



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE
Corso di Laurea Triennale in Fisica

La transizione λ dell'elio superfluido

Relatore:
Prof. Luca G. MOLINARI

Elaborato finale di:
Mattia MANTOVANI
matr. 774676

PACS: 67.40.-w
67.25.dj

Anno Accademico 2012-2013

Indice

Introduzione	v
1 Gas di Bose	1
1.1 Frazione condensata e temperatura critica	1
1.2 Comportamento presso T_c	3
1.2.1 Calore specifico	3
1.3 BEC in presenza di interazione	4
1.3.1 Hartree-Fock	5
2 Elio superfluido	7
2.1 ^4He e ^3He	7
2.2 Fase superfluida del ^4He	7
2.3 Modello a due fluidi	9
2.3.1 Motivazione	9
2.3.2 Vortici	10
2.3.3 Secondo suono	11
2.3.4 Eccitazioni elementari: fononi e rotoni	12
2.4 Descrizione di Bogoliubov	13
3 Studio della transizione λ	17
3.1 Densità superfluida	17
3.2 Viscosità	19
3.3 Calore specifico	20
3.4 Espansione termica	20
3.5 Conducibilità termica	21
3.6 Velocità e attenuazione del suono	22
3.7 Secondo suono	22
3.8 Coesistenza di fase	23
3.9 Transizione superfluida in due dimensioni	24
3.9.1 Teoria di Kosterlitz-Thouless	24
3.9.2 Derivazione di ρ_s dal Modello XY-2D	25
3.10 Estensione al Modello XY-3D	26
3.11 Considerazioni finali	26
A Statistica di Bose-Einstein	29
Bibliografia	31

Introduzione

La liquefazione dell'elio da parte di Heike Kamerlingh Onnes nel 1911 apre la strada alla fisica delle basse temperature. A conclusione del discorso per il ricevimento del Premio Nobel (1913), Kamerlingh Onnes prevede che il progresso nella criogenia possa *'contribuire a togliere il velo che l'agitazione termica stende sul mondo degli atomi e degli elettroni'*. Le sorprendenti proprietà dell'elio ed il suo comportamento non classico vengono scoperti tra il 1928 e il 1932 a Leida, da W. H. Keesom e dai suoi collaboratori [35, 50]. Gli esperimenti proseguono per tutto il decennio successivo ma sono in continua rielaborazione sia grazie a miglioramenti delle tecniche sperimentali, sia grazie agli impulsi dati negli anni Sessanta alla teoria della materia condensata e dei fenomeni critici.

L'analogia fra la *transizione superfluida* e la condensazione di Bose-Einstein (ipotizzata nel 1925 e osservata solo settant'anni più tardi) viene teorizzata per la prima volta da London nel 1938, ma ancora oggi gli esperimenti e la teoria continuano a trovare punti di contatto e allo stesso tempo forti divergenze. La transizione riveste particolare importanza poiché coinvolge un *fluido quantistico*, per il quale le teorie fenomenologiche (Tisza [61], Landau [41]) danno una buona comprensione delle proprietà di *bulk*, ma non permettono lo studio del punto critico. Lo stesso risultato è dato dalle teorie microscopiche *many-body* (Bogoliubov [14], Ginzburg-Pitaevskii [24]).

L'avvento, nello studio dei fenomeni critici, del concetto di *scaling* (Widom [65, 66]), l'introduzione dell'*universalità* (Kadanoff [33]) e dell'applicazione delle tecniche del *gruppo di rinormalizzazione* (Wilson [67, 68]) consentono una svolta in questo campo, anche estendendosi a fenomeni dinamici come viscosità e conducibilità termica [27]. Più recentemente si è posta l'attenzione agli effetti della gravità sui fenomeni critici (*broadening* della transizione di fase), portando ad esperimenti nello spazio in condizioni di microgravità [46]. Si veda in proposito il lavoro di Barmatz, et al. [12].

In questo elaborato verrà esaminata la transizione superfluida nel ^4He , dopo un'introduzione sulla fenomenologia di base e sulla condensazione di Bose-Einstein; verranno raccolti i risultati sperimentali per alcune variabili rilevanti, con attenzione anche agli esperimenti in microgravità. In seguito si accennerà alla transizione in due dimensioni (film sottili di elio liquido) e alla connessione con il Modello XY di Meccanica Statistica.

Capitolo 1

Gas di Bose

In questo capitolo introduttivo viene richiamata la condensazione di Bose-Einstein e ne vengono analizzate le principali proprietà, che verranno successivamente riprese nello studio della transizione superfluida.

Il punto di partenza è la distribuzione statistica di occupazione degli stati energetici per un gas di bosoni non interagenti, nota come *distribuzione di Bose-Einstein*, che viene derivata nell'Appendice A. Si riporta quindi la (A.10),

$$\langle \hat{N} \rangle = \sum_k \langle \hat{n}_k \rangle = \sum_k \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_k - \mu)] - 1},$$

dove N rappresenta il numero medio totale di particelle e n_k il numero di occupazione medio dello stato k .

1.1 Frazione condensata e temperatura critica

Nel limite termodinamico ($N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $N/V \rightarrow \text{cost.}$) l'energia totale del gas in (A.2) e il numero totale di particelle in (A.3) diventano integrali sulla densità degli stati, che per particelle libere in 3D è notoriamente data da

$$\rho(\epsilon) = \sum_k \delta(\epsilon - \epsilon_k) \xrightarrow[V \rightarrow \infty]{N \rightarrow \infty} \rho_{3D}(\epsilon) = g_s \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\epsilon}, \quad (1.1)$$

dove $g_s = 2s + 1$ è la degenerazione di spin (che assumeremo nullo).

Introducendo la *fugacità* $z = e^{\beta\mu}$ si osserva che per $z \rightarrow 1$ il potenziale grand canonico in (A.9) diverge, in quanto diverge il primo termine della somma relativo al ground state di $\epsilon_0 = 0$ ($\mathbf{k} = 0$): in questo limite l'identificazione della somma con un integrale non è valida. Si isola dunque il termine ϵ_0 sostituendo il resto della sommatoria con un integrale. Si ottiene [38]

$$\Omega = \underbrace{-k_B T \log(1 - z)}_{\Omega_0} + k_B T \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z), \quad (1.2)$$

$$N = \underbrace{\frac{z}{1 - z}}_{N_0} + \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z). \quad (1.3)$$

Sono state introdotte la *lunghezza d'onda termica di De Broglie*

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$$

e la *funzione di Debye*¹

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{z e^x - 1}.$$

Con N_0 si intende il numero di occupazione medio dello stato fondamentale,

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} = \frac{z}{1 - z}.$$

Esso ha rilevanza se N_0/V è non nullo nel limite termodinamico, ovvero se una frazione macroscopica dei bosoni occupa lo stato con $\mathbf{k} = 0$. La funzione $g_{3/2}(z)$ è monotona crescente per $0 \leq z \leq 1$ e assume il valore notevole $g_{3/2}(1) = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2.612$ (Fig. 1.1). La (1.3) può essere riscritta per $z = 1$ come

$$1 - \frac{N_0}{N} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{V}{N} \frac{1}{\lambda^3(T)}, \quad (1.4)$$

da cui si vede che $\frac{N_0}{N}$ si annulla nel limite termodinamico se è soddisfatta

$$\lambda_c^3 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{V}{N}. \quad (1.5)$$

Riesprimendo λ in termini di T si ottiene la *temperatura critica*:

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{1}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (1.6)$$

Quando la lunghezza d'onda termica diventa dello stesso ordine di grandezza della lunghezza di separazione tra i bosoni, una frazione macroscopica delle particelle inizia ad occupare lo stato fondamentale. Sotto T_c il numero di occupazione N_0 è $O(N)$ e non più $O(1)$. Ci si riferisce al fenomeno con il termine *condensazione di Bose-Einstein* o BEC.

Dividendo (1.4) per (1.5) si ottiene infine l'andamento di N_0/N per $T < T_c$ (Fig. 1.2):

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (1.7)$$

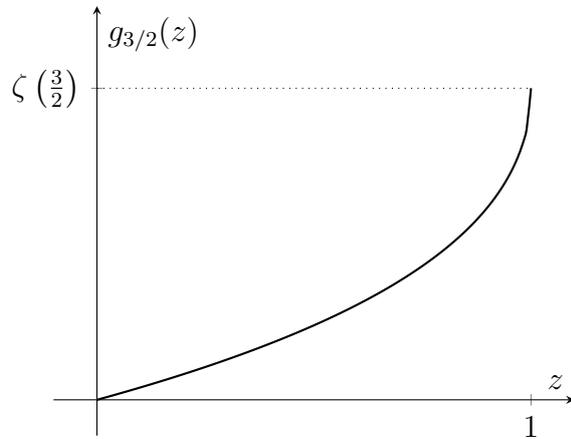


Figura 1.1: Funzione di Debye nell'intervallo $[0, 1]$.

¹La funzione coincide con il *polilogaritmo* $\text{Li}_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\alpha}$ che converge per $0 \leq |z| \leq 1$.

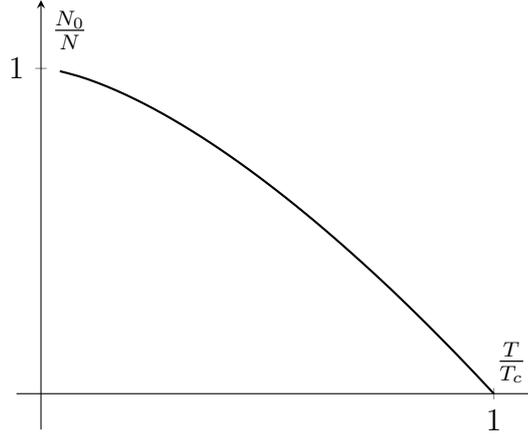


Figura 1.2: Frazione condensata in un gas di bosoni per $T < T_c$.

1.2 Comportamento presso T_c

Lo studio della transizione di fase richiede uno sviluppo di $g_{3/2}(z)$ attorno a $z = 1$. Usando l'espansione [52]

$$g_\alpha(z) = g_\alpha(1) - \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (1-z)^{\alpha-1} + \dots \quad (1.8)$$

la (1.4) diventa

$$1 - \frac{N_0}{N} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{V}{N} \frac{1}{\lambda^3(T)} \left[1 - \frac{2\sqrt{\pi}}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1+N_0}} + \dots \right]. \quad (1.9)$$

Per $T \geq T_c$ il rapporto $\frac{N_0}{N}$ è nullo nel limite termodinamico. Dividendo (1.9) per (1.5) si ottiene

$$1 = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{2\sqrt{\pi}}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1+N_0}} + \dots \right] \Rightarrow \left[\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{1+N_0}}.$$

Usando lo sviluppo attorno a T_c

$$\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \simeq 1 + \frac{3}{2} \frac{T - T_c}{T_c}$$

si può infine scrivere l'occupazione media del ground state per $T \gtrsim T_c$

$$N_0 \simeq \frac{16\pi}{9} \frac{1}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)^2} \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)^{-2}, \quad (1.10)$$

che decresce allontanandosi da T_c .

