocchi) possiamo scrivere

$$\|A - E\mathbb{I}\|_{\mathcal{B}} \leq \left(\max_i (a_i - E)^2 + \max_i b_i^2 + \max_i c_i^2 \right)^{1/2},$$

dove a_i , b_i e c_i sono rispettivamente gli elementi diagonali, sottodiagonali e sopra-diagonali di A . Se gli elementi di matrice vengono scelti secondo una distribuzione

a supporto limitato questa formula fornisce un limite su $\|A - E\mathbb{I}\|_{\mathcal{B}}$ che è uniforme in n . In caso contrario la norma tende quasi certamente a infinito, dato che

$$\|A - E\mathbb{I}\|_{\mathcal{B}} \geq \max_{ij} (A - E\mathbb{I})_{ij}.$$

La velocità con cui questa norma tende a infinito dipende dalla particolare distribuzione, ma si può supporre che se essa è sufficientemente centrata con code esponenzialmente sopresse, la crescita di tale norma sia subesponenziale. La stima dell'andamento di $\|(A - E\mathbb{I})^{-1}\|_{\mathcal{B}}$ risulta invece più complicata, cosa che impedisce in generale di conoscere a priori l'efficacia dei vincoli imposti dal teorema di DMS nel limite $n \rightarrow \infty$.

Capitolo 2

Matrici di trasferimento ed esponenti di Lyapunov

Ogni matrice a banda genera in modo naturale una matrice di trasferimento, di dimensione pari alla semiampiezza di banda più uno, costruita come prodotto di un numero di fattori uguale alla dimensione della matrice di partenza. Nella prima sezione viene messa in luce l'esistenza di una relazione di dualità tra i polinomi caratteristici delle due matrici, che permette di legarne gli autovalori. In secondo luogo vengono sfruttati i risultati del capitolo precedente, e in particolare quelli riguardanti le matrici sparse, per trovare dei limiti esponenziali sui valori singolari della matrice di trasferimento. Questi determinano la crescita o la decrescita della norma degli autovettori di un sistema, e sono perciò di grande importanza nello studio di una sua evoluzione a partire da determinate condizioni iniziali.

In seguito vengono analizzate le proprietà di generiche matrici ottenute dal prodotto di un grande numero di matrici casuali, dimostrando che, sotto l'ipotesi di ergodicità del sistema, queste sono indipendenti dalla realizzazione esplicita di tale prodotto, essendo quasi certamente deterministiche. A questo scopo viene enunciato il teorema di Osceledec, con il quale si introduce l'importante concetto di esponente di Lyapunov, di primario interesse nel contesto di modelli con elementi stocastici, come in meccanica statistica o nell'ambito dello studio dei cristalli.

Nella parte conclusiva del capitolo, attraverso delle semplici analisi numeriche, vengono messi in relazione i risultati del primo capitolo e i concetti probabilistici dell'ultima sezione. In particolare viene mostrato come il più piccolo (in modulo) esponente di Lyapunov della matrice di trasferimento del sistema determini il vero tasso di decadimento esponenziale di una qualsiasi matrice a banda.

2.1 Relazione di dualità

Consideriamo una matrice tridiagonale a blocchi A invertibile del tipo (1.15), di dimensione mn , dove m è la dimensione di ciascun blocco. Chiamiamo u il vettore appartenente a \mathbb{R}^{mn} (o a \mathbb{C}^{mn}) della forma

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

dove ogni u_i ($i = 1, \dots, n$) è a sua volta un vettore di m componenti $(u_{i1}, \dots, u_{im})^T$. Un problema molto frequente in fisica consiste nel risolvere l'equazione agli autovalori per la matrice A

$$Au = Eu \quad (2.1)$$

che nel nostro caso può essere convenientemente riscritta nella forma

$$A_{k,k+1}u_{k+1} + A_{k,k}u_k + A_{k,k-1}u_{k-1} = Eu_k \quad k = 1, \dots, n$$

stando attenti a porre $A_{ij} \equiv \mathbb{I}_m$ e $u_j \equiv o$ (vettore nullo) ogniqualvolta risultino mal definite. Ricavando u_{k+1} dall'ultima equazione, possiamo porre questo sistema di n equazioni in forma matriciale, ottenendo così un'unica equazione ricorsiva con condizioni al contorno (dette in questo caso *condizioni di Dirichlet* di annullamento al contorno)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{k,k+1}^{-1}(E\mathbb{I} - A_{k,k}) & -A_{k,k+1}^{-1}A_{k,k-1} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k-1} \end{pmatrix} \\ u_0 = u_{n+1} = o \end{cases} \quad (2.2)$$

La soluzione si costruisce facilmente per iterazione, definendo la *matrice di k -trasferimento* $T_k = T_k(E)$ associata al problema

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^k \begin{pmatrix} A_{j,j+1}^{-1}(E\mathbb{I} - A_{j,j}) & -A_{j,j+1}^{-1}A_{j,j-1} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ o \end{pmatrix} \equiv T_k \begin{pmatrix} u_1 \\ o \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

È possibile riassumere quanto visto finora nella seguente

Proposizione 2.1.1. *Il vettore $u \neq o$ è un autovettore di A associato all'autovalore E se e solo se risolve il sistema ricorsivo (2.2), cioè se le sue componenti soddisfano le condizioni*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = T_k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} & k=1, \dots, n \\ u_0 = u_{n+1} = o \end{cases} \quad (2.4)$$

con T_k definita dall'equazione (2.3).

Questa proposizione rimane valida per qualunque scelta delle condizioni al contorno, a patto di modificare la seconda equazione del sistema per tenerne conto. Ad esempio è di grande interessa in fisica il caso di condizioni al contorno periodiche, implementate attraverso la richiesta che la soluzione soddisfi il sistema

$$\begin{cases} u_{n+1} = zu_1 \\ u_0 = \frac{1}{z}u_n \end{cases} \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.5)$$

che esprime le *condizioni di Bloch* di un reticolo periodico infinito ponendo $z = e^{i\phi}$. Sfruttando il formalismo della proposizione 2.1.1 queste equazioni sono equivalenti a

$$T_n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix},$$

che è un'equazione agli autovalori per la matrice di trasferimento, e sono codificate dalla matrice *tridiagonale ciclica*

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & C_1/z \\ C_2 & A_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & B_{n-1} \\ zB_n & & C_n & A_n \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La proposizione 2.1.1 afferma che un vettore u risolve l'equazione agli autovalori per $A(z)$ con autovalore E , se e solo se risolve anche quella per $T_n(E)$ con autovalore z . Questo si traduce in una relazione tra i polinomi caratteristici della matrice tridiagonale a blocchi e della sua matrice di trasferimento, che risultano essere multipli possedendo gli stessi zeri nel piano complesso. Questo legame di dualità viene esplicitato nel seguente

Teorema 2.1.2 (di dualità). *Data $A(z)$ come in (2.6) e $T_n(E)$ sua matrice di trasferimento allora*

$$\det[z\mathbb{I}_{2m} - T_n E] = (-z)^m \frac{\det[E\mathbb{I}_{mn} - A(z)]}{\det[B_1 B_2 \cdots B_n]}.$$

Dimostrazione. Si veda [7] p. 7. □

Gli autovalori di $A(z)$ fanno annullare il membro destro dell'equazione, ovvero esiste almeno un fattore complesso $z_i(E) - z = 0$. Questo significa che un autovalore E si trova sull'intersezione di una linea $|z_i(E)| = |z|$ e $\arg z_i(E) = \arg z$. Facendo variare soltanto il parametro $\arg z$ gli autovalori si muovono lungo *linee spettrali* $|z_i(E)| = |z|$. Per matrici tridiagonali ($m = 1$) si ha una singola curva spettrale, per $m > 1$ invece ne appaiono diverse.

2.2 Limiti esponenziali sui valori singolari

Abbiamo mostrato che ogni matrice tridiagonale a blocchi $mn \times mn$ definisce in modo naturale come prodotto di n fattori una matrice di trasferimento di dimensione $2m \times 2m$ (in generale una matrice k -banded a blocchi genera una matrice di trasferimento di dimensione $km \times km$). Per poter applicare le conclusioni del precedente capitolo alla matrice di trasferimento però, è necessario calcolare quest'ultima attraverso un'inversione anziché tante moltiplicazioni.

A tale scopo definiamo la matrice risolvente del problema con condizioni di Dirichlet $g(E) = (A^0 - E\mathbb{I}_{mn})^{-1}$, dove A^0 è una matrice tridiagonale a blocchi del tipo (2.6), con $B_n \equiv C_1 \equiv \mathbb{O}$, e mostriamo che è legata alla matrice di trasferimento del problema periodico. Chiamando g_{ij} la matrice complessa $m \times m$ che costituisce il blocco (i, j) di g ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) vale il seguente risultato

Lemma 2.2.1.

$$T_n(E) = \begin{pmatrix} -B_n^{-1}(g_{1n})^{-1} & -B_n^{-1}(g_{1n})^{-1}g_{11}C_1 \\ g_{nn}(g_{1n})^{-1} & g_{nn}(g_{1n})^{-1}g_{11}C_1 - g_{n1}C_1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Dimostrazione. Esplicitiamo la relazione $g(\lambda)(A^0 - E\mathbb{I}) = \mathbb{I}_{mn}$ per i singoli blocchi $i = 2, \dots, n-1$ ottenendo le relazioni di ricorsione

$$C_i g_{i-1,j} + (A_i^0 - E\mathbb{I}_m) g_{i,j} + B_i g_{i+1,j} = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Queste possono essere risolte con il metodo della matrice di trasferimento, che fornisce una relazione matriciale tra i blocchi agli angoli

$$\begin{pmatrix} g_{n1} & g_{nn} \\ g_{n-1,1} & g_{n-1,n} \end{pmatrix} = t_{n-1} \cdots t_2 \begin{pmatrix} g_{21} & g_{2n} \\ g_{11} & g_{1n} \end{pmatrix},$$

dove

$$t_k(E) = \begin{pmatrix} -B_k^{-1}(A_k^0 - E\mathbb{I}_m) & -B_k^{-1}C_k \\ \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m \end{pmatrix}$$

è il k -esimo fattore nella definizione (2.3) della matrice di trasferimento T_n . Moltiplicando a sinistra entrambi i membri per t_n e sfruttando l'identità $C_n g_{n-1,j} + (A_n^0 - E\mathbb{I}_m) g_{nj} = \delta_{nj} \mathbb{I}_m$ ($j = 1, \dots, n$), dove δ_{nj} è la delta di Kronecker, il membro sinistro diventa

$$\begin{pmatrix} -B_n^{-1}(A_n^0 - E\mathbb{I})g_{n1} - B_n^{-1}C_n g_{n-1,n} & -B_n^{-1}(A_n^0 - E\mathbb{I})g_{nn} - B_n^{-1}C_n g_{n-1,n} \\ g_{n1} & g_{nn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -B_n^{-1} \\ g_{n1} & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Inseriamo $t_1 t_1^{-1}$ dopo t_2 a secondo membro e usiamo l'identità $B_1 g_{2j} + (A_1^0 - E\mathbb{I}_m) g_{1j} = \delta_{1j} \mathbb{I}_m$ ($j = 1, \dots, n$), in questo modo si ottiene

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & -B_n^{-1} \\ g_{n1} & g_{nn} \end{pmatrix} = T_n E \begin{pmatrix} g_{11} & g_{1n} \\ -C_1^{-1} & \mathbb{O}_m \end{pmatrix},$$

e dato che

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{1n} \\ -C_1^{-1} & \mathbb{O}_m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & -C_1 \\ (g_{1n})^{-1} & (g_{1n})^{-1} g_{11} C_1 \end{pmatrix}$$

arriviamo a

$$\begin{aligned} T_n(E) &= \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & -B_n^{-1} \\ g_{n1} & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & -C_1 \\ (g_{1n})^{-1} & (g_{1n})^{-1} g_{11} C_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -B_n^{-1}(g_{1n})^{-1} & -B_n^{-1}(g_{1n})^{-1} g_{11} C_1 \\ g_{nn}(g_{1n})^{-1} & -g_{n1} C_1 + g_{nn}(g_{1n})^{-1} g_{11} C_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

È immediato notare che nell'enunciato di questo lemma E non può essere un autovalore di A^0 , poiché la matrice g non risulterebbe definita.

Ci proponiamo ora di applicare i risultati sulla localizzazione trovati nel primo capitolo alla matrice $g(E) = (A^0 - E\mathbb{I})^{-1}$. Come abbiamo anticipato (lo verificheremo esplicitamente nel capitolo 3), a differenza del teorema di DMS standard applicato alle matrici a banda, quando si considerano matrici k -banded a blocchi il teorema 1.3.3 sulle matrici sparse è in grado di fornire vincoli più accurati

sugli elementi dell'inversa, che rispecchiano in particolare il suo decadimento non monotono allontanandosi dalla diagonale principale. Siamo dunque intenzionati a sfruttare questo teorema per ottenere una maggiorazione sulla norma del blocco g_{1n} , che ci consentirà di ottenere opportuni vincoli sulla matrice di trasferimento $T_n(E)$ tramite la relazione $T_{11}^{-1} = -g_{1n}B_n$ ottenuta grazie al lemma 2.2.1.