1.2.1 Calore specifico

L'espansione (1.8) consente di scrivere l'espressione del calore specifico nell'intorno di $z = 1$. Dalla relazione $E = -\frac{3}{2}\Omega$ si ricava l'espressione dell'energia del gas per particella (evidenziando T_c):

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2}k_B T \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} - \underbrace{\frac{9}{16\pi}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)^2}_{\text{correzione per } T \gtrsim T_c} + \dots \right] \quad (1.11)$$

Segue l'espressione del calore specifico a volume costante:

$$C_V = \frac{15}{4}k_B \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} + \begin{cases} 0 & \text{per } T < T_c, \\ -\frac{27}{16\pi}\zeta(3/2)^2 k_B \frac{T-T_c}{T_c} & \text{per } T \gtrsim T_c. \end{cases} \quad (1.12)$$

Si osserva l'andamento $\sim T^{3/2}$ sotto la temperatura critica che caratterizza la BEC. Il calore specifico risulta inoltre *continuo* in T_c ma è *discontinua* la sua derivata (Fig. 1.3): il salto della pendenza vale [43]

$$\Delta \left[\frac{\partial C_V}{\partial T} \right]_{T_c} \approx -3.66 \frac{k_B}{T_c}.$$

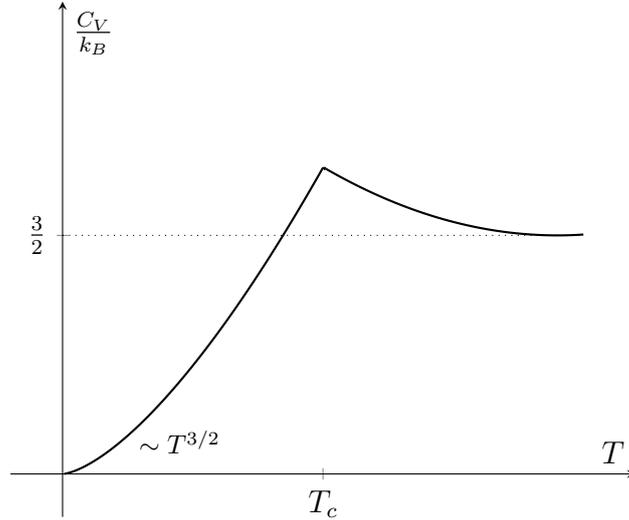


Figura 1.3: Calore specifico per il gas ideale di Bose.

1.3 BEC in presenza di interazione

L'analisi sopra riportata è ovviamente valida solo nel caso prettamente ideale di un gas non interagente. L'ausilio di tecniche *many-body* consente però un'approssimazione nel caso di deboli interazioni fra i bosoni. Ciò che si ricava in generale dalla teoria è un *abbassamento* della temperatura critica: questo comportamento è intuibile e può venire utilizzato per il confronto tra BEC e transizione superfluida dell'elio, oggetto di questo lavoro. Se infatti si prende come densità del ^4He il valore $\rho \approx 0.145 \text{ g/cm}^3$ si ottiene dalla (1.6) una temperatura critica di

$$T_{\text{He}} \approx 3.14 \text{ K},$$

superiore ma dello stesso ordine di grandezza di $T_\lambda \approx 2.17 \text{ K}$ (cfr. Sez. 2.2). L'elio liquido non può ovviamente essere trattato come un gas ideale.

1.3.1 Hartree-Fock

L'approssimazione Hartree-Fock a un gas di bosoni è un valido esempio di queste applicazioni. Sia ϵ_k^0 lo spettro energetico del gas ideale, ovvero

$$\epsilon_k^0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

L'effetto di un'interazione $v(\mathbf{x})$ con trasformata di Fourier $\tilde{v}(\mathbf{k})$ è la modifica dello spettro in

$$\epsilon_k = \epsilon_k^0 + \hbar \Sigma^*(k), \quad (1.13)$$

dove

$$\Sigma^*(k) = \underbrace{\frac{N}{\hbar V} \tilde{v}(0)}_{\text{termine diretto}} + \underbrace{\frac{1}{\hbar V} \sum_{k'} n_{k'} \tilde{v}(k - k')}_{\text{termine di Hartree}}$$

è la self-energia in approssimazione HF. Passando al continuo si hanno le solite

$$N = N_0 + \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \quad \text{con} \quad N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1}; \quad (1.14)$$

$$E = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{\epsilon_k}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}, \quad (1.15)$$

dove ϵ_k è lo spettro HF (1.13). La condizione per la fase di condensato è data da $\mu = \epsilon_0$, che si traduce nella condizione per la temperatura critica:

$$\frac{N}{V} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp \beta_c (\epsilon_k - \epsilon_0) - 1}. \quad (1.16)$$

Si introducono qui gli sviluppi per *piccoli* k :

$$\epsilon_k \approx \epsilon_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}, \quad (1.17)$$

$$\tilde{v}(k) = \int d^3 x v(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \approx \tilde{v}(0) \left(1 - \frac{1}{6} a^2 k^2 \right), \quad (1.18)$$

dove m^* è una *massa efficace* e a^2 riassume il coefficiente di grado 2 dello sviluppo. Sostituendo in (1.16) si giunge alla relazione

$$\frac{T_{\text{HF}}}{T_c} = \frac{m}{m^*}, \quad (1.19)$$

dove T_{HF} è la temperatura critica in approssimazione HF, T_c quella del gas ideale. È dunque evidente che il rapporto m/m^* influenza la temperatura critica. Il suo valore può essere ricavato sostituendo direttamente lo sviluppo del potenziale $\tilde{v}(k)$ in (1.13), ottenendo

$$\frac{m}{m^*} \approx 1 - \frac{1}{3} \frac{\tilde{v}(0) m a^2 n}{\hbar^2}. \quad (1.20)$$

Se $\tilde{v}(0) > 0$ l'effetto complessivo dell'interazione è un abbassamento della temperatura critica.

L'applicazione di questa approssimazione al ${}^4\text{He}$ consente di ottenere gli andamenti asintotici di N_0/N e del calore specifico C_V in corrispondenza di T_λ . Il calcolo è svolto da Luban e Grobman [48], imponendo $T_c = T_\lambda$ e utilizzando quindi dalla (1.19) una $m^* = 5.52m$ e come $v(\mathbf{k})$ lo pseudopotenziale di sfera rigida del diametro di 2.2 Å (pari alla distanza interatomica media nell'elio liquido).

Si ottiene un andamento

$$N_0(T) \simeq A(T_\lambda - T)^{\frac{1}{2}},$$

Il risultato è però in disaccordo col dato sperimentale (vedi Sez. 2.3). Analogamente, si ottiene per il calore specifico una divergenza del tipo

$$C_V(T) \simeq B(T_\lambda - T)^{-\frac{1}{2}},$$

anch'essa non verificata sperimentalmente (vedi Sez. 3.3).

È necessario notare che il calcolo di Luban e Grobman applicato ad un'approssimazione microscopica diversa, nell'ambito della superfluidità (dovuta a Bogoliubov, Sez. 2.4) riproduce gli stessi esponenti critici.

Capitolo 2

Elio superfluido

2.1 ^4He e ^3He

L'elio si presenta in natura sotto forma di due isotopi: il più comune ^4He e il ^3He , la cui abbondanza relativa è minore dello 0,0002%. Entrambi gli isotopi hanno ground state 1S_0 (shell chiusa) e pertanto spin elettronico 0. Il ^4He è però un bosone in quanto privo di gradi di libertà interni (il nucleo ha due protoni e due neutroni e spin 0), mentre il ^3He è un fermione (spin nucleare $\frac{1}{2}$): questa differenza è fondamentale per la descrizione delle proprietà quantistiche dell'elio liquido, che può essere considerato il più semplice *quantum liquid*. L'elio è infatti l'unica sostanza a rimanere liquida a temperatura nulla e pressione di vapore. Ciò è dovuto all'assenza nel ground state di momento magnetico o elettrico e conseguente bassissima polarizzabilità (deboli forze di Van der Waals); le interazioni interatomiche sono descritte da un potenziale di tipo Lennard-Jones che mostra un minimo alla separazione di $\approx 2.3 \text{ \AA}$ e permette la formazione di un dimero con una bassissima energia di legame ($\approx 0.1 \text{ mK}$); la piccola massa atomica produce ampie oscillazioni di punto zero e impedisce ulteriormente la solidificazione. Le densità dei due liquidi sono di conseguenza piuttosto basse, $\rho_{^3\text{He}} \approx 0.081 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_{^4\text{He}} \approx 0.145 \text{ g/cm}^3$.

2.2 Fase superfluida del ^4He

Il diagramma di fase PT del ^4He è mostrato in Fig. 2.1. La temperatura di ebollizione alla pressione di vapore è di 4.24 K e la solidificazione avviene solo per pressioni superiori a 2.5 MPa. A 2.17 K esso entra nella *fase II* con una transizione caratterizzata da una divergenza logaritmica del calore specifico. L'andamento di tale curva suggerì il nome λ -*transition* (Fig. 3.4), e si è soliti indicare la temperatura di transizione con T_λ .

L' $^4\text{He II}$ viene chiamato *superfluido*. Il termine viene coniato nel 1938 dal russo P. Kapitza sulla base di misure della viscosità al di sotto di T_λ [34], ma il comportamento non classico del liquido era

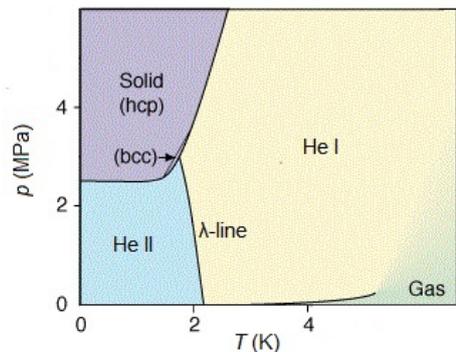


Figura 2.1: Diagramma di fase del ^4He .

già stato evidenziato nel 1930 (misure di calore specifico, W.H. Keesom [35]) e tra il 1932 e il 1937 (conducibilità termica, McLennan et al. [50], Keesom [36], Allen [5]).

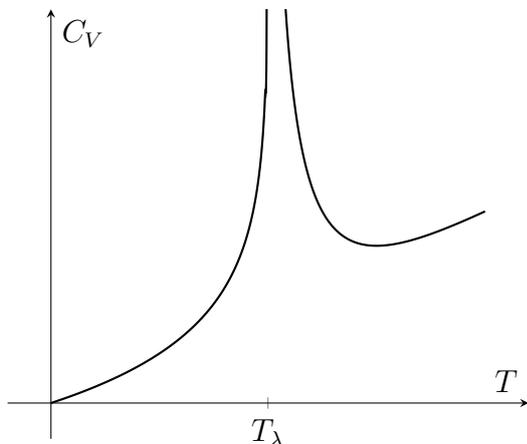


Figura 2.2: Andamento qualitativo del calore specifico del ${}^4\text{He}$.

La fase superfluida è caratterizzata da alcuni fatti sperimentali:

Assenza di viscosità. Gli esperimenti indipendenti di Allen e di Kapitza mostrano come l'He II possa scorrere in capillari sottili senza dissipazione e senza un gradiente di pressione applicato, se la sua velocità è minore di una certa *velocità critica* v_c . I due gruppi misurano indirettamente la viscosità da considerazioni idrodinamiche standard, trovando un crollo di un fattore 1500 al di sotto di T_λ (il limite superiore è di 10^{-11} poise). Come conseguenza, l'elio può fluire attraverso i pori di un contenitore solido che di norma riuscirebbe a trattenere un qualsiasi altro liquido.

Se si pone un contenitore aperto contenente He II in un bagno di He II, il liquido si “arrampica” sulle pareti esterne del contenitore formando un film sottile grazie alla forza attrattiva di Van der Waals (che è normalmente bloccato dalla viscosità) e fuoriesce, finché il livello all'interno uguaglia quello all'esterno (Fig. 2.3).

Conducibilità termica. La conducibilità termica dell'He II supera di 6-12 ordini di grandezza quella di ogni sostanza. La propagazione del calore nell'He II è particolare: se in una sostanza ordinaria è descritta da un'equazione di diffusione, nell'He II obbedisce a un'equazione delle onde con una velocità di propagazione di circa 20 m/s (*second sound*).