Consideriamo la matrice $(A^0 - E\mathbb{I})^{-1}$ tridiagonale a blocchi non definita positiva, grazie all'uguaglianza (1.14) e alla struttura a banda possiamo scrivere

$$\|g_{1n}\| \leq \|A_1 - E\| \left\| ((A^0 - E\mathbb{I})(A^0 - E\mathbb{I})^*)_{1n}^{-1} \right\| + \|C_2\| \left\| ((A^0 - E\mathbb{I})(A^0 - E\mathbb{I})^*)_{2n}^{-1} \right\|.$$

Sfruttando il teorema 1.3.3 di DMS applicato alle matrici sparse calcoliamo una maggiorazione per $\left\| ((A^0 - E\mathbb{I})(A^0 - E\mathbb{I})^*)_{1n}^{-1} \right\|$. Per fare ciò è necessario conoscere a quale insieme di decadimento D_k (1.19) appartiene ciascun elemento del blocco $1n$ della matrice in questione, in modo da poter sostituire a ognuno di essi il valore approssimato migliore nel calcolo della norma.

Dato che $(A^0 - E\mathbb{I})$ è 2-banded allora $(A^0 - E\mathbb{I})(A^0 - E\mathbb{I})^*$ è 4-banded (figura 2.1(b)). Inoltre notiamo che ogniqualevolta quest'ultima matrice viene moltiplicata per se stessa a ogni banda esistente si aggiungono due fasce all'interno del blocco e vengono create due bande extra (figura 2.1(c)). Ricordando che il numero di blocchi della matrice è n , in base a queste osservazioni possiamo affermare che gli m elementi che costituiscono la diagonale principale del blocco $1n$ appartengono all'insieme di decadimento D_k con $k = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$. Con ragionamenti analoghi è possibile sistemare ogni elemento di matrice (x, y) nel corretto insieme di decadimento, giungendo così all'equazione

$$\begin{aligned} \left\| ((A^0 - E\mathbb{I})(A^0 - E\mathbb{I})^*)_{1n}^{-1} \right\| &\leq \left(\sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^m \left| ((A^0 - E\mathbb{I})(A^0 - E\mathbb{I})^*)_{1n}^{-1}(x, y) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(mC^2q^{2(\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1)} + \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor - 1} C^2q^{2(\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 2 + k)} [2(2m - 3) - 8k] \right)^{1/2} \end{aligned}$$

dove C e q sono i soliti valori definiti nel teorema di DMS, mentre all'interno delle parentesi quadre è presente il numero di elementi appartenenti a ogni insieme di decadimento D_k , esclusi quelli sulla diagonale principale del blocco. A meno dei coefficienti, la sommatoria si spezza in due parti calcolabili analiticamente, poiché riconducibili a una serie geometrica finita

$$\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor - 1} q^{2k} = \frac{q^{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} - 1}{q^2 - 1}.$$

Sostituendo i risultati ottenuti troviamo

$$\left\| ((A^0 - E\mathbb{I})(A^0 - E\mathbb{I})^*)_{1n}^{-1} \right\| \leq \sqrt{DC}q^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1}$$

dove

$$D = \begin{cases} \frac{m(-3q^4 + 2q^2 + 1) + 2q^2(q^2 + 3)(q^m - 1)}{(q^2 - 1)^2} & \text{se } m \text{ pari} \\ \frac{m(-3q^4 + 2q^2 + 1) + 2q^2(q^2 + 3)(q^{m-1}(3q^2 + 1) - q^2 - 3)}{(q^2 - 1)^2} & \text{se } m \text{ dispari} \end{cases}$$

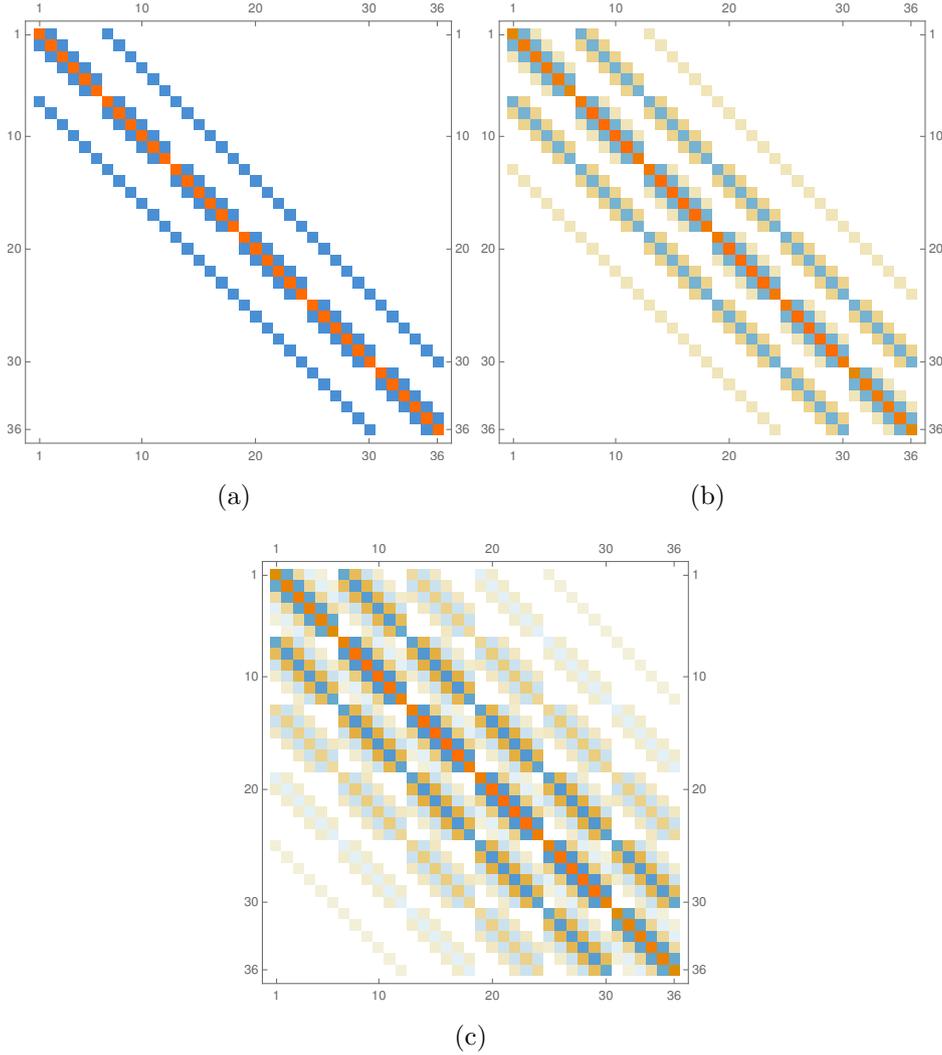


Figura 2.1: Rappresentazione visiva degli elementi della matrice A del tipo (1.15) e delle sue potenze, ovvero di A (a), AA^* (b) e $(AA^*)^2$ (c) (grafici esportati da *mathematica*).

Procedendo allo stesso modo per $\|((A^0 - E\mathbb{I})(A^0 - E\mathbb{I})^*)_{2n}^{-1}\|$ si dimostra il seguente

Lemma 2.2.2. *Sia g_{ij} il generico blocco della matrice $g(E) = (A^0 - E\mathbb{I})^{-1}$, con $(A^0 - E\mathbb{I})$ tridiagonale a blocchi non definita positiva. Allora*

$$\|g_{1n}\| \leq \sqrt{DC} \left[\|A_1 - E\mathbb{I}_m\| \begin{pmatrix} q & n \text{ pari} \\ 1 & n \text{ dispari} \end{pmatrix} + \|C_2\| \right] q^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor + 1} \quad (2.8)$$

dove

$$C(E) = \frac{(\sqrt{b/a} + 1)^2}{2b} \quad q(E) = \frac{\sqrt{b/a} - 1}{\sqrt{b/a} + 1},$$

con a e b rispettivamente minimo e massimo valore di $\sqrt{\sigma((A^0 - E\mathbb{I})(A^0 - E\mathbb{I})^*)}$.

Grazie a questo e al lemma 2.2.1 possiamo trasportare i vincoli ottenuti partendo dal teorema di DMS sulla matrice di trasferimento. Innanzitutto definiamo

valori singolari di un operatore $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la radice quadrata degli autovalori dell'operatore definito positivo LL^* . Vale allora il seguente

Lemma 2.2.3. *Siano $\{\theta_i\}_{i=1}^m$ i valori singolari della matrice $T_{11} = (T_n)_{11}$. Allora esiste una costante $K > 0$ tale che*

$$\theta_k > Kq^{-n/2} \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Dimostrazione. Sfruttando $(T_{11})^{-1} = -g_{1n}B_n$ e il lemma precedente si ha che

$$\begin{aligned} \text{Tr} [(T_{11}T_{11}^*)^{-1}] &= \text{Tr}(B_n^*g_{1n}^*g_{1n}B_n) = \text{Tr}(B_nB_n^*g_{1n}^*g_{1n}) \leq m^2 \|B_n\|^2 \|g_{1n}\|^2 \leq \\ &\leq m^2 \|B_n\|^2 DC^2 \left[\|A_1 - E\mathbb{I}_m\| \begin{pmatrix} q & \text{n pari} \\ 1 & \text{n dispari} \end{pmatrix} + \|C_2\| \right]^2 q^{2(\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor)+2} \equiv K^{-2}q^n. \end{aligned}$$

D'altra parte abbiamo che

$$\text{Tr} [(T_{11}T_{11}^*)^{-1}] = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\theta_k^2},$$

e poiché ciascun addendo è strettamente positivo deve valere

$$\frac{1}{\theta_k^2} < K^{-2}q^n \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

□

Prima di enunciare il risultato principale di questo capitolo dobbiamo disporre di due ulteriori lemmi: il primo mette in luce come $T_n(E)^{-1}$ sia simile alla matrice di trasferimento del "reticolo inverso", il secondo invece stabilisce una proprietà detta di "intreccio" che lega i valori singolari di una matrice a quelli di una sua qualsiasi sottomatrice.

Lemma 2.2.4. *Siano*

$$\pi = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \mathbb{I}_m \\ \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} & & \mathbb{I}_m \\ & \ddots & \\ \mathbb{I}_m & & \end{pmatrix}.$$

due matrici di inversione di dimensione $2m \times 2m$ e $mn \times mn$. Sia inoltre $T_n(E)$ come in (2.3) la matrice di trasferimento associata alla matrice $A(z)$ (2.6) e $T_n(E)^J$ la matrice di trasferimento associata a $A^J(z) = JA(z)J$ (il reticolo invertito). Allora

$$T_n(E)^{-1} = \pi T_n(E)^J \pi.$$

Dimostrazione. Si veda [7], p. 6. □

Lemma 2.2.5. *Sia B una sottomatrice di una matrice $m \times n$ A ottenuta cancellando un totale di r righe e colonne, allora per i valori singolari vale*

$$\sigma_{r+i}(A) \leq \sigma_i(B) \leq \sigma_i(A) \quad i = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}.$$

Dimostrazione. Si veda [6], p. 229. \square

A questo punto possiamo dare una stima sul comportamento asintotico dei valori singolari della matrice di trasferimento T_n .

Teorema 2.2.6. *Siano $\{\sigma_k\}_{k=1}^{2m}$ i valori singolari della matrice di trasferimento completa T_n , allora esiste una costante $K > 0$ definita nel lemma 2.2.3 tale che*

$$\begin{aligned} \sigma_k &> Kq^{-n/2} & k = 1, \dots, m \\ \sigma_k &< q^{n/2}/K & k = m + 1, \dots, 2m, \end{aligned} \quad (2.9)$$

con q definito nel lemma 2.2.2.

Dimostrazione. Chiamiamo $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_m$ i valori singolari di T_{11} e $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{2m}$ quelli di T_n . In base al lemma 2.2.5 sappiamo che $\theta_k \leq \sigma_k$ con $k = 1, \dots, m$ e dunque almeno m valori singolari di T_n sono minorati da $Kq^{-n/2}$ grazie al lemma 2.2.3. Poiché per il lemma 2.2.4 T_n^{-1} è simile a una matrice di trasferimento, possiamo trarre per essa conclusioni analoghe, infatti i valori singolari di T_n^{-1} coincidono con i reciproci dei valori singolari di T_n . Questo è immediato da dimostrare notando che i valori singolari di T_n^{-1} sono gli autovalori di $(T_n T_n^*)^{-1}$, che esiste perché T_n è invertibile e quindi $\det(T_n T_n^*) \neq 0$, e che per ogni matrice invertibile A vale $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$ se e solo se $\det(A^{-1} - \lambda^{-1} \mathbb{I}) = 0$. Questo ci permette di affermare che necessariamente m valori singolari di T_n devono essere maggiorati da $q^{n/2}/K$. \square

Concludiamo notando che un calcolo analogo a quello svolto in questa sezione ma più semplice permette di trattare la situazione di matrice $(A^0 - E\mathbb{I})$ definita positiva. In questo caso i vincoli che si ottengono sui valori singolari della matrice di trasferimento risultano più precisi e sono dati da

$$\begin{aligned} \sigma_k &> K'q^{-n} & k = 1, \dots, m \\ \sigma_k &< q^n/K' & k = m + 1, \dots, 2m, \end{aligned} \quad (2.10)$$

con

$$\frac{1}{K'} = m \|B_n\| C \left(\frac{m - mq^4 + 2q^3(q^{2m} - 1)}{(q^2 - 1)^2} \right)^{1/2}.$$

2.3 Matrici casuali

Lo scopo di questa sezione è descrivere un risultato riguardante matrici costruite moltiplicando un grande numero di matrici casuali. Essendo queste di natura probabilistica, prima di proseguire è opportuno richiamare alcuni concetti di teoria della probabilità, secondo l'esposizione fatta in [8].

Innanzitutto definiamo *spazio di probabilità* la terna $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, dove Ω è un insieme non vuoto chiamato *spazio campionario*, \mathcal{E} una σ -algebra su Ω detta *spazio degli eventi* e \mathbb{P} una funzione di misura su \mathcal{E} detta *misura di probabilità*, tale che $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Si dice *variabile casuale* a valori in uno spazio misurabile

(Ω', \mathcal{F}) una qualunque mappa misurabile $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$. Se f è a valori reali (o complessi) e \mathbb{P} -integrabile su Ω , si definisce il suo *valore atteso* come

$$\mathbb{E}[f] = \int_{\Omega} f d\mathbb{P}. \quad (2.11)$$

La *distribuzione di probabilità* di una variabile casuale f sullo spazio di arrivo Ω' è per definizione la misura $f \star \mathbb{P} = \mathbb{P} \circ f^{-1}$, definita su \mathcal{F} e chiamata *pushforward* di \mathbb{P} tramite f . Le variabili casuali $(f_{\alpha})_{\alpha \in A}$ con $f_{\alpha} : \Omega \longrightarrow \Omega' \quad \forall \alpha$ sono dette *identicamente distribuite* se ogni singola variabile f_{α} ha la stessa distribuzione di probabilità, ovvero

$$(f_{\alpha}) \star \mathbb{P} = (f_{\beta}) \star \mathbb{P} \quad \forall \alpha, \beta \in A.$$

Sono inoltre dette *indipendenti* se

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{\alpha \in A} f_{\alpha}^{-1}(E_{\alpha}) \right) = \prod_{\alpha \in A} ((f_{\alpha}) \star \mathbb{P})(E_{\alpha}) \quad \{E_{\alpha}\}_{\alpha} \in \mathcal{F}. \quad (2.12)$$

Se Ω' è uno spazio di matrici, per esempio $M_n(\mathbb{C})$, allora $f(x)$ con $x \in \Omega$ è chiamata *matrice casuale*.

All'interno del risultato principale di questa sezione, dovuto a Osceledec ed illustrato qui nella sua versione detta "a tempo discreto", si fa uso di due concetti molto importanti che è bene anteporre. Per prima cosa si dice che una funzione misurabile $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega$ *preserva la misura* se $\phi \star \mathbb{P} = \mathbb{P}$, cioè se vale

$$\mathbb{P}(\phi^{-1}(\delta)) = \mathbb{P}(\delta) \quad \forall \delta \in \mathcal{E},$$

inoltre è detta *ergodica* se

$$\phi^{-1}(\delta) = \delta \implies \mathbb{P}(\delta) \in \{0, 1\}.$$

Quest'ultima definizione è equivalente all'affermazione che se δ è un insieme di misura positiva, \mathbb{P} -quasi ogni $x \in \Omega$ si troverà in esso in un certo istante.

Per i nostri interessi, consideriamo come spazio campionario una varietà differenziabile M , dotata di una qualsiasi σ -algebra \mathcal{E} (ad esempio la sua σ -algebra di Borel) e di una qualunque misura di probabilità \mathbb{P} .

Teorema 2.3.1 (ergodico moltiplicativo di Osceledec). *Sia $(M, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e $t : M \longrightarrow M_m(\mathbb{R})$ tale che la trasformazione*

$$x \longmapsto \log^+ \|t_x\| \quad (2.13)$$

sia \mathbb{P} -sommabile su M (\log^+ indica la parte positiva della funzione). Siano inoltre $\phi : M \longrightarrow M$ una mappa che preserva la misura e

$$T_x^n = t_{\phi^{n-1}(x)} \cdots t_{\phi(x)} t_x.$$

Allora esiste un insieme t -invariante $\Gamma \subseteq M$ con $\mathbb{P}(\Gamma) = 1$ tale che $\forall x \in \Gamma$ valgono:

1. Il limite (uniforme)

$$\Lambda_x := \lim_{n \rightarrow \infty} ((T_x^n)^*(T_x^n))^{1/2} \quad (2.14)$$

esiste.

2. Λ_x ha $s = s(x)$ autovalori positivi distinti $e^{\lambda_x^{(1)}} < \dots < e^{\lambda_x^{(s)}} (1 \leq s \leq m)$, di molteplicità rispettivamente $m_x^{(1)}, \dots, m_x^{(s)}$, dove $\lambda_x^{(1)}$ può essere $-\infty$.

3. Siano $U_x^{(1)}, \dots, U_x^{(s)}$ gli autospazi relativi a $\lambda_x^{(1)}, \dots, \lambda_x^{(s)}$ rispettivamente. Indicando con $V_x^{(r)} = U_x^{(1)} \oplus \dots \oplus U_x^{(r)}$ ($1 \leq r \leq s$) e posto $V_x^{(0)} = 0$, per ogni $u \in V_x^{(r)} \setminus V_x^{(r-1)}$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |T_x^n u| = \lambda_x^{(r)} \quad r = 1, \dots, s. \quad (2.15)$$

Inoltre se ϕ è ergodica, il numero $s(x)$ e l'insieme degli autovalori $\{e^{\lambda_x^{(r)}}\}_{r=1}^{s(x)}$ sono costanti \mathbb{P} -quasi ovunque su M .

La norma usata in (2.13) è una qualsiasi norma matriciale che soddisfi la proprietà $\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in M_m(\mathbb{R})$. Qui consideriamo la norma uniforme, mentre il modulo $|\cdot|$ in (2.15) rappresenta la norma euclidea su \mathbb{R}^m . Il valore degli esponenti non dipende dalla scelta di tale norma. Infine notiamo che la condizione (2.13) è analoga alla richiesta

$$\mathbb{E}[\log^+ \|t\|] < \infty.$$

Sotto opportune ipotesi sulla distribuzione delle matrici casuali (formula (2.13)), il teorema di Osceledec afferma che il loro prodotto agisce su un generico vettore dilatandolo o contraendolo di un fattore esponenzialmente asintotico al numero di fattori. Inoltre, con la richiesta aggiuntiva di ergodicità, questo andamento è dato da un esponente indipendente dalla scelta specifica della successione di matrici, ma dipendente soltanto dalla distribuzione. Scomponendo il vettore $u \in \mathbb{R}^m$ lungo i vari autospazi $U^{(r)}$, si osserva che il suo tasso di crescita in norma dipende dal massimo autovalore sul cui autospazio il vettore ha proiezione non nulla: questo, se la distribuzione è ergodica, è quasi certamente $e^{\lambda^{(s)}}$, poiché la misura di ogni autospazio $U^{(r)}$ con $r < s$ è 0. L'esponente in questione può assumere al più m valori differenti, ed è chiamato *esponente di Lyapunov*.

Chiudiamo questa sezione stabilendo un legame con la sezione precedente. Consideriamo il caso in cui le $t_k \in M_{2m}(\mathbb{C})$ definite nel teorema 2.3.1 sono matrici simplettiche, cioè

$$t_k^T = J t_k^{-1} J^{-1} \quad \text{con } J = \begin{pmatrix} & \mathbb{I}_m \\ \mathbb{I}_m & \end{pmatrix},$$

cosicché è possibile dimostrare che $\lambda_i = -\lambda_{m+i} \quad \forall i = 1, \dots, m$, cioè metà degli esponenti di Lyapunov sono positivi e metà negativi. In questo contesto è possibile stabilire un legame tra distribuzione media degli autovalori di una matrice ed esponenti di Lyapunov della matrice di trasferimento associata. Questa relazione prende il nome di *formula di Thouless* e permette di calcolare analiticamente

la somma degli m esponenti di Lyapunov più grandi di un prodotto di matrici. Per procedere è necessario definire *densità spettrale* di una data matrice A la distribuzione tale che

$$\int_B \rho(E') dE' = \#(\sigma(A) \cap B)$$

per ogni $B \subset \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) misurabile. Enunciamo direttamente una generalizzazione della formula dovuta a Lacroix [9], che si riconduce al risultato originariamente ottenuto da Thouless ponendo $m = 1$.

Teorema 2.3.2 (formula di Thouless). *Siano $\lambda_1(E) \geq \dots \geq \lambda_m(E)$ gli esponenti di Lyapunov della matrice di trasferimento $T(E)$ definita in (2.3) e relativa alla matrice hermitiana A del tipo (2.6), con A_i e $B_i = C_i^*$ variabili casuali indipendenti, identicamente distribuite e tali che siano soddisfatte le ipotesi del teorema 2.3.1. Sia inoltre $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ il valore atteso della densità spettrale di A . Allora*

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \lambda_i = \int \rho(E') \log |E - E'| dE'. \quad (2.16)$$

Questo teorema è giustificato dall'osservazione che per $n \rightarrow \infty$ la densità spettrale di ogni singola sottomatrice tende alla densità media.

2.3.1 Tasso di decadimento

In questa sezione analizziamo la congettura secondo cui il tasso di decadimento di una qualsiasi matrice a banda è fornito dal più piccolo (in modulo) esponente di Lyapunov λ della matrice di trasferimento associata. Abbiamo infatti visto che il teorema di DMS porta a trovare vincoli sui valori singolari della matrice di trasferimento, che corrispondono agli esponenti di Lyapunov nel limite in cui questa sia generata da un grande numero di fattori. Ci proponiamo dunque di verificare attraverso delle semplici analisi numeriche se per una generica matrice a banda A può valere la scrittura

$$|A_{ij}^{-1}| \leq C e^{\lambda|i-j|} \quad (2.17)$$

Come prototipo di matrici a banda consideriamo il laplaciano discreto traslato in d dimensioni ($L^{(d)} - E\mathbb{I}$), introdotto in maniera rigorosa nel capitolo 3. Ad esso sommiamo una matrice del tipo $\text{diag}(w_1, \dots, w_d)$, dove ciascun w_i assume un valore casuale secondo una distribuzione comune μ su un insieme $W \subset \mathbb{R}$ a supporto compatto. In particolare per implementare questo *disordine diagonale* prendiamo $W = [-w/2, w/2]$, con $w \in \mathbb{R}^+$ e distribuzione uniforme, ossia

$$\mu(A) = \int_{A \cap W} \frac{1}{w} dx \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

A causa della perturbazione diagonale ci aspettiamo che in generale la matrice non sia più definita positiva, nonostante ciò viene quasi certamente preservata l'invertibilità (è possibile dimostrare che è nulla la misura dell'insieme delle scelte $\{w_i\}$ che annullano il determinante di

$$h^{(d)} = L^{(d)} - E\mathbb{I} + \text{diag}(w_1, \dots, w_d) \quad (2.18)$$

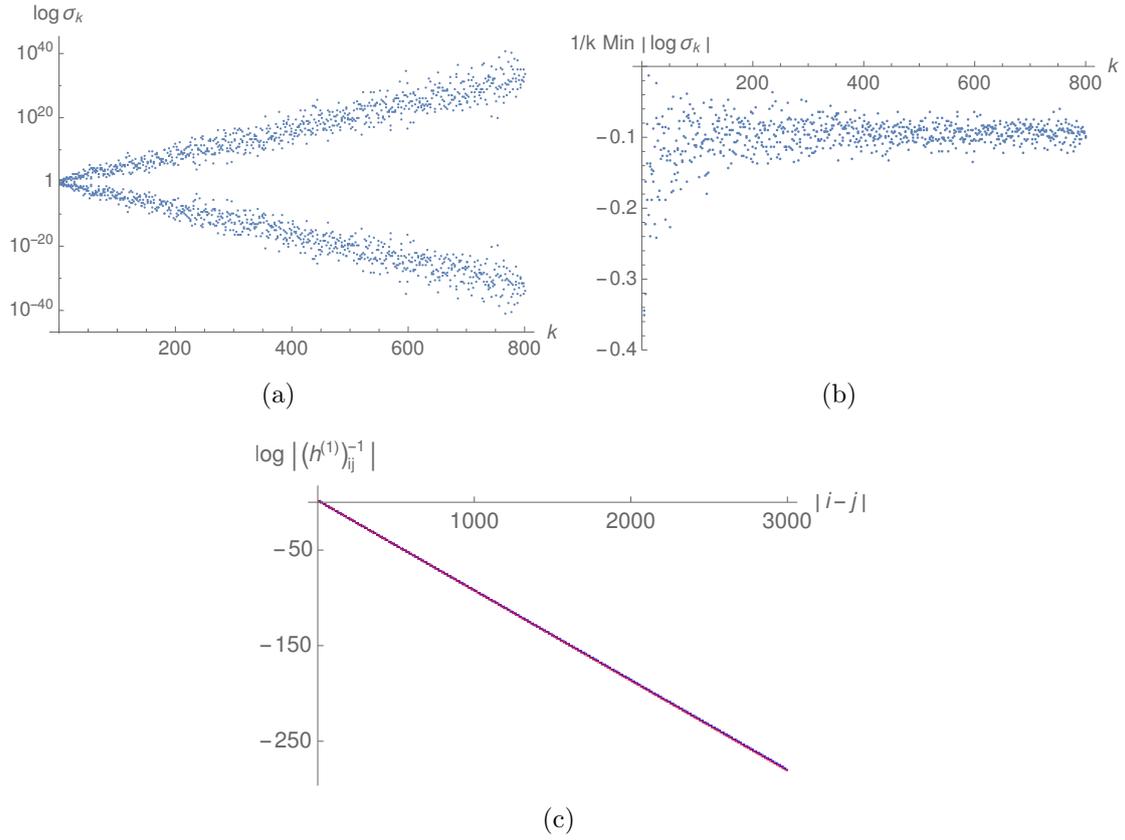


Figura 2.2: (a) valori singolari delle matrici di trasferimento $T_k(E)$ associate ad $h^{(1)}$, di dimensione 3001×3001 , con $E = 1/2$ e disordine diagonale in $[-1, 1]$. (b) convergenza dei valori singolari più piccoli al minimo esponente di Lyapunov λ_{teo} di $T_k(E)$ per $k \rightarrow \infty$. (c) confronto tra elementi dell'antidiagonale principale $\log |(h^{(1)})_{ij}^{-1}| = (-0.0939 \pm 0.0002) |i - j| + (1.9 \pm 0.4)$ (blu) con la retta teorica $y = (-0.0943 \pm 0.0001)x + (1.9 \pm 0.4)$ (rosso) (grafici esportati da *mathematica*).