Effetto termomeccanico. Due contenitori A e B di He II, mantenuti a temperatura diversa fissata (T in A , $T + \Delta T$ in B) sono collegati da un sottile capillare. Si osserva un flusso di He II senza dissipazione da A a B e si crea un gradiente di pressione. All'equilibrio

$$\Delta P = s\Delta T,$$

dove s è l'entropia per unità di volume. Si può spiegare il fenomeno supponendo che l'elio *non trasporti entropia* nel passaggio lungo il capillare. Una manifestazione di questo fenomeno è l'*effetto fontana*: riscaldando con una sorgente il contenitore B si

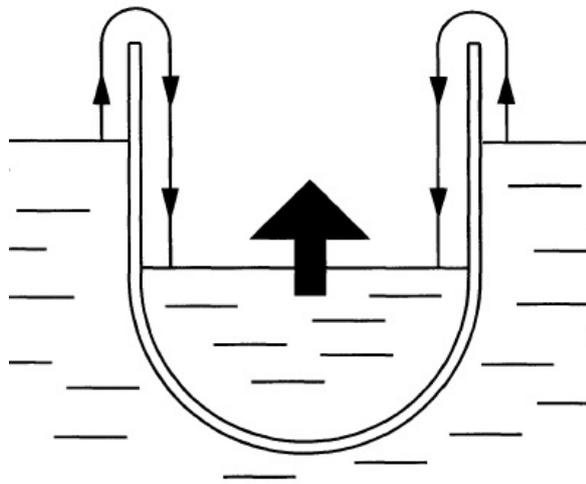


Figura 2.3: Un contenitore di He II immerso in He II. Si forma un film sottile che trasporta il liquido senza attrito.

può ottenere un getto grazie alla differenza di pressione prodotta.

Persistenza di supercorrenti. Si consideri un contenitore a geometria toroidale, stazionario a $t = 0$, nel quale l'elio liquido ruota a una velocità angolare $\omega \gg \omega_c$ (ω_c è una certa velocità critica). Partendo da una temperatura $T > T_\lambda$ si mette in rotazione il contenitore a velocità ω , si attende che il sistema raggiunga l'equilibrio e quindi si raffredda a $T < T_c$, infine si riporta in quiete il contenitore. Si osserva che il superfluido continua a circolare *indefinitamente* nell'anello¹. Questo comportamento è perfettamente analogo alle supercorrenti osservate in anelli superconduttori, utilizzate ad esempio per le trappole magnetiche.

2.3 Modello a due fluidi

2.3.1 Motivazione

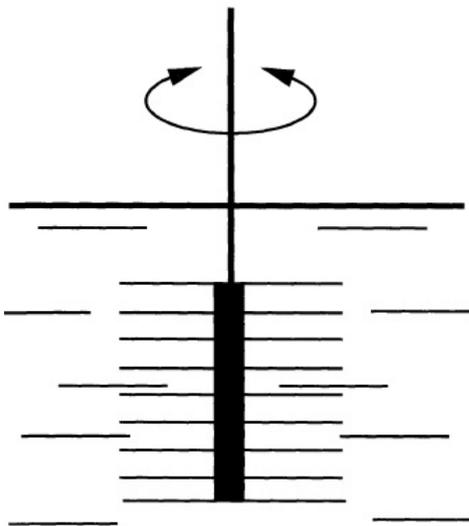


Figura 2.4: Esperimento di Andronikashvili [6] per la misura della viscosità del ^4He . Dei dischi sono posti a distanza fissa, immersi nel liquido e ruotati.

Misurando la viscosità tramite dischi oscillanti nel fluido (Fig. 2.4) si osserva un valore comparabile con quello dell'He I o superiore. La spiegazione teorica di questo apparente paradosso è stata proposta da L. Tisza [61] e L.D. Landau [40, 41], considerando l'elio come una *miscela* di due componenti: una superfluida con densità ρ_s e velocità \mathbf{v}_s , e il fluido 'normale' con densità ρ_n e velocità \mathbf{v}_n . La frazione normale si comporta in modo viscoso, mentre quella superfluida si comporta come un liquido privo di viscosità; in più, se \mathbf{v}_s è inferiore ad una certa velocità critica, le due componenti *non hanno scambi di impulso*, scorrono l'una attraverso l'altra senza attrito. La frazione normale ρ_n sarebbe dunque responsabile per la viscosità complessiva. L'ipotesi viene largamente confermata sperimentalmente da E.L. Andronikashvili [6], il quale trova empiricamente una dipendenza dalla temperatura di $\rho_n \sim T^4$ (già prevista da Landau). La presenza di due campi di velocità dà al liquido

un grado di libertà addizionale, che supporta quindi due oscillazioni indipendenti: una di pressione (suono ordinario, *first sound*) e una di temperatura (*second sound* legato alla conduzione del calore) osservata da V.P. Peshkov [56]. Una trattazione dettagliata del modello a due fluidi è svolta in [44].

¹Analogamente al caso superconduttivo, è stato posto un limite inferiore alla persistenza di queste correnti in $\approx 10^{15}$ anni.

2.3.2 Vortici

La teoria di Landau prevede una componente di liquido superfluida *irrotazionale*,

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = 0. \quad (2.1)$$

L'elio liquido posto in un cilindro rotante attorno al suo asse z con velocità angolare ω dovrebbe assumere, in accordo con l'idrodinamica classica, una forma di paraboloide

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \frac{\rho_n}{\rho},$$

in quanto la frazione superfluida non partecipa alla rotazione². Gli esperimenti di Osborne [54] forniscono però $\rho_n = \rho$ anche a temperature inferiori a 1.5 K. La soluzione viene proposta da Onsager (1949) e sviluppata da Feynman (1955, [23]) introducendo le *linee di vortice*: la condizione di equilibrio termodinamico del sistema in rotazione è diversa da quella del sistema in quiete, in quanto deve essere minima l'energia libera effettiva

$$E_{\text{rot}} = E - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

con \mathbf{L} momento angolare. Per $\boldsymbol{\omega}$ sufficientemente grandi la componente superfluida trova vantaggio in $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} \neq 0$ e quindi si mette in rotazione. La contraddizione fra questa affermazione e l'irrotazionalità di \mathbf{v}_s può essere eliminata supponendo che la (2.1) sia violata solo su linee singolari del fluido. Ogni linea di vortice è caratterizzata da una circuitazione diversa da zero che si denota con

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\kappa$$

ed è indipendente dal cammino di integrazione. Nel caso più semplice, le linee di corrente sono circonferenze su piani perpendicolari alla linea di vortice. La circuitazione vale quindi $2\pi r v_s$, e la velocità superfluida assume la forma

$$\mathbf{v}_s = \frac{\kappa}{r} \hat{\theta},$$

dove r è la distanza dalla linea e $\hat{\theta}$ individua il versore angolare. Si nota qui la differenza con la velocità di rotazione 'tutt'uno' del liquido normale, proporzionale invece a r . La costante $\kappa = \frac{\hbar}{m}$ rappresenta il quanto di circuitazione delle linee di vortice (verrà anche giustificata più sotto). Feynman predisse anche l'energia per unità di lunghezza del vortice,

$$E_v \approx \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \log \frac{R}{\xi},$$

dove R è un cutoff superiore (ad esempio il raggio del contenitore) e ξ è il core del vortice. Gli esperimenti [58] indicano $\xi \approx 1 \text{ \AA}$, $E_v \approx 10^5 \text{ eV/cm}$.

Il momento angolare (per unità di lunghezza) del liquido rotante vale

$$L = \int \rho_s v_s r d^2r = \rho_s \kappa \int d^2r = \pi R^2 \frac{\hbar}{m} \rho_s.$$

²La frazione ρ_s non può ruotare come un tutt'uno: se il cilindro ruota a velocità angolare ω , allora all'equilibrio si avrebbe $\mathbf{v}_s = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$; ma in tal caso $\nabla \times \mathbf{v}_s = 2\boldsymbol{\omega} \neq 0$ e verrebbe meno l'ipotesi di irrotazionalità.

La comparsa di una linea di vortice è quindi vantaggiosa se $\Delta E_{\text{rot}} < 0$, cioè sopra la velocità angolare critica

$$\omega_c = \frac{\hbar}{mR^2} \log \frac{R}{\xi}.$$

Il sistema superfluido in rotazione esibisce quindi sulla superficie libera un *reticolo di vortici* (analogo al reticolo di Abrikosov nei superconduttori di tipo II), con una densità di

$$n = \frac{m\omega}{\pi\hbar} \text{ vortici/m}^2.$$

La presenza dei vortici è giustificata anche nell'approssimazione microscopica di Bogoliubov (vedi Sez. 2.4), dove il *parametro d'ordine* $|\psi(\mathbf{x})|^2$ rappresenta la densità di condensato n_0 . Si può infatti scrivere la densità di corrente di probabilità della funzione d'onda condensata

$$\mathbf{j}_0 = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \frac{\hbar}{m} \underbrace{|\psi(\mathbf{x})|^2}_{n_0(\mathbf{x})} \nabla \phi(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

dove $\phi(\mathbf{x})$ è la fase della funzione d'onda. La (2.2) rappresenta il flusso macroscopico di particelle condensate, quindi si può anche scrivere

$$\mathbf{j}_0 = n_0 \mathbf{v}_0,$$

da cui segue la velocità del condensato:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{x}).$$

Essendo tale velocità proporzionale a un gradiente, essa risulta irrotazionale. L'integrale di linea del gradiente della fase deve fornire un multiplo di 2π ,

$$\oint \mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} 2\pi n = \int (\nabla \times \mathbf{v}_0) \cdot d\mathbf{a} = 0. \quad (2.3)$$

La (2.3) è consistente solo se $n = 0$, mentre per $n \neq 0$ bisogna ammettere che il rotore di \mathbf{v}_0 sia non nullo in punti isolati, le linee di vortice.

2.3.3 Secondo suono

Il *secondo suono* descrive la propagazione del calore nell'He II. Come anticipato, la propagazione del calore obbedisce a un'equazione formalmente identica a quella seguita dal suono ordinario. Si può ricavare la velocità di propagazione sfruttando l'effetto termomeccanico (Sez. 2.2): l'He II scorre dal contenitore con il potenziale chimico maggiore, poiché, supponendo ΔP , ΔT piccole, si ha

$$\mu(B) = \mu(P + \Delta P, T + \Delta T) \simeq \mu(A) - s\Delta T < \mu(A),$$

e l'aumento di temperatura in B diminuisce la concentrazione di superfluido, che scorre quindi da A a B per ristabilire l'equilibrio. Da qui, si può ricavare un'equazione del moto per la \mathbf{v}_s del tipo

$$\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = -k\nabla\mu = -\frac{k}{\rho}(\nabla P - s\nabla T).$$

Sfruttando poi l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

e l'espressione che lega il calore specifico a volume costante a temperatura ed entropia

$$C_V = T \frac{\partial s}{\partial T}$$

si giunge [49] all'equazione per T :

$$\nabla^2 T = \frac{1}{c_{\text{II}}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

c_{II} è la velocità del secondo suono,

$$c_{\text{II}}^2 = \frac{TS^2}{C_V} \frac{\rho_s}{\rho_n}. \quad (2.5)$$

La (2.5) è dovuta a Tisza [61] e può essere anche utile per verificare l'andamento della densità superfluida con la temperatura: i dati sperimentali di Peshkov per ρ_s [56] sono in accordo con quelli ottenuti da Andronikashvili [6] col metodo dei dischi oscillanti. Al di sotto di 1 K si ha una notevole deviazione dalla (2.5), che può essere spiegata dalla teoria di Landau sotto descritta.