Consideriamo prima il caso unidimensionale, in cui la matrice $(L^{(1)} - E\mathbb{I})$ è tridiagonale e $n \times n$. Innanzitutto invertiamo numericamente la matrice e rappresentiamo in un grafico lin-log gli elementi che costituiscono la sua antidiagonale principale. Fatto ciò fittiamo la retta ottenuta

$$\log |A_{ij}^{-1}| = \lambda_{vero} |i - j| + \log C$$

con il metodo dei minimi quadrati per trovarne pendenza e intercetta, con l'accortezza di scartare i primi valori, poiché ci aspettiamo che l'andamento del tipo (2.17) sia raggiunto per grande $|i - j|$. Ripetiamo il procedimento N volte così da avere un insieme di risultati su cui calcolare la deviazione standard δ , in modo da poter ottenere l'errore sul valor medio come $\delta/(N - 1)$. Costruiamo poi per $k = 2, \dots, n$ le matrici di trasferimento $T_k(E)$ definite in (2.3), di dimensione 2×2 , e calcoliamo al variare di k i loro valori singolari σ_k (figura 2.2(a)). Disegniamo quindi $\forall k$ il più piccolo di questi ultimi (figura 2.2(b)), e con un nuovo fit calcoliamo graficamente la quantità

$$\lambda_{teo} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sigma_k,$$

ovvero il minimo esponente di Lyapunov della matrice di trasferimento. Questo passaggio è giustificato dal risultato della scorsa sezione secondo cui gli esponenti di Lyapunov sono indipendenti dalla particolare scelta degli elementi del prodotto di matrici, ma sono determinati soltanto dalla loro distribuzione nel caso di un sistema ergodico.

Per verificare la nostra congettura riportiamo in un unico grafico le due rette calcolate, con intercetta $\log C$ uguale per entrambe e ricavata nel primo fit (figura 2.2(c)). Data la compatibilità dei risultati possiamo concludere che gli elementi di matrice tendono effettivamente a zero lontano dalla diagonale principale con un tasso esponenziale dato dal minimo esponente di Lyapunov della matrice di trasferimento.

È possibile mostrare che le stesse conclusioni valgono per matrici k -banded a blocchi, considerando come prototipi $h^{(2)}$ e $h^{(3)}$, di dimensione $mn \times mn$, composti rispettivamente dagli operatori di Laplace discreti in due e tre dimensioni (cfr. capitolo 3). Nel primo caso si ottiene una matrice tridiagonale a blocchi (figura 2.3), nel secondo una matrice 4-banded a blocchi (figura 2.4), a cui sono associate matrici di trasferimento $T_k(E)$ di dimensione $2m \times 2m$. Il procedimento è analogo a quello svolto nel caso unidimensionale, con la semplice differenza che ora bisogna confrontare λ_{vero} e λ_{teo}/m , con m dimensione dei blocchi della matrice, per come è stata costruita $T_k(E)$.

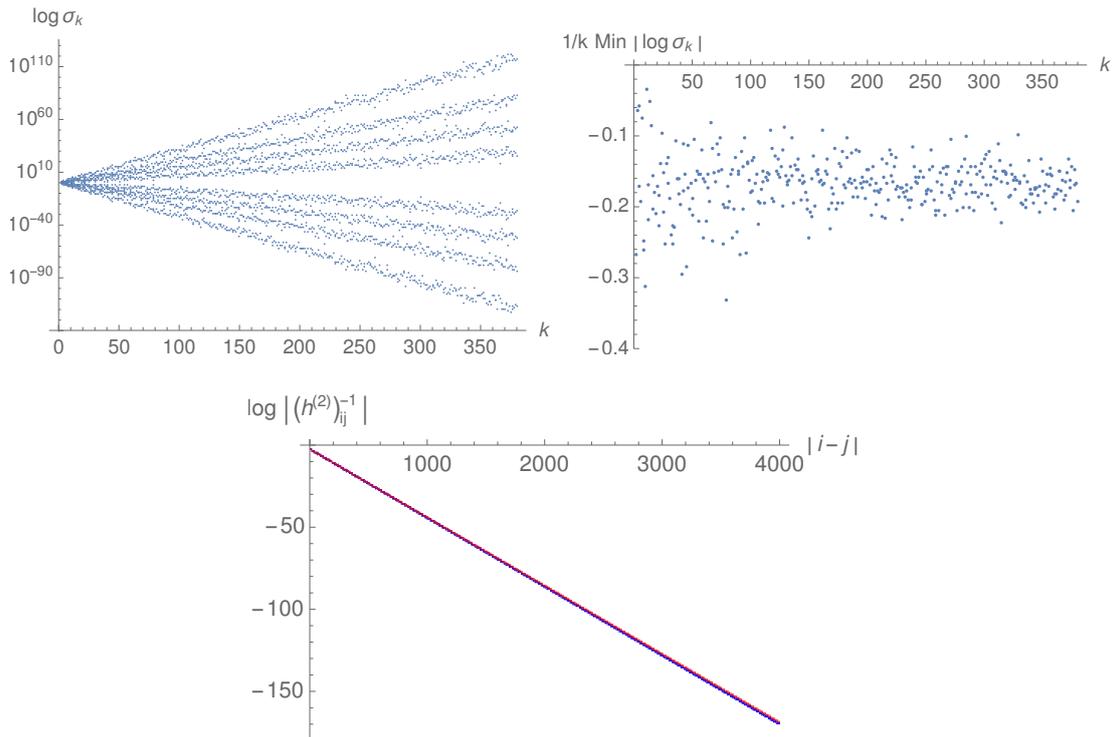


Figura 2.3: Analoga a figura 2.2, riferita a $h^{(2)}$ ($n = 1000$, $m = 4$, $E = 3$, disordine in $[-2.7, 2.7]$). Il confronto è eseguito tra $\log |(h^{(2)})_{ij}^{-1}| = (-0.0416 \pm 0.0002) |i - j| + (-2.4 \pm 0.3)$ e $y = (-0.0417 \pm 0.0001)x + (-2.4 \pm 0.3)$ (grafici esportati da *mathematica*).

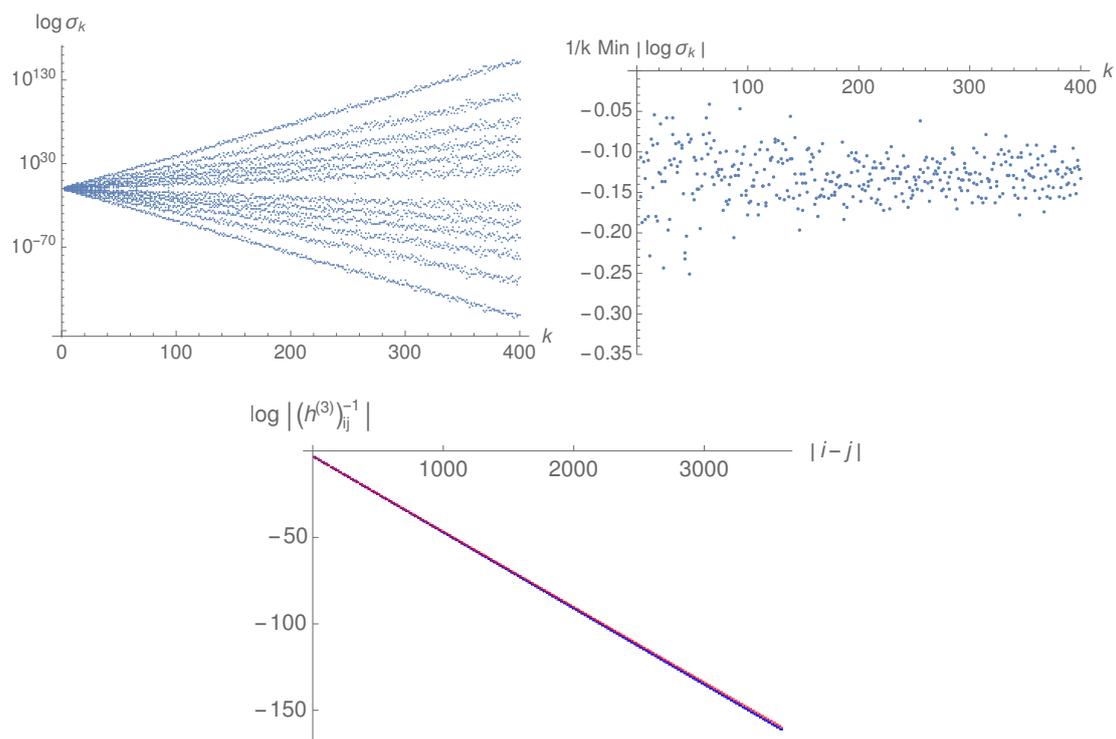


Figura 2.4: Analoga alle precedenti, riferita a $h^{(3)}$ ($n = 1200$, $m = 3$, $E = 2$, disordine in $[-5, 5]$). Il confronto è eseguito tra $\log |(h^{(3)})_{ij}^{-1}| = (-0.0440 \pm 0.0002) |i - j| + (-3.0 \pm 0.3)$ e $y = (-0.0437 \pm 0.0001)x + (-3.0 \pm 0.3)$ (grafici esportati da *mathematica*).

Capitolo 3

Hamiltoniane a banda

In questo capitolo esaminiamo due particolari tipi di matrici appartenenti alla categoria delle matrici a banda, in generale utilizzate nella trattazione di modelli con interazione a primi vicini, dove svolgono il ruolo di hamiltoniane del sistema, oppure nella soluzione numerica di equazioni differenziali alle derivate parziali, di cui l'equazione di Poisson è il caso emblematico.

In primo luogo ci concentriamo sul problema dell'inversione delle cosiddette matrici laplaciane di reticolo, ottenute discretizzando opportunamente l'operatore di Laplace continuo. In particolare con l'ausilio del formalismo della funzione di Green vengono ricavate espressioni analitiche per il risolvete di tali matrici in una e due dimensioni. I risultati esatti così ottenuti vengono poi messi a confronto con le stime ottenute nei capitoli 1 e 2 grazie al teorema di DMS.

Nella seconda sezione viene preso in esame un particolare modello fisico, chiamato modello di Harper, descritto da un'hamiltoniana tridiagonale. Esso rappresenta una particella che si muove in un reticolo bidimensionale con interazione a primi vicini soggetto a un campo magnetico trasversale. Si presenta dunque la necessità di studiare in uno spazio discreto l'influenza del potenziale vettore contenuto nell'equazione di Schrödinger, con la relativa problematica dell'invarianza di gauge. Infine, per dimostrare in maniera rigorosa le previsioni attuate sul modello grazie ai risultati dei precedenti capitoli, viene studiata analiticamente la localizzazione delle sue autofunzioni.

3.1 L'operatore di Laplace discreto

Il laplaciano Δ è un operatore sullo spazio $\mathcal{C}^2(I)$ delle funzioni differenziabili, con $I \subseteq \mathbb{R}^d$, la cui azione è definita da

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}. \quad (3.1)$$

È possibile costruire un analogo di questo operatore su spazi discreti del tipo $\ell^2(S)$ con $S = \{1, 2, \dots, n\}$ o $S = \mathbb{Z}$.

Partiamo considerando il caso unidimensionale, in cui l'azione del laplaciano su una generica funzione coincide con la sua derivata seconda, ovvero

$$\Delta f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f'(x + \epsilon) - f'(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - 2f(x) + f(x - \epsilon)}{\epsilon^2}, \quad (3.2)$$

con $x \pm \epsilon \in I$. Per discretizzare questa espressione sostituiamo la derivata con il rapporto incrementale iterato due volte e centrato in x

$$\frac{f(x + \delta) - 2f(x) + f(x - \delta)}{\delta^2},$$

dove ora $x, \delta \in S$, e rimpiazziamo $f(x)$ con u_i . Considerando un passo unitario ($\delta = 1$) e indicando con $L^{(1)}$ l'operatore laplaciano, abbiamo che la sua azione nello spazio discreto è data da

$$(L^{(1)}u)_i = 2u_i - u_{i+1} - u_{i-1} \quad (3.3)$$

(per comodità è stato cambiato segno rispetto all'equazione precedente, così da avere un operatore definito positivo, visto che normalmente l'operatore di Laplace è definito negativo). Se $u \in \mathbb{R}^n$, nella base canonica l'operatore $L^{(1)}$ appena definito è rappresentato da una matrice del tipo (1.10), ovvero da una *matrice di Toeplitz* che indichiamo $\text{Toep}(-1, 2, -1)_n$, poiché ha elementi costanti in ciascuna diagonale.

Per prima cosa siamo interessati allo spettro dell'operatore di Laplace discreto $L^{(1)}$: il problema agli autovalori con condizioni al contorno di Dirichlet

$$\begin{cases} L^{(1)}u = Eu \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

rappresenta quello di una particella che si muove lungo una catena composta da n siti con hopping a primi vicini. Utilizzando l'equazione (3.3), definendo $2\alpha \equiv 2 - E$ e ponendo $u_1 = 1$ con un riscaldamento, otteniamo la relazione di ricorrenza

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{k+1} = 2\alpha u_k - u_{k-1}.$$

Questa è proprio una delle definizioni dei polinomi di Chebychev di II tipo, perciò possiamo scrivere $u_{k+1} = U_k(\alpha)$. Dato che dalle condizioni al contorno $u_{n+1} = U_n(\alpha) = 0$, capiamo che gli autovalori del problema sono legati agli zeri del k -esimo polinomio di Chebychev di II tipo. Essendo questi ultimi pari a $\alpha_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, lo spettro di $L^{(1)}$ è composto da

$$\lambda_k = 2 \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \right) = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right). \quad (3.5)$$

Per quanto riguarda gli autovettori, imponendo la condizione di normalizzazione risulta che la loro componente i -esima è

$$u_k^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right). \quad (3.6)$$

Se passiamo ora a considerare il laplaciano in due dimensioni, ci accorgiamo che i ragionamenti fatti finora sono facilmente estendibili al nuovo contesto. In questo caso l'operatore agisce su funzioni $f(x, y) \in \mathcal{C}^2(I)$, con $I \subseteq \mathbb{R}^2$ ed è dato in forma esplicita da

$$\Delta f(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon, y) + f(x, y + \epsilon) - 4f(x, y) + f(x - \epsilon, y) + f(x, y - \epsilon)}{\epsilon^2}.$$

Procedendo come sopra per la discretizzazione si ottiene

$$(L^{(2)}u)_{ij} = 4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (3.7)$$

Questo operatore può essere rappresentato da una matrice tridiagonale a blocchi di dimensione $mn \times mn$ del tipo

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} L & -\mathbb{I} & & & \\ -\mathbb{I} & L & -\mathbb{I} & & \\ & -\mathbb{I} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & L & -\mathbb{I} \\ & & & -\mathbb{I} & L \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

dove $L = \text{Toepl}(-1, 4, -1)_m$. Per trovare lo spettro di $L^{(2)}$ risulta di grande utilità scrivere questa matrice nella forma

$$L^{(2)} = L_n^{(1)} \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes L_m^{(1)}, \quad (3.9)$$

dove $L_k^{(1)}$ è il laplaciano unidimensionale sullo spazio \mathbb{R}^k , mentre \otimes rappresenta il *prodotto di Kronecker* tra matrici, definito da

$$\otimes : M(m, n, \mathbb{R}) \times M(m', n', \mathbb{R}) \longrightarrow M(mm', nn', \mathbb{R})$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Lo spettro di $L^{(2)}$ è completamente determinabile a partire da quello di $L^{(1)}$ (cfr. [6], p.119). Infatti per le matrici del tipo $C = A \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes B$ vale la proprietà che se $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_j\}_{j=1}^m$ sono gli autovalori di A e B , allora gli autovalori di C sono dati da $\{a_i + b_j\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$. Inoltre se x_i e y_j sono gli autovettori rispettivamente di A e B associati agli autovalori a_i e b_j , allora $x_i \otimes y_j \in \mathbb{R}^{mn}$ sono autovettori di C associati agli autovalori $a_i + b_j$.

Queste conclusioni si possono chiaramente generalizzare a qualunque operatore su uno spazio discreto di questo tipo, sfruttando l'espressione

$$L^{(d)} = L^{(d-1)} \otimes \mathbb{I}_{m_d} + \mathbb{I}_{m_1 \dots m_{d-1}} \otimes L^{(1)}.$$

3.1.1 Il risolvente

Ci proponiamo ora di calcolare esplicitamente l'inverso dell'operatore di Laplace discreto. Partiamo dal caso unidimensionale, in cui $L^{(1)} = \text{Toepl}(-1, 2, -1)_n$ con le condizioni di Dirichlet e consideriamo la funzione di Green a due punti del reticolo, che soddisfa

$$(L^{(1)}(x) - E)G_E(x, y) = \delta(x - y). \quad (3.10)$$

Prendiamo come base dello spazio l'insieme di autofunzioni dell'operatore di Laplace discreto, definite in (3.6), in modo da poter scrivere

$$G(x, y) = \sum_{j=1}^n k_j(y)u_j(x),$$

con $k_j(y)$ coefficienti dello sviluppo. L'equazione (3.10) diventa allora

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j - E)k_j(y)u_j(x) = \delta(x - y),$$

che moltiplicata per $u_i^*(y)$ e integrata fornisce

$$k_j(y) = \frac{u_i^*(y)}{\lambda_i - E},$$

avendo sfruttato la relazione di ortogonalità $\int_1^n u_i^*(x)u_j(x)dx = \delta_{ij}$. Grazie a questo ragionamento, possiamo scrivere la decomposizione spettrale della funzione di Green

$$G_E(x, y) = \sum_{j=1}^n \frac{u_i^*(y)u_j(x)}{\lambda_j - E}. \quad (3.11)$$

Per arrivare a un'espressione esplicita di $G_E(x, y)$ svolgiamo su di essa delle semplici manipolazioni algebriche, considerando $1 \leq x < y \leq n$ e $G_E(x, y) = 0$ ogniqualevolta $x, y \notin \{1, \dots, n\}$. Sfruttando $(L^{(1)} - E\mathbb{I})G_E = \mathbb{I}$ per $x < y$ possiamo scrivere

$$0 = (L^{(1)}(x) - E)G_E(x, y) = 2\left(1 - \frac{E}{2}\right)G_E(x, y) - G_E(x + 1, y) - G_E(x - 1, y).$$

Ponendo $(r + r^{-1}) = 2(1 - E/2)$ da questa relazione si ottiene

$$G_E(x + 1, y) - rG_E(x, y) = \frac{1}{r}[G_E(x, y) - rG_E(x - 1, y)] = \dots = \frac{c_y}{r^x}$$

per qualche costante c_y , da cui si ricava per $x \leq y$

$$G_E(x, y) = \frac{c'_y(r^{2x} - 1)}{r^{x-1}}.$$

In modo del tutto analogo, partendo da $G_E(x, y)(L^{(1)}(y) - E) = 0$ e lavorando sulla y si giunge a un'equazione per $G_E(x, y)$ contenente la costante c , che può essere ricavata dalla condizione $(L^{(1)}(x) - E)G_E(x, y) = 1$: il risultato che si ottiene è

$$G_E(x, y) = \frac{(r^x - r^{-x})(r^{n+1-y} - r^{-(n+1-y)})}{(r - r^{-1})(r^{n+1} - r^{-(n+1)})}. \quad (3.12)$$

A questo punto osserviamo che il risolvente traslato dell'operatore di Laplace discreto risulta di due tipi a seconda del valore di E . Infatti, ricordando la definizione di r e ponendo $\theta_1 = \arccos(1 - E/2)$, $\theta_2 = \operatorname{arcosh}(1 - E/2)$, si ha

$$(L^{(1)} - E\mathbb{I})_{xy}^{-1} = \begin{cases} \frac{\cos[(n+1-x-y)\theta_1] - \cos[(n+1-|y-x|)\theta_1]}{2 \sin \theta_1 \sin[(n+1)\theta_1]} & 0 < E < 4 \\ \frac{\cosh[(n+1-x-y)\theta_2] - \cosh[(n+1-|y-x|)\theta_2]}{2 \sinh \theta_2 \sinh[(n+1)\theta_2]} & E < 0, E > 4 \end{cases} \quad (3.13)$$

dove abbiamo utilizzato l'identità $2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ (e l'analogo per le funzioni iperboliche). Guardando il risultato ottenuto capiamo che gli elementi della matrice inversa decadono esponenzialmente nei casi $E > 4$ ed $E < 0$, ma non nel caso $0 < E < 4$, cioè quando il parametro E varia all'interno della regione in cui è contenuto lo spettro di $L^{(1)}$. Per concludere scriviamo esplicitamente l'inversa del laplaciano discreto vero e proprio, calcolata con un passaggio al limite $\theta_1 \rightarrow 0$ (ovvero $E \rightarrow 0$)

$$(L^{(1)})_{xy}^{-1} = \frac{(x+y-|y-x|)(2n+2-|y-x|-x-y)}{4(n+1)}. \quad (3.14)$$

Ora che abbiamo trovato il risolvente dell'operatore di Laplace discreto unidimensionale è piuttosto facile ricavare un'espressione esplicita anche per il suo analogo bidimensionale. Per farlo, sfruttiamo il seguente

Teorema 3.1.1. *Siano $G_{E+\alpha}(x, y)$ e $G'_{-\alpha}(x', y')$ le funzioni di Green dei laplaciani di reticolo $L^{(1)}$ rispettivamente sugli spazi \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , con $G_{E+\alpha}(x, y)$ del tipo della prima equazione di (3.13). Allora la funzione di Green \mathcal{G}_E del laplaciano discreto $L^{(2)}$ sullo spazio prodotto cartesiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con condizioni al contorno di Dirichlet risulta*

$$\mathcal{G}_E((x, x')(y, y')) = \frac{1}{2\pi i} \int_C G_{E+\alpha}(x, y) G'_{-\alpha}(x', y') d\alpha \quad (3.15)$$

dove C è un cammino nel piano degli $\alpha \in \mathbb{C}$ che racchiude i poli di $G_{E+\alpha}(x, y)$.

Dimostrazione. Scriviamo la decomposizione spettrale della funzione di Green del laplaciano discreto su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{G}_E((x, x')(y, y')) = \sum_{ij} \frac{u_i^*(x) u_j(y) u_i'^*(x') u_j'(y')}{\lambda_i + \lambda_j' - E},$$

dove u_i e u_j' sono le autofunzioni dell'operatore di Laplace $L^{(1)}$. Per il teorema dei residui il membro destro corrisponde a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{ij} \frac{u_i^*(x) u_j(y) u_i'^*(x') u_j'(y')}{(\lambda_i - E - \alpha)(\lambda_j' + \alpha)} d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_C G_{E+\alpha}(x, y) G'_{-\alpha}(x', y') d\alpha.$$

□

Grazie a questo risultato, per trovare \mathcal{G}_E è sufficiente calcolare il residuo di $G_{E+\alpha}(x, y)$. Osservando l'equazione (3.12) si nota che i poli della funzione soddisfano $1 - r^{-2(n+1)} = 0$, equivalente alla condizione

$$\alpha = 2 - 2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) - E.$$

Con qualche sostituzione e la formula di prostaferesi si ottiene

$$\text{Res} \left[G_{E+\alpha}(x, y), 2 - 2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \right] = - \frac{2 \sin \left(\frac{\pi k x}{n+1} \right) \sin \left(\frac{\pi k y}{n+1} \right)}{n+1}.$$

Il teorema 3.1.1 permette dunque di ottenere l'inversa

$$(L^{(2)} - E\mathbb{I})_{xx',yy'}^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{2 \sin\left(\frac{\pi kx}{n+1}\right) \sin\left(\frac{\pi ky}{n+1}\right) U_{x'-1}(\xi) U_{m-y'}(\xi)}{(n+1)U_m(\xi)} \quad (3.16)$$

dove $\xi = 2 - \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) - \frac{E}{2}$ e dove si è definita la funzione

$$U_p(q) = \begin{cases} \frac{\sin[(p+1)\theta]}{\sin \theta} & \text{con } q = \cos \theta \quad \text{se } 0 < E < 8 \\ \frac{\sinh[(p+1)\theta]}{\sinh \theta} & \text{con } q = \cosh \theta \quad \text{se } E < 0, E > 8 \end{cases}$$

Considerando il caso $E < 0$ o $E > 8$, da questa espressione si nota la presenza di una modulazione in ogni termine della sommatoria, che fa sì che il decadimento esponenziale, monotono all'interno di ciascuno blocco di dimensione m (indici x' e y'), non lo sia più passando da un blocco all'altro (indici x e y).

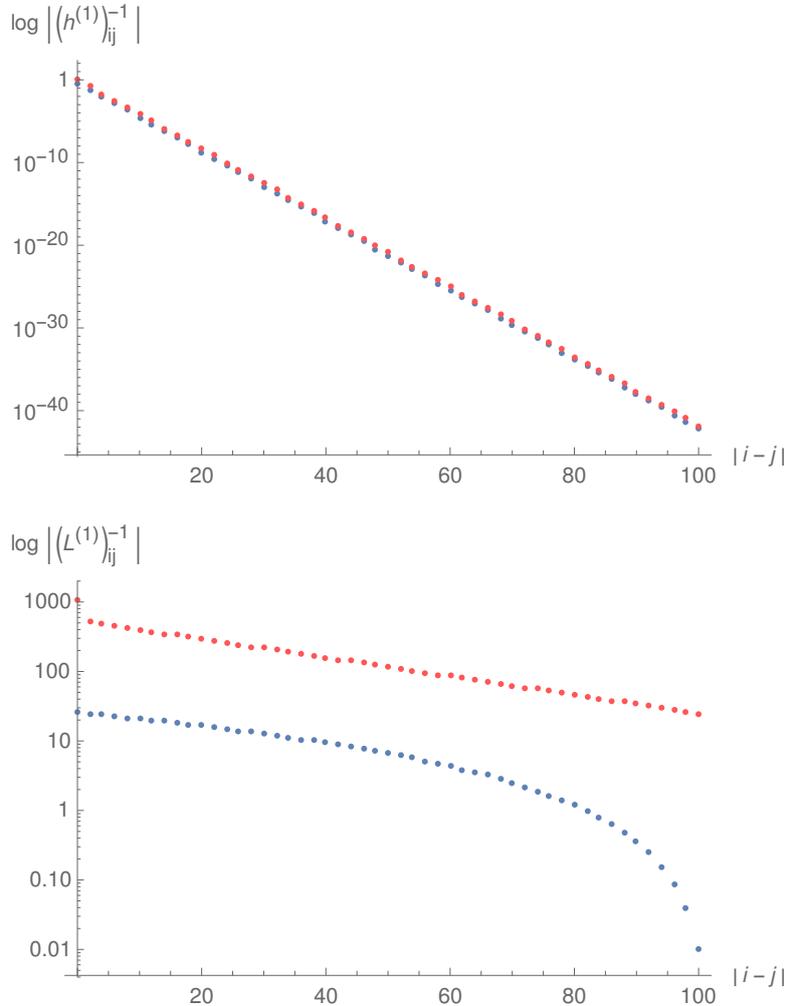


Figura 3.1: Elementi dell'antidiagonale della matrice $(L^{(1)} - E\mathbb{I})^{-1}$ (blu) e limiti superiori forniti dal teorema di DMS (rosso) rispettivamente nei casi $E = -1$ ed $E = 0$ (grafici esportati da *mathematica*).