2.3.4 Eccitazioni elementari: fononi e rotoni

Lo studio dello spettro delle eccitazioni elementari nell'elio (e nei fluidi quantistici, in maniera più generale) è dovuto a Landau. Le eccitazioni per piccolo \mathbf{k} corrispondono alle onde sonore idrodinamiche, quindi ai *fononi*. La relazione di dispersione è di tipo lineare,

$$\epsilon_k = \hbar c_1 k,$$

dove $c_1 \approx 238$ m/s è la velocità del suono (*first sound*). Quando la lunghezza d'onda fononica diventa comparabile con le distanze interatomiche (che ricordiamo essere ≈ 2 Å) la legge di dispersione devia, in quanto non sono più trascurabili le interazioni fra le molecole. La curva teorizzata da Landau [41] ha un minimo locale in k_0 , attorno a cui la dipendenza è

$$\epsilon_k = \Delta + \frac{\hbar^2 (k - k_0)^2}{2m^*}. \quad (2.6)$$

Le eccitazioni con spettro (2.6) sono dette *rotoni*. In Fig. 2.5 sono riprodotti i dati sperimentali dalla diffrazione di neutroni che confermano la teoria di Landau.³ [30].

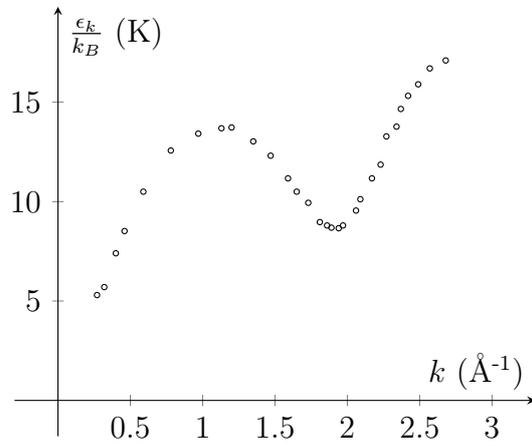


Figura 2.5: Curva di dispersione sperimentale del ${}^4\text{He}$, ottenuta a $T = 1.12$ K con neutroni di $\lambda = 4.04$ Å [30].

³I parametri rotonici sono $\Delta/k_B \approx 8.7$ K, $k_0 \approx 1.91$ Å⁻¹, $m^* \approx 0.16m$, dove m è la massa del ${}^4\text{He}$

Questo modello di quasiparticelle di Landau consente di ottenere risultati importanti da un'analisi termodinamica dei gas di fononi e rotoni, permettendo una giustificazione del modello a due fluidi e una previsione sulla densità di fluido 'normale'. Considerando il gas di quasiparticelle (bosoni) in movimento con una velocità \mathbf{v} rispetto al sistema in quiete del superfluido, la distribuzione di equilibrio è quella di Bose-Einstein, indicata con $f(\epsilon_k)$, con uno shift dell'argomento

$$\epsilon_k \rightarrow \epsilon_k - \hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}.$$

Il momento totale delle quasiparticelle vale

$$\mathbf{P} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \hbar \mathbf{k} f(\epsilon_k - \hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) = \underbrace{\rho_n V}_m \mathbf{v}.$$

Si può calcolare la ρ_n sviluppando $f(\epsilon_k - \hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ per piccoli k . Calcolando per la parte fononica e rotonica si ottiene [41]

$$\rho_n^{ph} = \frac{2\pi^2 \hbar}{45c} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^4, \quad \rho_n^{rot} = \frac{\hbar^2 k_0^2 N_r}{3k_B T V},$$

dove N_r è il numero di rotoni, ricavabile da considerazioni termodinamiche. Questi risultati vengono confermati solo in seguito da esperimenti tipo Andronikashvili e costituiscono quindi una conferma del modello a due fluidi e del modello fononi-rotoni.

2.4 Descrizione di Bogoliubov

Vengono qui accennati i risultati dell'approssimazione di Bogoliubov applicata a un gas di bosoni debolmente interagenti [14], dove è più evidente la relazione fra frazione *condensata* e frazione *superfluida*. L'introduzione di un *parametro d'ordine* $\Psi(\mathbf{x})$ è di grande utilità per uno studio della transizione di fase, sebbene quest'approssimazione presenti un comportamento complicato nei pressi di tale punto. Il limite di basse temperature è però ben rappresentato e fornisce inoltre i risultati del modello a quasiparticelle di Landau, in particolar modo lo spettro di eccitazioni fononiche del fluido quantistico.

Sia $|gs\rangle$ il ground state di N bosoni interagenti

$$|gs\rangle = |N, 0, \dots, 0, \dots\rangle.$$

Si considerano gli operatori di creazione e distruzione dello stato con $k = 0$,

$$\hat{b}_0 |gs\rangle = \sqrt{N} |N-1, \dots\rangle,$$

$$\hat{b}_0^\dagger |gs\rangle = \sqrt{N+1} |N+1, \dots\rangle$$

e si affiancano ad essi gli operatori

$$\hat{\xi}_0 = \frac{\hat{b}_0}{\sqrt{V}}, \quad \hat{\xi}_0^\dagger = \frac{\hat{b}_0^\dagger}{\sqrt{V}}.$$

È evidente che, nel limite termodinamico, gli operatori $\hat{\xi}_0$ e $\hat{\xi}_0^\dagger$ commutano, e producono la densità agendo sul ground state. Bogoliubov tratta questi due operatori come c-termini. Sviluppando \hat{b}_k e isolando il termine $k = 0$ si ottiene l'operatore di campo

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \xi_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{V}} \hat{b}_k,$$

per il quale vale

$$\langle \hat{\psi}(\mathbf{x}) \rangle = \xi_0. \quad (2.7)$$

ξ_0 rappresenta il *parametro d'ordine* della fase condensata (superfluida), in quanto il suo valore di aspettazione è diverso da zero soltanto se ξ_0 è non nullo nel limite termodinamico, cioè se esiste un'occupazione $O(N)$ del ground state.

L'hamiltoniana generale gran canonica di partenza è data da

$$\hat{K} = \int d^3x \hat{\psi}_x^\dagger (\hat{h}_x - \mu) \hat{\psi}_x + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \hat{\psi}_x^\dagger \hat{\psi}_y^\dagger v_{xy} \hat{\psi}_y \hat{\psi}_x, \quad (2.8)$$

dove \hat{h}_x è l'operatore energia cinetica e v_{xy} è l'elemento di matrice dell'interazione fra i bosoni. L'operatore di campo $\hat{\psi}_x$ è dato da

$$\hat{\psi}_x = \Psi_x + \hat{\phi}_x.$$

$\hat{\phi}_x$ è un operatore a *media nulla* sul ground state, e Ψ_x è un c-numero che rappresenta

$$\Psi(\mathbf{x}) = \langle \hat{\psi}(\mathbf{x}) \rangle,$$

ed è dunque il parametro d'ordine, detto anche *funzione d'onda condensata*. A questo punto, se l'interazione è debole, si può pensare che quasi tutte le particelle siano nel condensato, e si può considerare $\hat{\phi}$ una piccola correzione, permettendo di sviluppare \hat{K} rispetto a $\hat{\phi}$ e $\hat{\phi}^\dagger$. Si giunge in questo modo ad una relazione per Ψ nota come *equazione di Gross-Pitaevskii* [25]:

$$(h_x - \mu)\Psi_x + g\Psi_x |\Psi_x|^2 = 0, \quad (2.9)$$

avendo posto un potenziale $v_{xy} = g\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. $|\Psi_x|^2 = n_0$ è proprio la densità del condensato. L'equazione (2.9) è formalmente identica all'equazione di Ginzburg-Landau per i superconduttori.

La risoluzione della (2.9) supponendo invarianza per traslazioni (Ψ_x uniforme) porta, attraverso lo studio dell'equazione del moto della funzione di Green, a una relazione di dispersione

$$E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + 2\epsilon_k n_0 \tilde{v}(\mathbf{k})},$$

che nel limite di piccolo k riproduce esattamente lo spettro fononico di Landau:

$$E_k \xrightarrow{k \rightarrow 0} \hbar c |\mathbf{k}|, \quad c = \sqrt{\frac{n_0 \tilde{v}(0)}{m}}.$$

L'altro risultato fondamentale è l'andamento della densità del condensato in funzione della temperatura (sempre nell'ipotesi di piccoli k e T). Chiamando $n'(T)$ la densità del non-condensato a temperatura T si ottiene

$$n'(T) - n'(0) \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{m}{12\hbar^3 c} (k_B T)^2.$$

Ma poiché $n = n_0(T) + n'(T) = n_0(0) + n'(0)$ (la densità complessiva si suppone costante) si ha l'andamento

$$1 - \frac{n_0(T)}{n_0(0)} \sim T^2.$$

Ricordando gli esperimenti di Andronikashvili e le predizioni della teoria di Landau (cfr. Sez 2.3.1 e 2.3.4) si conclude che la frazione superfluida e la frazione condensata non sono la stessa cosa: la legge di potenza per piccola T è diversa, e i loro valori per $T = 0$ non coincidono assolutamente, in quanto allo zero assoluto l'intero sistema è supposto superfluido ($\rho_s = \rho$), ma le particelle sono ben lungi dall'essere tutte nel condensato, a causa dell'interazione fra i bosoni.

Capitolo 3

Studio della transizione λ

In questo capitolo verrà analizzato il comportamento delle proprietà fisiche più importanti nell'intorno di T_λ , raccogliendo e confrontando gli esperimenti e i risultati teorici raggiunti negli ultimi decenni. L'interesse riposto sul comportamento nel punto critico, piuttosto che su una teoria (non ancora esistente) che fitti l'intero range dei dati sperimentali, si spiega con l'osservazione che in questa regione si ha un andamento indipendente dal sistema fisico studiato, argomento alla base dell'*universalità*.

In ogni transizione di fase si ritrovano elementi comuni come il *parametro d'ordine* e gli *esponenti di punto critico*. L'interesse sta dunque nel trovare (nel caso della superfluidità, ma anche in sistemi diversi come antiferromagneti) l'esponente che lega il parametro d'ordine alla temperatura nei pressi di T_λ ; in questo modo è possibile prevedere l'andamento di diverse proprietà fisiche in funzione della temperatura, tramite opportune relazioni termodinamiche o dinamiche.

Dovendo studiare le vicinanze del punto critico, sarà comodo introdurre le variabili

$$t = T - T_\lambda \geq 0, \quad \epsilon = \frac{T}{T_\lambda} - 1 \geq 0.$$

Le variabili a sinistra della transizione avranno quindi argomento $-t$ o $-\epsilon$, quelle a destra t, ϵ . Gli esponenti critici dell'He II saranno primati (es. α', ν').

3.1 Densità superfluida

Come già riportato, la densità di condensato n_0 e la densità di superfluido ρ_s non sono la stessa cosa, sebbene sia riconosciuta la presenza di una *BEC generalizzata* nell'He II (Leggett, [44]).

L'andamento di ρ_s alla transizione può essere ricavato dai modelli di Hartree-Fock e Bogoliubov [48] trovando una legge del tipo

$$\rho_s(T) \simeq (-t)^{\frac{1}{2}}.$$

Il confronto con gli esperimenti di tipo Andronikashvili mostra però un disaccordo vicino a T_λ .