Le formule analitiche trovate in questa sezione per il risolvete del laplaciano permettono di fare un confronto con i limiti superiori forniti dal teorema di DMS. Per quanto riguarda il caso unidimensionale osserviamo in figura 3.1 che la formula (3.13) risulta in un decadimento esponenziale nel caso $E < 0$ ed $E > 4$, mentre nel caso $E = 0$ di formula (3.14) si ha una sorta di "transizione di fase" denotata da un decadimento ultra-esponenziale. La stima data dal teorema di DMS migliora progressivamente al diminuire o al crescere di E al di fuori dell'intervallo $[0, 4]$, e il comportamento osservato è analogo per tutti i valori abbastanza grandi di n .

Analizzando invece il caso bidimensionale, quando $E < 0$ o $E > 8$ notiamo immediatamente dalla figura 3.2 il tipico decadimento non monotono degli elementi dell'inversa. Osserviamo che questo tipo di andamento non viene previsto dal teorema di DMS standard, che si limita a indicare un decadimento esponenziale semplice (verde), ma viene descritto dal teorema 1.3.3 applicato al caso di matrici sparse (rosso). Quest'ultimo fornisce dunque limiti più accurati, che tengono conto non soltanto della dimensione complessiva della matrice, ma anche della dimensione m dei singoli blocchi da cui è composta. In base a questa osservazione viene quindi giustificato il suo utilizzo nel calcolo dei vincoli sui valori singolari della matrice di trasferimento di sezione 2.2.

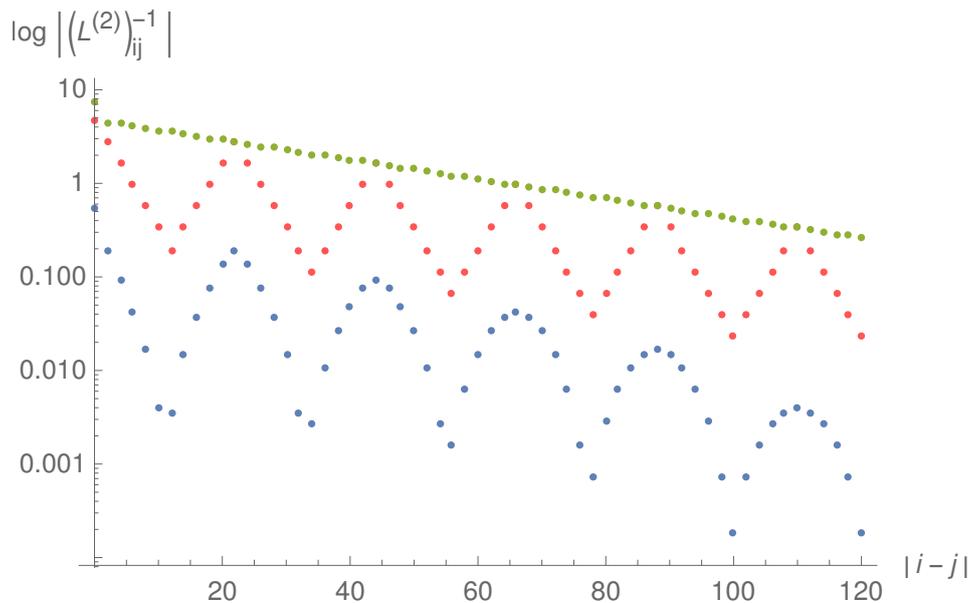


Figura 3.2: Elementi dell'antidiagonale della matrice $L^{(2)}$ (blu), con limiti superiori dati dal teorema di DMS standard 1.2.5 (verde) e dal teorema sulle matrici sparse 1.3.3 (rosso) (grafici esportati da *mathematica*).

Contestualmente ai confronti grafici per gli elementi della matrice inversa è utile analizzare anche i valori singolari delle matrici di trasferimento associate, paragonandoli ai risultati di sezione 2.2: esiste infatti una precisa corrispondenza tra il loro andamento e il comportamento degli elementi del risolvete. Per analizzare le differenze tra i casi con o senza decadimento esponenziale degli elementi dell'inversa prendiamo in considerazione il laplaciano bidimensionale ed esaminiamo le due diverse situazioni che si verificano a seconda che il parametro E appartenga o meno all'intervallo in cui è definito lo spettro dell'operatore.

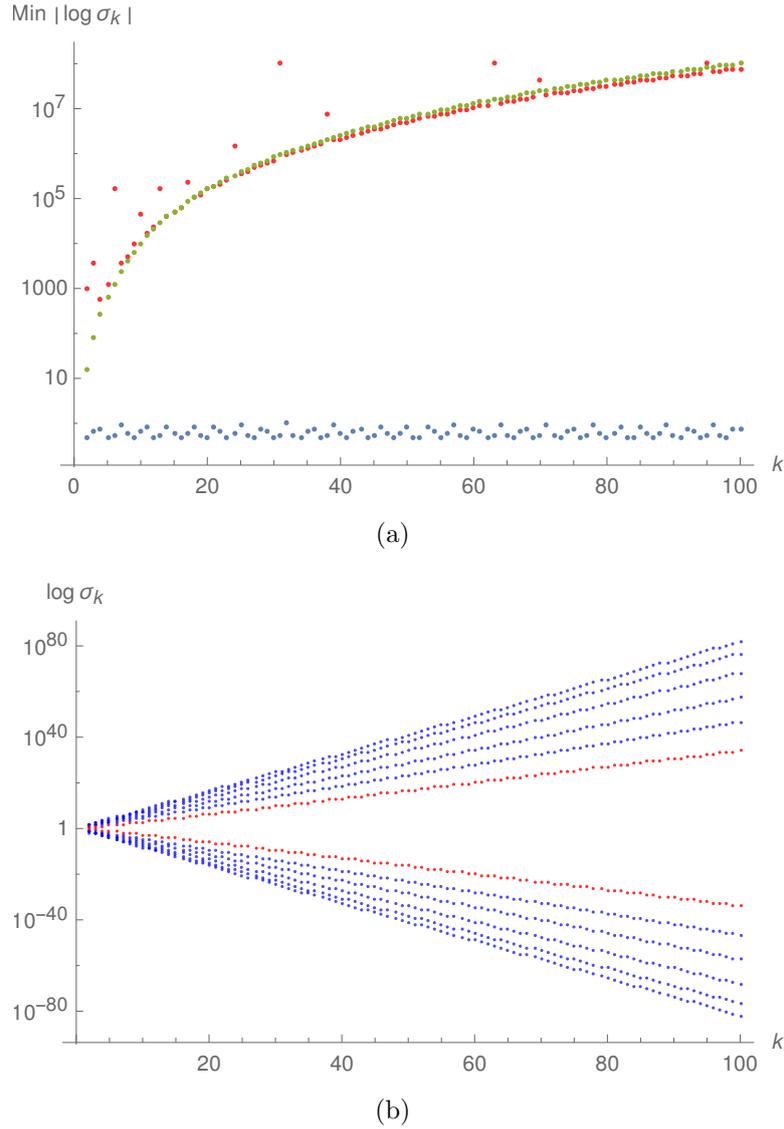


Figura 3.3: Valori singolari delle matrici di trasferimento $T_n(E)$ associate a $(L^{(2)} - E\mathbb{I})$, di dimensione $5n \times 5n$. In (a) ($E = 1$) sono mostrati soltanto i valori singolari più piccoli in modulo (blu), confrontati con il limite superiore dato da (2.9) (rosso), a sua volta paragonato alla funzione $\log y = n^4$ (verde). In (b) ($E = -1$) sono presenti tutti i valori singolari (blu) con i limiti sia superiore che inferiore dati da (2.10) (rosso) (grafici esportati da *mathematica*).

Poniamo dapprima $0 < E < 8$, così che la matrice $(L^{(2)} - E\mathbb{I})$ non sia definita positiva: i suoi autovalori, in base alla scrittura (3.9), sono

$$4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right) + 4 \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(m+1)} \right) - E$$

con $k = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Se facciamo tendere n a infinito mantenendo m fissato la distanza tra due autovalori successivi tende a zero, e per piccoli k (caso

peggiore) risulta

$$4 \sin^2 \left(\frac{(k+1)\pi}{2(n+1)} \right) - 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right) \sim \frac{\pi^2}{n^2} (1+2k) \sim \frac{1}{n^2}.$$

In base a ciò, nell'ipotesi in cui il parametro E sia sempre equidistante dai due autovalori successivi, si ottiene $(\lambda - E)^2 \sim 1/n^4$ per $n \rightarrow \infty$. Ricordando il ragionamento svolto in sezione 1.3.1, tutto questo si traduce in un preciso andamento delle costanti C e q introdotte dal teorema di DMS, pari a

$$C(E) \sim n^4 \quad q(E) \sim 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Sostituendo queste conclusioni nell'equazione (2.9) otteniamo che il termine dominante del limite superiore cresce come n^4 , il che risulta in accordo con il comportamento dei valori singolari più piccoli in modulo, che non decadono né crescono (figura 3.3(a)).

Se invece si considera il caso $E > 8$, così da preservare la positività dell'operatore di Laplace e il tipico decadimento esponenziale del suo risolvente, allora anche i valori singolari della matrice di trasferimento associata presentano una crescita e una decrescita esponenziali (figura 3.3(b)), correttamente stimata dai vincoli dati nelle equazioni (2.10).

3.2 Il modello di Harper

Il problema degli elettroni di Bloch in campi magnetici è molto peculiare, poiché è una delle poche situazioni in fisica in cui si rende manifesta la differenza tra numeri razionali e irrazionali. Risulta chiaro però che nessun effetto fisico può derivare dall'irrazionalità di qualche parametro, perché un suo cambiamento arbitrariamente piccolo lo renderebbe razionale, dando origine a una proprietà fisica con la caratteristica di essere ovunque discontinua. Per risolvere la questione l'unica alternativa consiste nell'osservare che una teoria che apparentemente distingue tra valori razionali e irrazionali di qualche parametro lo fa soltanto in senso matematico, ma fornisce osservabili fisiche che sono nonostante tutto continue.

In questo contesto siamo interessati a modellizzare il sistema composto da una particella carica in un reticolo bidimensionale, soggetta a un campo magnetico trasversale. Per scrivere l'hamiltoniana notiamo innanzitutto che la presenza del potenziale vettore A fa sì che l'equazione di Schrödinger si trasformi a causa della sostituzione

$$\hat{p} \mapsto \hat{p} + \frac{e}{c} \hat{A}.$$

In particolare ci chiediamo come la richiesta di invarianza di gauge influenzi la descrizione del nostro sistema. Per questo motivo ci apprestiamo ad analizzare i cosiddetti campi di gauge su reticolo.

3.2.1 Invarianza di gauge su reticolo

Iniziamo considerando un sistema di n campi scalari complessi ϕ_i non interagenti, con masse m uguali: introducendo un vettore di campi $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ la

lagrangiana si può scrivere come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^\dagger \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2}m^2 \Phi^\dagger \Phi.$$

Se U è una matrice del *gruppo speciale unitario* n -dimensionale $SU(N)$, tale lagrangiana è invariante sotto la trasformazione $\Phi \mapsto \Phi' = U(\Lambda)\Phi$, con $\Lambda \in \mathbb{R}$ costante, ovvero questa è una simmetria globale del sistema, il cui gruppo di simmetria viene chiamato *gruppo di gauge*.

Postuliamo ora che questa lagrangiana debba avere anche un'invarianza locale $SU(N)$, il che implica che $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$ diventi funzione delle coordinate spaziotemporali x . Dato che le matrici $U(\Lambda(x))$ non passano attraverso una normale derivazione

$$\partial^\mu \Phi \mapsto \partial^\mu \Phi' = \partial^\mu (U(\Lambda(x))\Phi) \neq U(\Lambda(x))\partial^\mu \Phi,$$

serve una generalizzazione dell'operatore differenziale, cioè una derivata *covariante* D^μ . Richiediamo quindi che $D^\mu \Phi \mapsto D^{\mu'} \Phi' \stackrel{!}{=} U D^\mu \Phi$ e scegliamo $D^\mu \equiv \partial^\mu + iQA^\mu$ come ansatz. Possiamo riscrivere il tutto nella forma

$$[(\partial^\mu U)U^{-1} + iQA^{\mu'}]U\Phi = UiQA^\mu(U^{-1})U\Phi,$$

che impone al *campo di gauge* A^μ la legge di trasformazione

$$A^{\mu'} = UA^\mu U^{-1} + \frac{i}{Q}(\partial^\mu U)U^{-1}. \quad (3.17)$$

In questo modo abbiamo una lagrangiana localmente gauge invariante

$$\mathcal{L}_{loc} = \frac{1}{2}(D_\mu \Phi)^T D^\mu \Phi - \frac{1}{2}m^2 \Phi^T \Phi.$$

Ora che abbiamo definito il concetto di campi di gauge, una loro ovvia implementazione in uno spazio discreto presuppone che ce ne siano quattro, etichettati A^μ , in ogni punto del reticolo di passo a . Le derivate covarianti possono essere sostituite con la seguente regola di discretizzazione

$$\Phi^\dagger D_\mu^2 \Phi \longrightarrow \sum_{x, \hat{\mu}} \Phi^\dagger(x) \left[\frac{\Phi(x + a\hat{\mu}) - 2\Phi(x) + \Phi(x - a\hat{\mu})}{a^2} + \right. \\ \left. -iA_a^\mu T^a \frac{\Phi(x + a\hat{\mu}) - \Phi(x - a\hat{\mu})}{2a} + A_a^\mu A_b^\mu T^a T^b \Phi(x) \right],$$

dove la somma su $\hat{\mu}$ rappresenta quella sui primi vicini e T^a sono i generatori del gruppo $SU(N)$, per cui vale la scrittura

$$A^\mu = \sum_a A_a^\mu T^a.$$

Il problema con un procedimento di questo tipo è l'invarianza di gauge, richiesta da una qualsiasi teoria fisica. Infatti, le implementazioni su reticolo di campi di gauge sono problematiche poiché una simmetria di gauge è una relazione tra il campo A^μ e le derivate di altri campi, ma queste ultime diventano differenze finite in uno

spazio discreto e non godono più di tutte le proprietà delle derivate. Ad esempio nella scrittura sopra se attuassimo una trasformazione di gauge nel sito $(x + a\hat{\mu})$, cambiando il termine $\Phi(x + a\hat{\mu})$, verrebbe modificato anche $A^\mu(x)$ per mantenere l'invarianza. Così facendo però cambierebbero anche i termini $A^\mu\Phi(x - a\hat{\mu})$ e $A_a^\mu A_b^\mu\Phi(x)$, senza avere nessuna compensazione. Dunque espressioni come quella appena scritta non sono in generale gauge invarianti.

La chiave per ottenere l'esatta invarianza di gauge sul reticolo è di pensare al suo significato in termini geometrici. Consideriamo una teoria con un campo scalare Φ in una qualche rappresentazione irriducibile di un dato gruppo (ad esempio per una teoria $SU(N)$ Φ sarà un insieme di N campi scalari). In ogni punto è definito lo spazio dei valori permessi di Φ (figura 3.4): chiamiamo questo spazio (\mathbb{R}^N) *fibrato* nel punto x , mentre chiamiamo *fibrato tangente* su \mathbb{R}^4 la varietà formata dall'unione dei fibrati in ogni punto. In essa i campi di gauge giocano lo stesso ruolo che i simboli di Christoffel rivestono sul fibrato tangente in relatività generale.

Ci chiediamo ora come possa essere confrontato Φ su un fibrato (diciamo in x), con Φ su un altro. Anche in presenza di simmetria globale è possibile scegliere per un fibrato coordinate diverse dagli altri, ovvero applicare una rotazione a un fibrato senza ruotare gli altri (figura 3.4). Nel confrontare fibrati diversi con un operatore di derivazione bisogna quindi evitare problemi legati a ciò.

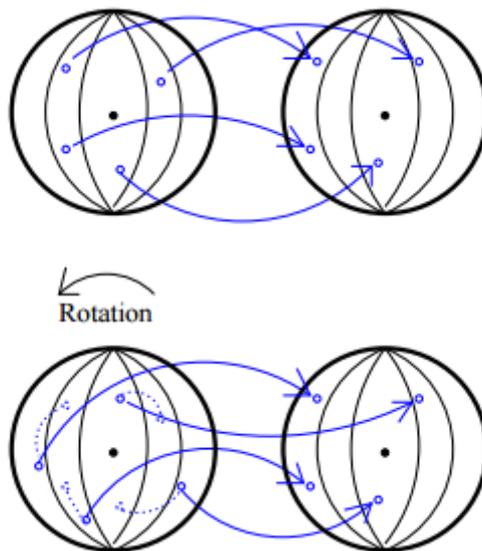


Figura 3.4: In ogni punto dello spazio è presente uno spazio fibrato (sfera) di valori permessi di Φ in quel punto: la funzione $\Phi(x)$ corrisponde alla scelta di un punto su ogni sfera. La connessione ci dice come i punti di un fibrato $\Phi(x)$ sono mappati nei punti di un altro. Se ruotiamo un fibrato (o cambiamo la base di coordinate), i punti ruotati devono ancora essere mappati negli stessi punti del fibrato vicino, il che richiede un cambiamento nella connessione (o nella descrizione della connessione nelle coordinate scelte).

In una teoria di gauge il fibrato tangente possiede una connessione, ovvero esiste una regola per prendere un punto su un fibrato, cioè $\Phi(x)$, e trasportarlo parallelamente a un punto infinitesimamente vicino. Se la connessione soddisfa una

qualche condizione di continuità, non violata dalla scelta di coordinate, il trasporto parallelo è generato in maniera infinitesima. Dato che i fibrati sono vettori che trasformano sotto qualche rappresentazione di $SU(N)$, i generatori infinitesimi sono quelli dell'algebra di Lie in quella rappresentazione. Questo significa che per portare $\Phi(x + \delta x)$ nel punto x dobbiamo moltiplicare per $(1 + iA_\mu^a \delta x^\mu T^a)$. Il ruolo del campo di gauge è quello di essere il trasportatore parallelo che lega fibrati diversi: esso possiede un indice di vettore μ contratto con δx^μ , e due indici dello spazio fibrato (gli indici di matrice (i, j) su T_{ij}^a), esattamente come il simbolo di Christoffel $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$.

Per fare confronti su lunga distanza specifichiamo un cammino e facciamo una serie di confronti infinitesimi lungo di esso. Se i punti x_0, x_1, \dots, x_n sono i punti infinitesimamente vicini di tale cammino, allora il trasporto parallelo di $\Phi(x_n)$ all'inizio del percorso consiste in

$$U(x_0, x_n)\Phi(x_n) = (1 + iA_\mu^a(x_0)(x_1 - x_0)^\mu T^a)(1 + iA_\mu^a(x_1)(x_2 - x_1)^\mu T^a) \cdots \\ \cdots (1 + iA_\mu^a(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})^\mu T^a)\Phi(x_n).$$

Questo prodotto di una serie di trasporti paralleli infinitesimi ordinati, con x_0 (inizio del cammino) a sinistra e x_n (fine) a destra, è la definizione del cosiddetto *path ordered integral*,

$$U(x_0, x_n, C) = \text{Pexp} \left(\int_C iA_\mu^a dx^\mu T^a \right). \quad (3.18)$$

$U(x_0, x_n, C)$ è chiamata *linea di Wilson* da x_n a x_0 lungo il cammino C . Quando questo è un circuito chiuso, la quantità U è detta *Wilson loop*.

La connessione di gauge è quindi l'oggetto che ci dice come legare insieme i fibrati a formare il fibrato tangente: questo ruolo è svolto dal campo di gauge A_μ^a una volta scelta una base di coordinate. Una *trasformazione di gauge* $\Lambda(x)$ è un cambiamento di tali coordinate, con cui ruotiamo il fibrato in x con la matrice $\Lambda(x)$ di $SU(N)$. Questo cambio di coordinate induce una compensazione in A_μ^a poiché i fibrati sono ancora legati insieme nello stesso modo nonostante la rotazione.

A questo punto l'implementazione sul reticolo è chiara, poiché dobbiamo rappresentare i campi di gauge con quello che sono veramente, cioè istruzioni per il trasporto parallelo. Dato che i campi Φ sono definiti soltanto nei punti del reticolo, le proprietà di tale trasporto sono richieste soltanto tra di essi. Inoltre supponiamo che i cammini consentiti siano composti da link elementari, che sono le linee tra punti primi vicini del reticolo. Allora una possibilità per la connessione, data una base di coordinate dello spazio del campo Φ in ogni punto, è una matrice di $SU(N)$ associata a ogni link elementare: questo significa che il campo di gauge del reticolo è

$$U_\mu(x) \equiv \text{Pexp} \int_x^{x+a\hat{\mu}} A_\mu^a(x + dl) T^a dl = \exp(iaT^a A_\mu^a(x)), \quad (3.19)$$

dove si è sfruttato il fatto che il Pexp, definito in generale su algebre non commutative, coincide con l'esponenziale ordinario dell'integrale su algebre commutative. In base a quanto visto, il contenuto in termini di campi della teoria di gauge su reticolo è riassunto in figura 3.5.

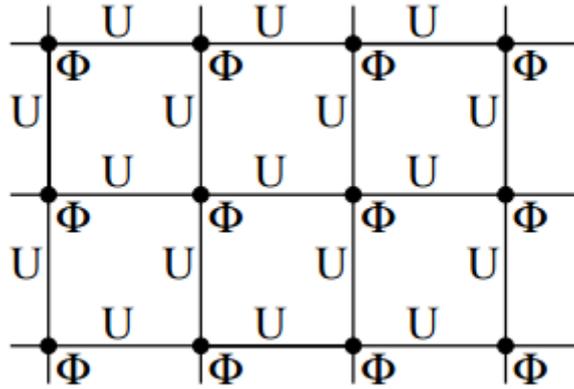


Figura 3.5: Gradi di libertà del reticolo: un campo Φ in ogni punto del reticolo e un campo U su ogni link.

3.2.2 Localizzazione degli autostati

Il modello di Harper coinvolge un reticolo quadrato bidimensionale di passo a , immerso in un campo magnetico uniforme H ortogonale ad esso. Per ricavare l'equazione di Schrödinger di questo sistema restringiamo le nostre considerazioni a quello che succede quando viene applicato il campo a una singola banda di Bloch, indipendente dalle altre. Oltre a ciò, postuliamo che la funzione dell'energia di Bloch abbia la seguente forma, tipica del modello tight-binding,

$$W(k) = 2E_0(\cos(k_x a) + \cos(k_y a)). \quad (3.20)$$

Per tenere conto della presenza del campo magnetico eseguiamo in questa definizione la cosiddetta *sostituzione di Peierls*, ovvero scriviamo al posto di $\hbar k$ l'operatore $p - eA/c$, con A potenziale vettore, in modo da rendere un operatore lo stesso $W(k)$, così da poterlo trattare come hamiltoniana efficace a singola banda. A causa della sostituzione, oltre a due operatori di traslazione $\exp(iap_x/\hbar)$ e $\exp(iap_y/\hbar)$, secondo quanto discusso nella precedente sezione e in particolare in base all'equazione (3.19), in W compaiono anche dei fattori di fase dipendenti dall'intensità del campo magnetico, che moltiplicano gli operatori di traslazione. Se viene scelta la gauge di Landau $A = H(0, x, 0)$ allora soltanto le traslazioni lungo y acquisiscono questi fattori di fase.

Nel momento in cui questa hamiltoniana efficace è inserita in un'equazione di Schrödinger stazionaria con una funzione d'onda bidimensionale, si ottiene la seguente equazione agli autovalori

$$E_0[g(x+a, y) + g(x-a, y) + e^{-\frac{ieHax}{\hbar c}}g(x, y+a) + e^{\frac{ieHax}{\hbar c}}g(x, y-a)] = \epsilon g(x, y),$$

nella quale notiamo che la funzione d'onda in (x, y) è legata a quella dei suoi quattro primi vicini nel reticolo. A questo punto è conveniente fare la sostituzione

$$x = na \quad y = ma \quad \frac{\epsilon}{E_0} = E,$$

inoltre notiamo che è ragionevole assumere che la funzione d'onda si comporti come un'onda piana in direzione y , dato che i coefficienti nell'equazione contengono soltanto x , perciò scriviamo

$$g(na, ma) = e^{-ihm}\psi_n.$$

Introduciamo poi il parametro adimensionale

$$\alpha = \frac{a^2 H}{\hbar c/e},$$

che diviso per 2π rappresenta il rapporto tra il flusso che attraversa una cella del reticolo e il quanto di flusso del campo magnetico. Infine inseriamo nell'equazione il parametro γ sul quale concentreremo la nostra analisi, che generalizza il caso di reticolo quadrato descrivendone le anisotropie, ovvero che tiene conto di un hopping diverso a seconda della direzione: ciò che si ottiene prende il nome di *equazione di Harper*

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \gamma \cos(n\alpha + h)\psi_n = E\psi_n. \quad (3.21)$$

Questa stessa equazione può essere vista come descrivente un sistema composto da una particella che si muove in un reticolo unidimensionale soggetta a un generico potenziale periodico: in questo caso 1 e $(\alpha/2\pi)^{-1}$ rappresentano i due periodi caratteristici del problema, rispettivamente del reticolo e del potenziale.

Siamo interessati ora a studiare il comportamento delle autofunzioni del sistema al variare del parametro γ . Invertendo analiticamente le matrici tridiagonali associate all'equazione (3.21), del tipo $\text{Toepf}(1, \gamma \cos(n\alpha + h), 1)_n$, si osserva un comportamento molto particolare: quando $\alpha/2\pi$ è un numero razionale gli elementi dell'inversa appartenenti all'antidiagonale principale decadono esponenzialmente per ogni valore di γ , se invece $\alpha/2\pi$ è irrazionale il decadimento si osserva soltanto nel caso in cui $\gamma > 2$ (figura 3.6).