Il risultato di Clow e Reppy [15] è ottenuto misurando il momento angolare della corrente persistente di elio formata facendo ruotare un anello e raffreddando sotto T_λ . Si osserva un andamento del tipo

$$\frac{\rho_s}{\rho} \simeq (-t)^{2\beta}, \quad 2\beta \approx 0.67 \pm 0.03.$$

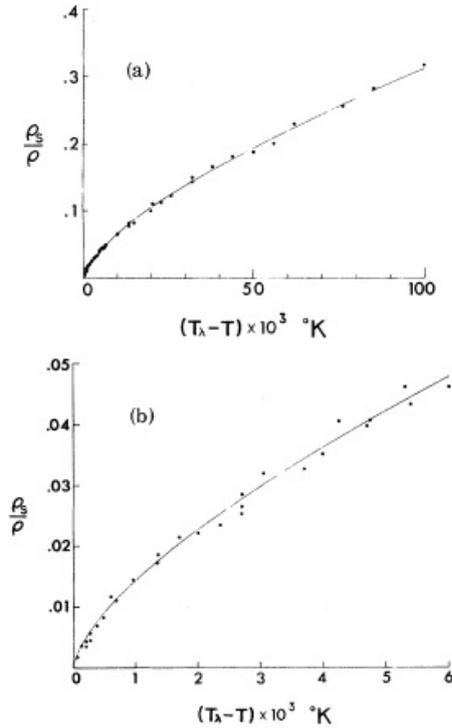


Figura 3.1: (a) Valori di ρ_s/ρ fino a 0.1 K sotto T_λ e (b) particolare dei primi $6 \cdot 10^{-3}$ K. La curva continua è la funzione $\rho_s/\rho = 1.438(T_\lambda - T)^{2/3}$. Fonte: [15].

Nonostante il metodo di misurazione completamente diverso, le misure sono in accordo entro il 2% con quelle tipo Andronikashvili ottenute da Dash e Taylor [18]. Ipotizzando per α il valore esatto di $\frac{2}{3}$, è possibile anche introdurre il parametro d'ordine $\Psi = \sqrt{\rho_s}$ (cfr. Sez. 2.4), che andrebbe quindi a zero a T_λ secondo

$$\Psi \simeq (-t)^\beta, \quad \beta \approx 0.335 \pm 0.015,$$

molto vicino a $\frac{1}{3}$. Questa legge di potenza per il parametro d'ordine è particolarmente rilevante, poiché una simile dipendenza si osserva in altri sistemi con una singolarità λ nel calore specifico: la magnetizzazione nel MnF_2 (antiferromagnetico) è proporzionale a $(-t)^\beta$, dove $\beta \approx 0.335 \pm 0.010$ [29]; la differenza di densità liquido-gas dello xeno nella regione di coesistenza di fase ha una legge di potenza $\beta \approx 0.345 \pm 0.015$ [64]; il calcolo dell'espansione in serie per il *lattice gas* tridimensionale mostra $\beta = \frac{5}{16} = 0.3125$ [20].

Elio liquido in rotazione

Il problema della variazione di densità (complessiva) nell'He II *in rotazione* viene interpretato da Feynman per mezzo delle linee di vortice [23]: la densità di He II in rotazione (a temperatura costante) aumenta [7], e una breve spiegazione è fornita da Di Castro e Tabet [19]. È rilevante riportare come il sistema rotante mostri una *discontinuità* nella densità di He II in T_λ . Nell'esperimento [8] l'elio viene messo in rotazione con velocità angolare $\omega_0 \approx 30$ Hz e ne viene misurata la densità tramite un picnometro nell'intervallo di temperature fra 2.14 e 2.18 K (Fig. 3.2), osservando un salto dello 0.023% in corrispondenza di T_λ : la transizione di fase nel sistema rotante sembrerebbe quindi del *primo ordine* e non del secondo come nel sistema a riposo, ma l'evidenza di questo comportamento non è ancora del tutto confermata.

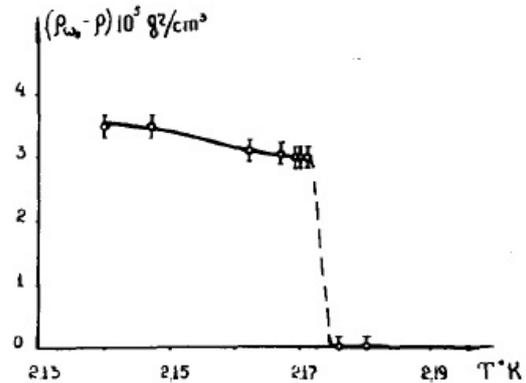


Figura 3.2: Salto della densità dell'elio in rotazione. ρ_{ω_0} è la densità del liquido in rotazione ($\omega_0 \approx 30$ Hz), ρ è la densità a riposo. L'immagine è presa da [8].

3.2 Viscosità

La viscosità del ^4He è stata oggetto di numerose investigazioni. Dai lavori [18, 63] è confermato che η in funzione di T è *continua* in T_λ . La viscosità cresce con la temperatura da entrambi i lati della transizione e $d\eta/dT$ assume valori simili per $T \rightarrow T_\lambda^+$ e per $T \rightarrow T_\lambda^-$. Dall'analisi dei dati sperimentali emerge che $\eta(T)$ presenta un *punto angoloso* in T_λ [4]: supponendo $\eta(T)$ derivabile in T_λ si può scrivere lo sviluppo attorno a $t = 0$

$$\eta \simeq \eta_\lambda + \left. \frac{\partial \eta}{\partial T} \right|_{T_\lambda} t. \quad (3.1)$$

Si esamina la possibile singolarità confrontando con i dati sperimentali la funzione

$$1 - \frac{\eta}{\eta_\lambda} = \alpha \epsilon^{-x}, \quad (3.2)$$

ottenuta modificando (3.1) con

$$\alpha = \left. \frac{\partial \eta}{\partial T} \right|_{T_\lambda} \frac{T_\lambda}{\eta_\lambda}.$$

La (3.2) consente di raccordare su un'unica curva le misure di η_λ , fra loro poco compatibili. L'intorno di T_λ risulta ben descritto da

$$1 - \frac{\eta}{\eta_\lambda} = \begin{cases} 5.19|\epsilon|^{0.85} & \text{per } T < T_\lambda, \\ -1.82|\epsilon|^{0.75} & \text{per } T > T_\lambda. \end{cases} \quad (3.3)$$

I valori di α e l'esponente $x \neq -1$ (entro gli errori sperimentali) sui due lati della transizione rendono errato lo sviluppo (3.1) e rafforzano l'ipotesi di una discontinuità della derivata. L'andamento della viscosità alla transizione è riportato in Fig. 3.3. Si può assumere per η_λ un valore di 24.7 μpoise entro l'1%.

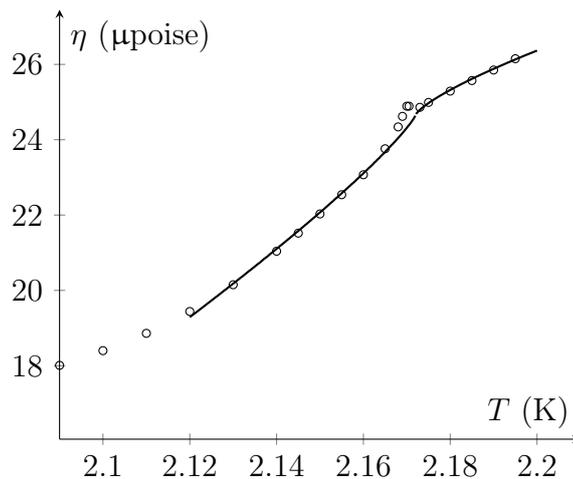


Figura 3.3: Viscosità dell'elio in prossimità di T_λ . I dati sperimentali sono tratti da [63], la curva continua è la (3.3).

3.3 Calore specifico

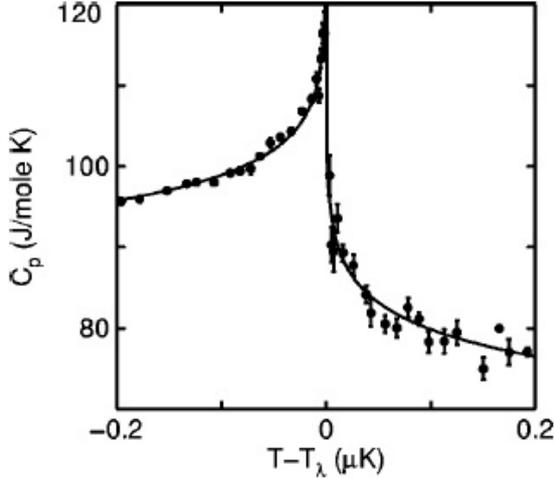


Figura 3.4: Calore specifico a pressione costante molto vicino alla transizione, come misurato da Lipa, et al. [46]. La curva continua è il *best fit*.

Il calore specifico presenta una debole divergenza in corrispondenza del λ -point. Lo studio di questa quantità ha sostanzialmente coinciso con la scoperta della transizione; inizialmente era diffusa la convinzione che si trattasse di una divergenza logaritmica (corrispondente ad un esponente critico $\alpha = \alpha' = 0$). La previsione dalle tecniche RG (*renormalization group*) dà invece un valore di poco inferiore a zero, ma la difficoltà di esplorare sperimentalmente la zona asintotica con grande precisione ha impedito la verifica di questa ipotesi. Solo recentemente si è intuito l'effetto della gravitazione sui fenomeni critici, e si è dato impulso all'esecuzione di esperimenti nello spazio in condizioni di microgravità [12]: in questo modo è stato possibile 'restringere' la zona della transizione di fase fino a $|\epsilon| \approx 10^{-12}$ in condizioni ideali. In quest'ottica il risultato fondamentale è quello fornito da Lipa, et al. [46]: l'esperimento risale all'ottobre 1992, eseguito con un calorimetro sferico di rame lanciato nell'orbita terrestre, ma l'ultima analisi dei risultati è del 2003; la regione analizzata va da 22 mK sotto a 4 μ K sopra T_λ , con una risoluzione del nK. Lipa e i suoi colleghi misurano un esponente critico

$$\alpha = \alpha' = -0.0127 \pm 0.0003,$$

e viene anche trovato il rapporto tra i coefficienti dell'andamento asintotico

$$\frac{A^+}{A^-} = 1.053 \pm 0.002.$$

Entrambi questi risultati confermano i risultati RG; una combinazione degli esponenti critici di calore specifico e densità superfluida confermano anche lo scaling di Josephson [32] e costituiscono quindi i test più precisi delle previsioni teoriche oggi disponibili. In Fig. 3.4 si osserva la curva relativa al calore specifico a pressione costante misurata.

3.4 Espansione termica

Un'altra proprietà divergente in T_λ è il coefficiente di espansione termica α_P ,

$$\alpha_P = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial S}{\partial P} \right|_T. \quad (3.4)$$

Sulla base di [9] e [28] la divergenza è di tipo logaritmico, e $\alpha_P \rightarrow -\infty$ alla transizione (Fig. 3.5). È però doveroso notare che la risoluzione di questi esperimenti non si spinge oltre 1 mK sotto la transizione.

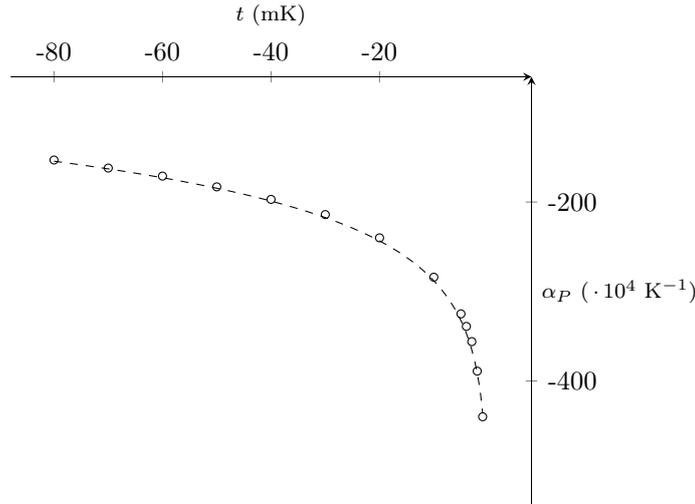


Figura 3.5: Espansione termica dell'He II; la curva tratteggiata è l'equazione $\alpha_P = 8 + 148 \log_{10}(-t)$. I dati sono tratti da [9].

3.5 Conducibilità termica

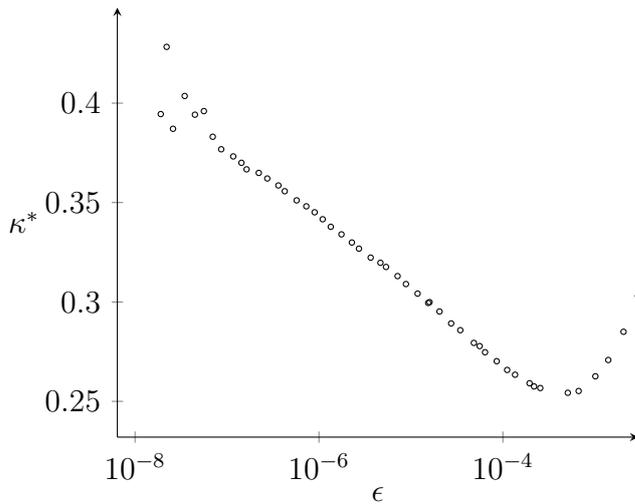


Figura 3.6: Conducibilità termica dell'He I in prossimità di T_λ . In ordinata è riportato un valore effettivo di κ basato sulla teoria DRG (*Dynamic Renormalization Group*). I dati sono tratti da [47].

La conducibilità termica dell'He I presenta una divergenza in T_λ . Misure ad alta risoluzione per $10^{-7} \text{ K} \leq t \leq 10^{-3} \text{ K}$ sono state eseguite da Ahlers [1], più recentemente da Lipa e Li [47] e confermano questo comportamento con un esponente critico di 0.334 ± 0.005 , laddove la predizione è $\frac{1}{3}$.

La previsione dallo *scaling* dinamico viene fatta per la prima volta da Ferrell, et al. [21] i quali affermano che la costante di diffusione D diverge in T_λ secondo

$$D = \frac{\kappa}{\rho C_P} \sim \xi^{\frac{1}{2}} \sim \rho_s^{-\frac{1}{2}},$$

dove C_P è il calore specifico a pressione costante e ξ è la lunghezza di correlazione per le fluttuazioni del parametro d'ordine. Combinando con l'andamento di ρ_s si ottiene l'esponente critico.

Un'altra previsione [26] segue dalla relazione tra le quantità critiche per ϵ e $-\epsilon$

$$\frac{\kappa}{\rho C_P} \xi^{-2}(\epsilon) = A c_{II} \xi^{-1}(-\epsilon).$$

L'espressione coinvolge la velocità del secondo suono c_{II} e viene quindi utilizzata a posteriori per la giustificazione dei risultati di quest'ultima (Sez. 3.7).

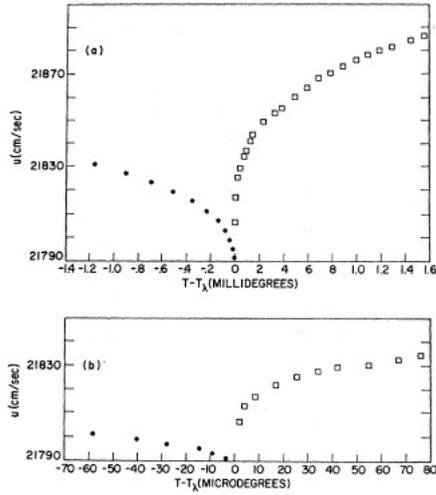


Figura 3.7: Dettaglio della velocità del suono vicino alla transizione. Si noti che il minimo occorre a circa 6 μK sotto T_λ . Fonte: [11].

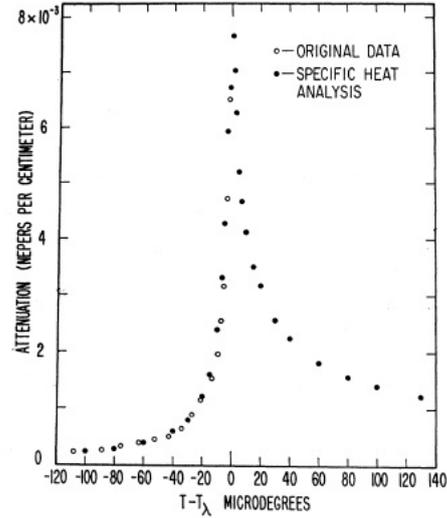


Figura 3.8: Attenuazione sonora attorno a T_λ . Fonte: [11].

3.6 Velocità e attenuazione del suono

La velocità del suono e la sua attenuazione sono state misurate con una risoluzione di alcuni μK attorno a T_λ da Barmatz e Rudnick [11], alla frequenza di 22 kHz. La velocità mostra un *minimo* nei pressi di T_λ con il valore di ≈ 217.3 m/s; l'andamento sembra mostrare una cuspide, con legge di potenza $(-t)^{0.9}$: questo comportamento nell'He II non è previsto dalle relazioni termodinamiche di Pippard-Buckingham-Fairbank [57, 17] (Fig. 3.7). Esse governano le tre quantità divergenti C_P (calore specifico a pressione costante), α_P (coefficiente di espansione isobarica), K_T (compressibilità isoterma) vicino a T_λ :

$$C_P = AV_\lambda T_\lambda \alpha_P + C_0, \quad C_0 = T_\lambda \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_\lambda,$$

$$\alpha_P = AK_T + \alpha_0, \quad \alpha_0 = \frac{1}{V_\lambda} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_\lambda,$$

dove $A = dP/dT|_\lambda$ è la pendenza della linea di transizione. Analogamente, l'attenuazione sonora ha un *massimo* vicino a T_λ . Da queste relazioni è possibile ricavare anche un'espressione della velocità del suono. In questo caso però l'accordo è buono nella fase superfluida con la teoria di Landau-Khalatnikov [42] dove l'andamento è proporzionale a $(-t)^{-1}$, mentre non è compreso ad oggi il comportamento sopra T_λ , proporzionale a $t^{1/2}$ (Fig. 3.8).

3.7 Secondo suono

Si ricorda l'espressione (2.5) per la velocità del secondo suono

$$c_{\text{II}}^2 = \frac{TS^2}{C_V} \frac{\rho_s}{\rho_n}.$$

dove S è l'entropia e C_V il calore specifico a volume costante. Nei pressi della transizione, l'espressione di c_{II} è invece ottenuta sostituendo C_V nella (2.5) con il calore specifico a pressione costante C_P , poiché le equazioni del moto del primo e secondo suono risultano accoppiate con un termine dipendente dal coefficiente di espansione termica, che diverge in T_λ . Usando gli andamenti di ρ_s e C_P si dovrebbe avere una forma asintotica [55]

$$c_{\text{II}}^2 = B \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\log \frac{1}{t}},$$

ma il valore di B non fitta i dati sperimentali.

È anche possibile, come si è visto, esprimere c_{II} in funzione della conducibilità termica κ dell'He I (per T poco superiore a T_λ) [1],

$$c_{\text{II}}(-\epsilon) = \frac{\kappa(\epsilon)}{\rho C_P(\epsilon)} \frac{\xi'_0}{A \xi_0^2} \epsilon^{\frac{2}{3}}. \quad (3.5)$$

Il termine $\frac{\xi'_0}{A \xi_0^2}$ è indipendente dalla temperatura ed è legato alle lunghezze di correlazione per le fluttuazioni del parametro d'ordine. La (3.5) è in forte accordo coi dati sperimentali, e la sua validità è basata su alcuni noti fatti: l'esistenza di un'unica lunghezza di correlazione [32]

$$\xi(-\epsilon) = \xi'_0 |\epsilon|^{-\nu'} \sim \rho_s^{-1},$$

$$\xi(\epsilon) = \xi_0 |\epsilon|^{-\nu};$$

l'osservazione di Clow e Reppy [15] per cui $\rho_s \sim t^{2/3}$; lo *scaling* $\nu = \nu'$; la verifica sperimentale dello *scaling* di Josephson per cui $\nu' = \frac{1}{3}(2 - \alpha')$, dove $\alpha' = \alpha = 0$ sono gli esponenti critici per il calore specifico (Sez. 3.3), che dà appunto $\nu = \frac{2}{3}$.

La velocità di secondo suono va dunque a zero in T_λ con lo stesso esponente critico della ρ_s . Per $T > T_\lambda$ non è ovviamente possibile parlare di secondo suono, non essendo possibile il trasporto di calore secondo la (2.4). Lontano dalla transizione, c_{II} aumenta fino a un valore di circa 20 m/s a 1.8 K [62] e aumenta nuovamente al di sotto di 1 K.

3.8 Coesistenza di fase

Anche se la transizione λ è del secondo ordine, le due fasi He I e He II possono coesistere in presenza del campo gravitazionale, come osservato da Ahlers [3]. In un campione di liquido di altezza H la pressione sul fondo è più alta di $\Delta P = \rho g H$, e si ha una temperatura di transizione più bassa, poiché come si può vedere dal diagramma di fase (Fig. 2.1) $dP/dT|_\lambda < 0$; dovrebbe essere quindi possibile ottenere una regione di coesistenza fra le due fasi: il gradiente di pressione allarga la 'finestra' di temperatura entro la quale è possibile avere la coesistenza di fase. L'osservazione di Ahlers è importante anche perché la teoria derivante dall'equazione di Ginzburg-Pitaevskii [24] predice l'impossibilità di avere coesistenza He I-He II anche in presenza di campo gravitazionale¹.

La coesistenza di fase è un'altra manifestazione dell'effetto gravitazionale di *broadening* della transizione, così come osservato nel calore specifico.

¹L'equazione GP è comunque scorretta per alcune proprietà dell'He II: predice, ad esempio, una discontinuità finita del calore specifico in T_λ (che è invece logaritmica) e un andamento lineare di ρ_s sotto T_λ (mentre varia come $(T_\lambda - T)^{2/3}$).

3.9 Transizione superfluida in due dimensioni

È stata svolta molta ricerca sulla questione del *long-range order* in due dimensioni: un risultato fondamentale è costituito dal teorema di Mermin e Wagner [51]: *per un'hamiltoniana del modello di Heisenberg*

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

con un'interazione a breve range che obbedisce

$$\bar{J} = \frac{1}{2N} \sum_{\langle i,j \rangle} |J_{ij}| |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 < \infty,$$

non può esserci rottura spontanea di simmetria (magnetizzazione spontanea) a temperatura finita in una o due dimensioni [10]. Il teorema ha grande rilevanza nella fisica 2D; nel caso in esame è interessante anche poiché il modello di Heisenberg permette lo studio tramite il Modello XY (vedi Par. 3.9.2). Un risultato analogo è la predizione di Hohenberg [31] secondo cui il valore di aspettazione del parametro d'ordine superfluido in un liquido di Bose bidimensionale è zero.