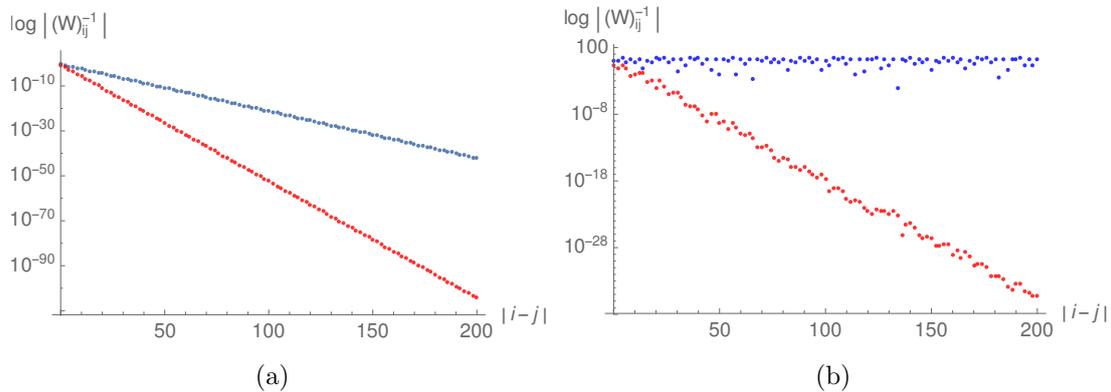


Figura 3.6: Elementi dell'antidiagonale principale dell'inversa della matrice $W = \text{Toepf}(1, \gamma \cos(n\alpha + h), 1)_n$ ($n = 201, \nu = 0$) con $\gamma = 1$ (blu) e $\gamma = 3$ (rosso). In (a) ($\alpha = 3/2$) si osserva in ogni caso il tipico decadimento esponenziale, in (b) ($\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$) soltanto quando $\gamma > 2$ (grafici esportati da *mathematica*).

Grazie a questa osservazione, basandoci sulle conclusioni di sezione 2.3.1 secondo cui l'andamento degli elementi dell'inversa di una qualsiasi matrice a banda è dettato dal più piccolo esponente di Lyapunov, possiamo affermare che se $\alpha/2\pi$ è irrazionale si ha una transizione di fase per $\gamma = 2$. Infatti si definisce *lunghezza di localizzazione* la quantità

$$\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad (3.22)$$

con λ esponente di Lyapunov minimo in modulo, che rappresenta la lunghezza caratteristica del decadimento esponenziale della funzione d'onda. Nel seguito ci proponiamo dunque di dimostrare analiticamente la supposizione secondo cui $\gamma = 2$ sia il valore di separazione tra un regime di autostati estesi ($\gamma < 2$) e uno di autostati localizzati ($\gamma > 2$) quando il parametro α è irrazionale. In maniera rigorosa diciamo che un'autofunzione ψ_n è *localizzata* se

$$\sum_n |\psi_n|^2 < \infty,$$

in caso contrario è detta *estesa*, con la richiesta che non diverga

$$\sup_n |\psi_n| < \infty.$$

Prima di procedere segnaliamo che il caso "critico" $\gamma = 2$ è stato studiato da Hofstadter in [15], che ha messo in luce come le funzioni d'onda non siano né estese né localizzate, ma esibiscono uno scaling secondo una legge di potenza, oltre al fatto che lo spettro è singolare continuo, ovvero costituito da un insieme privo di punti isolati ma con misura di Lebesgue nulla (insieme di Cantor).

Consideriamo l'equazione (3.21) del modello di Harper e notiamo che per $\gamma = 0$ le autofunzioni sono onde piane $\psi_n^{(k)} = e^{ikn}$ con autovalori $E(k) = 2 \cos k$. La teoria delle perturbazioni standard al primo ordine in γ mostra che le autoenergie restano invariate, mentre le funzioni d'onda diventano

$$\psi_n^{(k)} = e^{ikn} + \lambda \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{v_l e^{il(\alpha n + h)}}{2(\cos(l\alpha + k) - \cos k)},$$

in cui v_l è definito dallo sviluppo di Fourier

$$V(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} v_l e^{ilx}$$

con $V(x)$ potenziale. Una teoria delle perturbazioni a ordine finito converge per ogni vettore d'onda k se $\alpha/2\pi$ è irrazionale, ciò suggerisce di cercare soluzioni del tipo

$$\psi_n = e^{ikn} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l e^{il(\alpha n + h)}, \quad (3.23)$$

ovvero delle onde piane arricchite con armoniche derivanti dal potenziale V . Sostituendo questa espressione in (3.21) otteniamo un sistema duale, poiché l'equazione che ne risulta per f_l possiede la stessa forma

$$f_{l+1} + f_{l-1} + \frac{4}{\gamma} \cos(l\alpha + k) f_l = \frac{2E}{\gamma} f_l. \quad (3.24)$$

Grazie a ciò notiamo che se troviamo una soluzione localizzata f_l di questa equazione, se ψ_n converge allora è una soluzione di (3.21) tale che $\sum |\psi_n|^2 = \infty$, il che suggerisce che la trasformazione di dualità scambia le proprietà di localizzazione ed estensione delle funzioni d'onda.

Quando reticolo e potenziale sono commensurabili possiamo legare le densità di stati $dN(E)$ dei sistemi duali appena definiti. Poniamo

$$\alpha_c = 2\pi \frac{r}{s},$$

allora le soluzioni di (3.21) possono essere messe nella forma esatta

$$\psi_n = e^{ikn} \sum_{l=0}^{s-l} f_l e^{il(\alpha_c n + h)}$$

con $-\pi/s < k \leq \pi/s$ in una zona di Brillouin. Ponendo per comodità $f_{l+s} = f_l \forall n$ abbiamo che f_l soddisfa

$$f_{l+1} e^{ih(l+1)} + f_{l-1} e^{ih(l-1)} + \frac{4}{\gamma} \cos(\alpha_c l + k) f_l e^{ihl} = \frac{2E}{\gamma} f_l e^{ihl},$$

che mostra come $e^{ihl} f_l$ sia un'onda piana soluzione del sistema duale con vettore d'onda h . La trasformazione duale scambia dunque il ruolo delle fasi h e k , ma le autoenergie corrispondenti hanno lo stesso numero di energie più basse. Definendo

$$N_{\gamma, \alpha, h}(E) = \int_{-\infty}^E dN_{\gamma, \alpha, h}(E') \quad (3.25)$$

la densità degli stati integrata del sistema descritto da (3.21), si trova che

$$\left| N_{\gamma, \alpha_c, h}(E) - N_{\frac{4}{\gamma}, \alpha_c, k} \left(\frac{2E}{\gamma} \right) \right| < \frac{1}{s} \quad (3.26)$$

dove il membro destro rappresenta la variazione di dN in una delle bande s (per h e k arbitrari).

Passando al caso irrazionale, quando $\alpha_c \rightarrow \alpha$ incommensurabile con 2π è possibile dimostrare che

$$N_{\gamma, \alpha_c, h}(E) \rightarrow N_{\gamma, \alpha}(E)$$

indipendente da h (cfr. [17], pp. 156-157). Grazie a ciò l'equazione (3.26) fornisce

$$N_{\gamma, \alpha}(E) = N_{\frac{4}{\gamma}, \alpha} \left(\frac{2E}{\gamma} \right),$$

valida soltanto se $\alpha/2\pi$ è irrazionale. Inserendo questo risultato nella formula di Thouless (2.16) otteniamo la trasformazione duale tra gli esponenti di Lyapunov

$$\lambda_{\gamma, \alpha}(E) = \lambda_{\frac{4}{\gamma}, \alpha} \left(\frac{2E}{\gamma} \right) + \log \frac{\gamma}{2}. \quad (3.27)$$

Dato che questi sono positivi per definizione, abbiamo che $\gamma > 2$ implica

$$\lambda_{\gamma, \alpha}(E) \geq \log \frac{\gamma}{2} > 0,$$

il che significa che tutte le soluzioni ψ_n di (3.21) a una data energia E_α sono esponenzialmente localizzate, e corrispondentemente le soluzioni f_l di (3.24) con energia $2E/\gamma$ sono estese, cioè

$$\lambda_{\frac{4}{\gamma}}\left(\frac{2E_\alpha}{\gamma}\right) = 0.$$

In base a (3.27) questo ragionamento si traduce in

$$\lambda_\gamma(E_\alpha) = \log \frac{\gamma}{2},$$

ovvero una lunghezza di localizzazione pari a

$$\xi = \frac{1}{\log \gamma/2}.$$

Concludiamo notando che se per $\gamma < 2$ esistesse una soluzione esponenzialmente localizzata di (3.21), allora f_l sarebbe una funzione d'onda estesa per $4/\gamma > 2$, il che non è possibile per (3.27). Visto che le densità di stati dei due modelli duali corrispondono troviamo che tutte le soluzioni ψ_n sono onde piane modulate per $\gamma < 2$.

Conclusioni

Il risultato principale esposto in questo lavoro è sicuramente il teorema di Demko, Moss e Smith contenuto nel capitolo 1, con le relative estensioni. Abbiamo visto che questo non si limita a descrivere il decadimento esponenziale lontano dalla diagonale principale degli elementi dell'inversa di una generica matrice a banda, ma si traduce anche in una condizione di crescita o decrescita esponenziale dei valori singolari della matrice di trasferimento associata. In base alla scrittura

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu \rangle = \langle T^*Tu, u \rangle = \sigma^2 \langle u, u \rangle = \sigma^2 \|u\|^2,$$

dove u è un autovettore e σ un valore singolare di T , si capisce che questo equivale ad affermare che gli autovettori sono caratterizzati da una norma che cresce o decresce esponenzialmente con la dimensione n del sistema.

Tale risultato, già noto "quasi certamente" dal teorema di Osceledec sotto opportune condizioni sulla distribuzione degli elementi di matrice, diventa un'affermazione valida per ogni singola matrice di trasferimento, a qualunque valore finito di n . La dimostrazione del teorema 2.2.6 è infatti più semplice, e per garantire che gli stati fisicamente accettabili di un sistema k -banded (a blocchi) rimangano soppressi esponenzialmente all'infinito è richiesta soltanto l'invertibilità. Proprio questa corrispondenza tra risultato probabilistico e deterministico sta alla base della relazione esistente tra esponenti di Lyapunov e tasso di decadimento degli elementi dell'inversa, messa in luce numericamente in sezione 2.3.1. Questa osservazione evidenzia l'importanza dei risultati esposti nel presente lavoro nel contesto dello studio della localizzazione di un sistema, come mostrato in maniera emblematica nel capitolo 3.

I vincoli ricavati a partire dal teorema di DMS non sono però esenti da problemi. Come mostrato in sezione 1.3.1, gli autovalori del sistema, in cui l'operatore risolvente non è definito, rappresentano dei veri e propri limiti per l'applicabilità delle stime, che peggiorano man mano che ci si avvicina ad essi. Più in generale non sempre è nota la dipendenza dei parametri

$$C(E) = \frac{(\text{cond}(A - E\mathbb{I}) + 1)^2}{2 \|A - E\mathbb{I}\|_{\mathcal{B}}^2} \quad q(E) = 1 - \frac{2}{\text{cond}(A - E\mathbb{I}) + 1}$$

dalla dimensione n del sistema, cosa che può portare a vincoli non significativi quando questa tende a infinito. Un risultato di grande rilevanza sarebbe dunque studiare in maniera dettagliata le proprietà del numero di condizionamento di matrici k -banded, così da poter garantire, sotto determinate ipotesi sulla distribuzione degli elementi di matrice, che C e q tendano rispettivamente a infinito e a 1 abbastanza lentamente da essere esponenzialmente soppressi al crescere di n .

Bibliografia

- [1] G. Meinardus (1967). *Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods*. Springer. Berlin.
- [2] S. Demko, W.F. Moss, P.W. Smith (1984). *Decay Rates for Inverses of Band Matrices*. *Mathematics of Computation* **43**, pp. 491-499.
- [3] R. Bhatia (1997). *Matrix Analysis*. Springer. New York.
- [4] W. Rudin (1991). *Functional Analysis (second edition)*. McGrawHill. New York.
- [5] M. Reed, B. Simon (1980). *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1: Functional Analysis (revised and enlarged edition)*. Academic Press. San Diego.
- [6] F. Zhang (1999). *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*. Springer. Berlin.
- [7] L.G. Molinari (2013). *Identities and Exponential Bounds for Transfer Matrices*. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **46**, 254004
- [8] K.B. Athreya, S.N. Lahiri (2006). *Measure Theory and Probability Theory*. Springer. New York.
- [9] J. Lacroix (1984). *Computations of the Sum of Positive Lyapunov Exponents for the Lloyd Model in a Strip*. In *Lyapunov Exponents. Lecture Notes in Mathematics* 1186, pp. 258-264. Springer. Berlin.
- [10] D.J. Thouless (1972). *A Relation between the Density of States and Range of Localization for One Dimensional Random Systems*. *Journal of Physics C: Solid State Physics* **5**, pp. 77-81.
- [11] F. Chung, S.T. Yau (2000). *Discrete Green's Functions*. *Journal of Combinatorial Theory A* **91**, 1-2, pp. 191-214.
- [12] G. Meurant (1992). *A Review on the Inverse of Symmetric Tridiagonal and Block Tridiagonal Matrices*. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **13**, pp. 707-728.
- [13] G.D. Moore (2003). *Informal Lectures on Lattice Gauge Theories*. McGill University

-
- [14] H.J. Rothe (1992). *Lattice Gauge Theories: an Introduction*. Lecture Notes in Physics, **43**. World Scientific. Singapore.
- [15] D.R. Hofstadter (1976). *Energy Levels and Wave Functions of Bloch Electrons in Rational and Irrational Magnetic Fields*. Physical Review B, **14**, 6.
- [16] A.G. Abanov, J.C. Talstra, P.B. Wiegmann (1998). *Asymptotically Exact Solutions of Harper Equation*. Physical Review Letters, **81**, 2112.
- [17] S. Aubry, G. André (1979). *Analyticity Breaking and Anderson Localization in Incommensurate Lattices*. In Proceedings of the VIII International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics. Annals of the Israel Physical Society, **3**.
- [18] G. Nabben (1992). *Decay Rates of the Inverse of Nonsymmetric Tridiagonal and Band Matrices*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **20**, pp. 820-837.
- [19] M. Benzi, G.H. Golub (1999). *Bounds for the Entries of Matrix Functions with Applications to Preconditioning*. BIT Numerical Mathematics **39**, 3, pp. 417-438.