Esiste però evidenza sperimentale di una transizione superfluida in film sottili di ^4He , il che ha portato a una ridefinizione del concetto stesso di parametro d'ordine in due dimensioni: Ziman [69] esamina un sistema di Bose 2D di spessore D e lunghezza L ; la temperatura critica diminuisce come $\frac{1}{\log L}$, e dunque si annulla per un sistema indefinito. Dall'altro lato l'analisi di Kosterlitz e Thouless [39] porta alla definizione, per i sistemi bidimensionali, a un long-range order *topologico*.

3.9.1 Teoria di Kosterlitz-Thouless

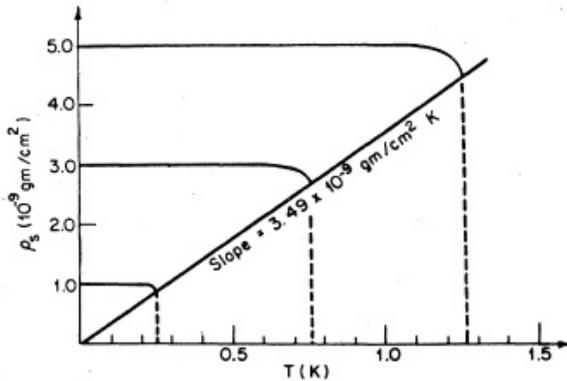


Figura 3.9: Densità superfluida in funzione di T per tre film di diverso spessore prevista dalla teoria di Kosterlitz-Thouless. L'immagine è tratta da [13].

regione.

Il risultato fondamentale di KT è la relazione fra densità superfluida $\rho_s(T_c)$ e temperatura critica T_c :

$$\frac{\rho_s(T_c)}{T_c} = \frac{2m^2}{\pi\hbar^2} k_B T_c. \quad (3.6)$$

Nel modello di Kosterlitz-Thouless (KT) [39] il superfluido 2D è popolato da *coppie vortice-antivortice*. Alle basse temperature non ci sono vortici, poiché la loro energia cresce logaritmicamente con le dimensioni del sistema; una coppia di vortici con vorticità uguale ed opposta dà invece energia finita. L'ordine a lungo raggio topologico non è però distrutto, in quanto la vorticità netta è nulla; non esiste un ordine a lungo raggio nel senso convenzionale, in quanto la fase del parametro d'ordine varia con la posizione, ma poiché si ha un ordine *locale* è possibile avere una coerenza di fase da regione a

Si può notare che la (3.6) sia un valore *universale* indipendente dallo spessore del film. Successivamente viene derivato da KT l'andamento di ρ_s vicino alla transizione,

$$\rho_s(T) = \rho_s(T_c) \left[1 + b \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.7)$$

Esso presenta una cuspidè in T_c dovuta all'interazione fra i vortici, e il parametro b rappresenta l'ampiezza di questa cuspidè, ma si tratta di un valore *non universale* dipendente dallo spessore del sistema. In Fig. 3.9 è rappresentato l'andamento teorico di ρ_s per tre differenti spessori.

La teoria di KT è verificata sperimentalmente. Bishop e Reppy [13] osservano la variazione di densità superfluida in corrispondenza della transizione; il valore del salto in T_c dato dalla (3.6) è in buon accordo con le misure sperimentalì, ma è doveroso notare che l'esponente critico $\eta = \frac{1}{2}$ della (3.7) misurato da Bishop e Reppy vale

$$\eta = 0.25 \pm 0.04.$$

3.9.2 Derivazione di ρ_s dal Modello XY-2D

Il valore di ρ_s può essere derivato alternativamente lavorando nel framework del Modello XY in 2D, un modello statistico noto che può venire utilizzato per lo studio della transizione ferromagnetica. In questo modo è possibile ignorare la dettagliata fenomenologia dell'idrodinamica in 2D ottenendo il risultato universale di KT (Eq. 3.6). Il Modello XY standard parte dall'hamiltoniana

$$\bar{H} = J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \cos [\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}')], \quad (3.8)$$

dove $\mathbf{r} = (x, y)$ identifica un punto di un reticolo bidimensionale di passo a e la somma è sui primi vicini.

Il calcolo di ρ_s è effettuato a partire dall'energia libera $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$, dove la funzione di partizione

$$Z = \prod_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{2\pi} \exp(-\beta \bar{H}). \quad (3.9)$$

è calcolabile dallo sviluppo in serie

$$\exp(\beta J \cos \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\beta J) \exp(in\omega),$$

dove $I_n(\beta J)$ è la funzione di Bessel modificata del primo tipo. Il calcolo è riportato nel lavoro di Ohta e Jasnow [53], e si ottiene dallo sviluppo per $\epsilon = 1 - \frac{T}{T_c} \rightarrow 0$

$$\frac{\rho_s(T)}{k_B T} = \frac{2m^2}{\pi \hbar^2} \left(1 + \frac{\pi c}{2} |\epsilon|^{\frac{1}{2}} \right), \quad |\epsilon| \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Il risultato in (3.10) è coerente con quello di KT (3.7) e viene anche riprodotto l'andamento nei pressi del punto critico, con $b = \frac{\pi c}{2}$.

3.10 Estensione al Modello XY-3D

L'analogia con il Modello XY in 2D può essere estesa anche alle tre dimensioni; si può infatti far ricadere la transizione superfluida nella classe di universalità $O(2)$, dove si considera un *parametro d'ordine* complesso, identificato quindi da due componenti. Nel caso superfluido si tratta della funzione d'onda macroscopica complessa condensata. I difetti topologici (vortici) emergono anche nel caso tridimensionale, ai quali sono associati le proprietà critiche sia statiche che dinamiche.

Il valore degli esponenti critici a partire dal Modello XY è calcolabile tramite sviluppi ad alta temperatura – per $\beta \rightarrow 0$ nella (3.9) – o simulazioni Monte Carlo. Il calcolo numerico più recente disponibile (Marzo 2014) è basato su uno sviluppo detto *pseudo- ϵ expansion* dovuto a B. Nickel [45] ed è effettuato da Sokolov e Nikitina [60]. Essi calcolano al sesto ordine l'esponente critico α del calore specifico, ottenendo

$$\alpha = 0.008,$$

da confrontare con la misura di Lipa [46]. Da α segue l'esponente ν per la lunghezza di correlazione, tramite la relazione di scaling

$$\alpha = 2 - d\nu,$$

dove $d = 3$ è la dimensionalità del sistema. Dagli esponenti ν e α si può risalire a tutti gli altri. Nell'articolo di Sokolov e Nikitina viene anche presentato un confronto tra i calcoli di α dalle tecniche RG, dalle altre teorie di campo e le misure sperimentali (Tabella 3.1).

	SN	RG	ϵ -series	LC	Exp.
α	-0.0080	-0.009(9)	-0.008(7)	-0.015(4)	-0.0127(3)

Tabella 3.1: Valori di α ottenuti da Sokolov-Nikitina (SN), da risommazioni RG, espansioni ϵ , calcoli *lattice* (LC) e misure sperimentali.

Si può vedere che il risultato di SN è coerente con i risultati delle teorie di campo; rimane ancora oggi una sostanziale discrepanza con il dato sperimentale.

3.11 Considerazioni finali

In questo elaborato è stata presentata una breve rassegna delle proprietà della transizione superfluida dell'elio. Questo fenomeno costituisce un cardine della teoria dei fenomeni critici e delle transizioni di fase; allo stesso tempo ha fornito storicamente uno stimolo al campo della materia condensata, in quanto porta lo studio della BEC a un sistema *liquido*, i cui comportamenti microscopici non sono ancora ben compresi. A questo proposito è importante sottolineare la mancanza di un'approssimazione soddisfacente che spieghi i fenomeni asintotici alla transizione.

È riconosciuto che il meccanismo alla base della fase superfluida è analogo alla condensazione di Bose-Einstein; è altrettanto evidente, come già osservato, la differenza fra le quantità ρ_s e n_0 . Leggett descrive il fenomeno con l'espressione *BEC generalizzata*: *ad ogni istante t esiste nel superfluido una base ortonormale in uno spazio di*

Hilbert, tale che uno e un solo stato ha numero di occupazione $O(N)$ mentre tutti gli altri hanno occupazione $O(1)$.

Le principali proprietà fisiche (statiche e dinamiche) al punto critico sono state messe in relazione – ove possibile – con le previsioni provenienti dalla teoria dei campi. Le stesse predizioni sulla base delle tecniche del gruppo di rinormalizzazione (RG) sono però a loro volta in continua revisione: è possibile avere una stima degli esponenti critici e dei rapporti fra le ampiezze ai lati della transizione solo per mezzo di sviluppi perturbativi (divergenti) o metodi Monte Carlo. I risultati più recenti possono essere riassunti nei tre esponenti α , ν e β , rispettivamente per il calore specifico, la lunghezza di correlazione e il parametro d'ordine:

$$\alpha = -0.008, \quad \nu = 0.6693, \quad \beta = 0.3463.$$

Nonostante il tentativo di ridurre gli effetti della gravità sulla transizione, il valore sperimentale di α risulta ancora incompatibile con quello calcolato. Le misure di ν e β rientrano invece nelle attuali incertezze sperimentali.

Appendice A

Statistica di Bose-Einstein

La distribuzione statistica di Bose-Einstein viene derivata nel 1924 da Satyendra Bose e ripresa successivamente da Einstein [16]. Essa riguarda l'occupazione di stati energetici all'equilibrio termodinamico di un gas di bosoni *non interagenti* e viene qui ripresa utilizzando l'ensemble gran canonico [52], [22].

Un sistema di N particelle (bosoni o fermioni) non interagenti è descritto dall'hamiltoniana in seconda quantizzazione

$$\hat{H}^0 - \mu\hat{N} = \sum_k (\epsilon_k - \mu) \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \quad (\text{A.1})$$

dove k indicizza lo stato di particella singola di momento \mathbf{k} e energia $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Essa è diagonale e si ricavano da essa quantità macroscopiche come l'energia media e il numero totale medio di particelle da

$$E = \langle \hat{H}^0 \rangle = \sum_k \epsilon_k \langle \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \rangle = \sum_k \epsilon_k n_k, \quad (\text{A.2})$$

$$N = \langle \hat{N} \rangle = \sum_k n_k. \quad (\text{A.3})$$

L'accesso alle proprietà termodinamiche del sistema è fornito dall'*operatore statistico gran canonico* definito da

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_\Omega} \exp \left[-\beta \left(\hat{H}^0 - \mu\hat{N} \right) \right]. \quad (\text{A.4})$$

Z_Ω è la *funzione di gran partizione*

$$Z_\Omega = \text{Tr} \exp \left[-\beta \left(\hat{H}^0 - \mu\hat{N} \right) \right], \quad (\text{A.5})$$

dove la traccia è intesa sia sugli autovalori di \hat{H}^0 per N fissato che sugli autovalori di \hat{N} . La (A.5) è legata al *potenziale gran canonico* dalla fondamentale relazione

$$\Omega(T, V, \mu) = -k_B T \log Z_\Omega. \quad (\text{A.6})$$

Si ricorda inoltre l'equazione di stato

$$\Omega(T, V, \mu) = -pV. \quad (\text{A.7})$$

Scrivendo esplicitamente la traccia in (A.5) nella base dei numeri di occupazione n_k , è possibile fattorizzare la somma sui valori di aspettazione in un prodotto di tracce, dando

$$Z_\Omega = \prod_k \text{Tr}_k \exp [-\beta (\epsilon_k - \mu) \hat{n}_k].$$

Per i bosoni $n_r = 0, 1, \dots, \infty$, perciò la traccia è una serie geometrica e si ottiene

$$Z_B = \prod_k \frac{1}{1 - \exp [-\beta (\epsilon_k - \mu)]}. \quad (\text{A.8})$$

Di conseguenza, la (A.6) fornisce il potenziale gran canonico del sistema

$$\Omega_B = k_B T \sum_k \log \{1 - \exp [-\beta (\epsilon_k - \mu)]\}. \quad (\text{A.9})$$

Dalla (A.9) si giunge alla distribuzione statistica di Bose tramite la relazione $\langle \hat{N} \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$. Si ha pertanto

$$\langle \hat{N} \rangle = \sum_k \langle \hat{n}_k \rangle = \sum_k \frac{1}{\exp [\beta (\epsilon_k - \mu)] - 1}. \quad (\text{A.10})$$

Bibliografia

- [1] AHLERS, G.: *Thermal Conductivity of He I near the Superfluid Transition*, Phys. Rev. Letters, **21**, 1159 (1968).
- [2] AHLERS, G.: *Second Sound Velocity in He II, Thermal Conductivity in He I, and Scaling Laws near the Superfluid Transition*, Phys. Letters A, **28**, 507 (1968).
- [3] AHLERS, G.: *Effect of the Gravitational Field on the Superfluid Transition in ^4He* , Phys. Rev., **171**, 275 (1968).
- [4] AHLERS, G.: *On the Viscosity of ^4He near the Superfluid Transition*, Phys. Letters A, **37**, 151 (1971).
- [5] ALLEN, J.F., R. PEIERLS, M.Z. UDDIN: *Flow of Liquid Helium II*, Nature, **140**, 62 (1937).
- [6] ANDRONIKASHVILI, E.L., J. Phys. (USSR), **10**, 201 (1946).
- [7] ANDRONIKASHVILI, E.L., J.S. TSAKADZE: *Independence of the Density of Rotating Liquid Helium on the Angular Velocity*, Phys. Letters, **18**, 26 (1965).
- [8] ANDRONIKASHVILI, E.L., J.S. TSAKADZE: *Discontinuity of the Density of rotating Liquid Helium at the Point of the Phase Transition*, Phys. Letters, **20**, 446 (1966).
- [9] ATKINS, K.R., M.H. EDWARDS: *Coefficient of Expansion of Liquid Helium II*, Phys. Rev., **97**, 1429 (1955).
- [10] Auerbach, A.: *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*, Springer (1994), cap. 6.
- [11] BARMATZ, M., I. RUDNICK: *Velocity and Attenuation of First Sound near the λ Point of Helium*, Phys. Rev., **170**, 224 (1968).
- [12] BARMATZ, M., I. HAHN, J.A. LIPA, R.V. DUNCAN: *Critical Phenomena in Microgravity: Past, Present and Future*, Rev. Mod. Phys., **79**, 1 (2007).
- [13] BISHOP, D.J., J.D. REPPY: *Study of the Superfluid Transition in Two-Dimensional ^4He films*, Phys. Rev. B, **22**, 5171 (1980).
- [14] BOGOLIUBOV, N.N.: *On the Theory of Superfluidity*, J. Phys. (USSR), **11**, 23 (1947).

- [15] CLOW, J.R., J.D. REPPY: *Temperature Dependence of the Superfluid Density in He II near T_λ* , Phys. Rev. Letters, **16**, 887 (1966).
- [16] BOSE, S.N.: *Planck's Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Z. Phys., **26**, 178 (1924).
- [17] BUCKINGHAM, M.J., W.M. FAIRBANK: *Progress in Low Temperature Physics*, North Holland Publ. Co. (1961), vol. 3, cap. 3.
- [18] TAYLOR, R.D., J.G. DASH: *Hydrodynamics of Oscillating Disks in Viscous Fluids: Density and Viscosity of Normal Fluid in Pure ^4He from 1.2 K to the λ point*, Phys. Rev., **106**, 398 (1957).
- [19] DI CASTRO, C., E. TABET: *Increase of the Density of Rotating Liquid Helium II near the Lambda Point*, Phys. Letters, **23**, 675 (1966).
- [20] ESSUM, J.W., M.E. FISHER, J. Chem. Phys., **38**, 802 (1963).
- [21] FERRELL R.A., N. MÉNYHARD, H. SCHMIDT, F. SCHWABL, P. SZÉPFALUSY: *Dispersion in Second Sound and Anomalous Heat Conduction at the Lambda Point of Liquid Helium*, Phys. Rev. Letters, **18**, 891 (1967).
- [22] FETTER, A.L., J.D. WALECKA: *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Dover (2003).
- [23] FEYNMAN, R.P.: *Progress in Low Temperature Physics*, North Holland Publ. Co. (1955), vol. I, cap. II.
- [24] GINZBURG V.L., L.P. PITAEVSKII, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz., **34**, 1240 (1958).
- [25] GROSS, E.P.: *Classical Theory of Boson Wave Fields*, Ann. Phys., **4**, 57 (1958).
- [26] HALPERIN, B.I., P.C. HOHENBERG: *Generalization of Scaling Laws to Dynamical Properties of a System Near its Critical Point*, Phys. Rev. Letters, **19**, 700 (1967).
- [27] HALPERIN, B.I., P.C. HOHENBERG, E.D. SIGGIA: *Renormalization-group treatment of the critical dynamics of superfluid helium, the isotropic antiferromagnet, and the easy-plane ferromagnet*, Phys. Rev. B, **13**, 1299 (1976).
- [28] HARRIS-LOWE, R.F., K.A. SMEE: *Thermal Expansion of Liquid Helium II*, Phys. Rev. A, **2**, 158 (1970).
- [29] HELLER, P., G.B. BENEDEK: *Nuclear Magnetic Resonance in MnF_2 Near the Critical Point*, Phys. Rev. Letters, **8**, 428 (1962).
- [30] HENSHAW, D.G., A.D.B. WOODS: *Modes of Atomic Motions in Liquid Helium by Inelastic Scattering of Neutrons*, Phys. Rev., **121**, 1266 (1961).
- [31] HOHENBERG, P.C.: *Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions*, Phys. Rev., **158**, 383 (1967).
- [32] JOSEPHSON, B.D.: *Relation between the Superfluid Density and Order Parameter for Superfluid He near T_c* , Phys. Letters, **21**, 608 (1966).

- [33] KADANOFF, L. P.: *Scaling Laws for Ising Models Near T_c* , Physics, **2**, 263 (1966).
- [34] KAPITZA, P.: *Viscosity of Liquid Helium below the λ -point*, Nature, **141**, 74 (1938).
- [35] KEESOM, W.H., J.N. VAN DER ENDE, Proc. Roy. Ac. Amsterdam, **33**, 24 (1930).
- [36] KEESOM, W.H., A.P. KEESOM: *On the Heat Conductivity of Liquid Helium*, Physica, **3**, 359 (1936).
- [37] KERR, E.C.: *Density of Liquid ^4He* , J. Chem. Phys., **26**, 511 (1957).
- [38] HUANG, K.: *Statistical Mechanics*, 2^a ed. John Wiley & Sons (1987).
- [39] KOSTERLITZ, J.M., D.J. THOULESS: *Ordering, Metastability and Phase Transitions in Two-Dimensional Systems*, J. Phys. C: Solid State Phys., **6**, 1181 (1973).
- [40] LANDAU, L.D.: *The Theory of Superfluidity of Helium II*, J. Phys. (USSR), **5**, 71 (1941).
- [41] LANDAU, L.D.: *On the Theory of Superfluidity of Helium II*, J. Phys. (USSR), **11**, 91 (1947).
- [42] LANDAU, L.D., I.M. KHALATNIKOV, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **96**, 469 (1954).
- [43] LANDAU, L.D., E.M. LIFSHITZ: *Statistical Physics. Course in Theoretical Physics*, vol. 5 (3^a ed.), Pergamon (1980).
- [44] LEGGETT, A.J.: *Quantum Liquids: Bose-Einstein Condensation and Cooper Pairing in Condensed-Matter Systems*, Oxford University Press (2006).
- [45] LE GUILLOU, J.C., J. ZINN-JUSTIN: *Critical Exponents from Field Theory*, Phys. Rev. B, **21**, 3976 (1980).
- [46] LIPA, J.A., J.A. NISSEN, D.A. STRICKER, D.R. SWANSON, T.C.P CHUI: *Specific Heat of Liquid Helium in Zero Gravity very near the Lambda Point*, Phys. Rev. B, **68**, 174518 (2003).
- [47] LIPA J.A., Q. LI: *Thermal Conductivity and Critical Boundary Resistance of Helium near the Lambda Point*, J. Low Temp. Phys., **149**, 1 (2007).
- [48] LUBAN, M., W.D. GROBMAN: *Bose-Einstein Phase Transition in an Interacting System*, Phys. Rev. Letters, **17**, 182 (1966).
- [49] MARTIN, P.A., F. ROTHEN: *Many-body Problems and Quantum Field Theory: an Introduction*, Springer (2002).
- [50] MCLENNAN, J.C., H.D. SMITH, J.O. WILHELM: *The Scattering of Light by Liquid Helium*, Phil. Mag., **14**, 161 (1932).
- [51] MERMIN, N.D., H. WAGNER: *Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models*, Phys. Rev. Letters, **17**, 1133.

- [52] MOLINARI, L.G.: *Notes on quantum ideal gases*, <http://pcteserver.mi.infn.it/~molinari/NOTES/thermodynamics.pdf> (2013).
- [53] OHTA, T., D. JASNOW: *XY model and the Superfluid Density in Two Dimensions*, Phys. Rev. B, **20**, 139, (1979).
- [54] OSBORNE, D.V.: *The Rotation of Liquid Helium II*, Proc. Phys. Soc. A, **63**, 909 (1950).
- [55] PEARCE, C.J., J.A. LIPA, M.J. BUCKINGHAM: *Velocity of Second Sound near the λ point of Helium*, Phys. Rev. Letters, **20**, 1471 (1968).
- [56] PESHKOV, V.P., J. Phys. (USSR), **10**, 389 (1946).
- [57] PIPPARD, A.B., Phil. Mag., **1**, 473 (1956).
- [58] RAYFIELD, G.W., F. REIF: *Quantized Vortex Rings in Superfluid Helium*, Phys. Rev., **136**, A1194 (1964).
- [59] ROBINSON, J.E.: *Note on the Bose-Einstein Integral Functions*, Phys. Rev., **86**, 678 (1951).
- [60] SOKOLOV, A.I., M.A. NIKITINA: *Critical Exponents of Superfluid Helium and Pseudo- ϵ Expansion*, arXiv:1402.4318 [cond-mat.stat-mech] (2014).
- [61] TISZA, L.: *Transport Phenomena in Helium II*, Nature, **141**, 913 (1938).
- [62] WANG R.T., W.T. WAGNER, R.J. DONNELLY: *Precision Second-Sound velocity Measurements in Helium II*, J. Low Temp. Phys., **68**, 409 (1987).
- [63] WEBELER, R.W.H., D.C. HAMMER: *Viscosity \times Normal Density of Liquid Helium in a Temperature Interval about the λ point*, Phys. Letters, **15**, 233 (1965).
- [64] WEINBERGER, M.A., W.G. SCHNEIDER, Can. J. Chem., **30**, 422 (1952).
- [65] WIDOM, B.: *Surface Tension and Molecular Correlations near the Critical Point*, J. Chem. Phys., **43**, 3892 (1965).
- [66] WIDOM, B.: *Equation of State in the Neighborhood of the Critical Point*, J. Chem. Phys., **43**, 3898 (1965).
- [67] WILSON, K. G.: *Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture*, Phys. Rev. B, **4**, 3174 (1971).
- [68] WILSON, K. G.: *Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior*, Phys. Rev. B, **4**, 3184 (1971).
- [69] ZIMAN, J.: *Bose-Einstein Condensation In Helium Films*, Phil. Mag., **44**, 548 (1953).