



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
Facoltà di Scienze e Tecnologie
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Metodi di quantizzazione

La meccanica quantistica nello spazio delle fasi

Relatore: Prof. Luca Guido Molinari

Candidato:
Daniele Bonalda
Matricola n° 812194
A.A. 2014/2015

Codice PACS: 03.65.-w

Indice

Introduzione	4
1 Il problema della quantizzazione	5
1.1 Quantizzazione di monomi	5
2 Quantizzazione di Weyl	7
2.1 Corrispondenza di Weyl	8
2.1.1 La trasformata di Wigner	9
2.1.2 Caso multidimensionale	10
2.1.3 Operatori di Grossmann	10
2.2 Il Prodotto di Moyal	13
2.3 La distribuzione di Wigner	15
2.4 La distribuzione di Wigner per i biliardi quantistici	18
2.5 L'esempio del momento angolare	22
3 La distribuzione di Husimi	24
4 Quantizzazione di Born-Jordan	28
4.1 Quantizzazione di Born-Jordan	28
A Stati coerenti	30
B Operatori di Hilbert-Schmidt	32
Bibliografia	33

Introduzione

In questa tesi ci occuperemo di come sia possibile trattare la meccanica quantistica nello spazio delle fasi. Questo approccio alla meccanica quantistica risulta per esempio utile per studiarne i limiti classici, che in quest'ottica sono più facilmente individuabili. Per sviluppare una teoria quantistica nello spazio delle fasi è necessario un metodo di quantizzazione, cioè una regola per associare funzioni sullo spazio delle fasi ad operatori quantistici.

Nel primo capitolo tratteremo la quantizzazione dei monomi, e per queste semplici funzioni esporremo più metodi di quantizzazione.

Nel secondo capitolo tratteremo il metodo di quantizzazione di Weyl, il più utilizzato in fisica, il quale può essere riassunto nella seguente corrispondenza:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}(xp + yq)\right) \longrightarrow \exp\left(\frac{i}{\hbar}(x\hat{P} + y\hat{Q})\right) \equiv \hat{W}(x, y)$$

Esporremo anche una riformulazione più diretta del metodo di Weyl che si serve degli operatori di Grossmann, e in questa riformulazione la corrispondenza diventa:

$$\delta(x - p)\delta(y - q) \longrightarrow \frac{1}{\pi\hbar}\hat{W}(-2y, 2x)\hat{M} \equiv \frac{1}{\pi\hbar}\hat{G}(x, y)$$

in cui \hat{M} è l'operatore parità.

Mostriamo, tramite un argomento algebrico basato sul teorema di von Neumann, che la mappa di quantizzazione di Weyl è un isomorfismo tra gli spazi $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$ (spazio delle funzioni a quadrato Lebesgue-integrabile sullo spazio delle fasi) e $HS(\mathcal{H})$ (spazio degli operatori di Hilbert-Schmidt sullo spazio di Hilbert della descrizione quantistica), e che questo isomorfismo preserva il prodotto interno dei due spazi. Estenderemo dunque l'isomorfismo di Weyl al livello algebrico rendendo $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$ un'algebra grazie all'introduzione di un particolare prodotto non commutativo, chiamato prodotto di Moyal. Introduciamo poi la distribuzione di Wigner, una distribuzione di quasi probabilità sullo spazio delle fasi. Tale distribuzione è ciò che corrisponde nel formalismo di Weyl ad uno stato quantistico, cioè ad un operatore densità.

A questo punto come esempio di utilizzo della distribuzione di Wigner tratteremo brevemente il problema dei biliardi quantistici, mostrando come in essi siano rintracciabili le impronte classiche tramite i cosiddetti *scarred states*, autostati del sistema per i quali le probabilità di posizione presentano dei massimi in corrispondenza delle orbite periodiche classiche. Nell'ultima sezione del secondo capitolo troveremo esplicitamente l'operatore quantistico associato tramite la mappa di Weyl al quadrato del momento angolare classico e vedremo che differisce da quello quantistico per un addendo, il quale tuttavia si annulla nel limite classico $\hbar \rightarrow 0$.

Nel terzo capitolo introdurremo un'altra distribuzione di quasi probabilità partendo dalla considerazione che ogni operatore è sviluppabile in maniera diagonale su una base di stati coerenti. Tale distribuzione è la distribuzione di Husimi e mostreremo come essa sia uno *smoothing* gaussiano della distribuzione di Wigner.

Nell'ultimo capitolo introdurremo brevemente a titolo esemplificativo la quantizzazione di Born-Jordan, utilizzata ad esempio per le analisi tempo-frequenza. Nelle due appendici analizzeremo le principali caratteristiche degli stati coerenti e dell'algebra degli operatori di Hilbert-Schmidt.

Capitolo 1

Il problema della quantizzazione

Quando ci troviamo di fronte ad una funzione classica definita sullo spazio delle fasi e vogliamo trovare quale sia il corrispondente operatore quantistico, abbiamo bisogno di un metodo di quantizzazione. Un metodo di quantizzazione per avere una rilevanza fisica deve ovviamente far corrispondere a funzioni reali degli operatori autoaggiunti, gli operatori che nella meccanica quantistica rappresentano le osservabili. Ma l'operatore associato a una funzione non è univocamente definito. Le difficoltà che si incontrano quando si vuole quantizzare una variabile dinamica classica derivano proprio dal fatto che l'operatore associato non è unico e non è quasi mai definito semplicemente sostituendo gli operatori \hat{P} e \hat{Q} alle variabili p e q . Questo si può capire facilmente analizzando il caso dei monomi: alla variabile pq sarebbe possibile associare l'operatore $\hat{P}\hat{Q}$ ma anche l'operatore $\hat{Q}\hat{P}$ i quali, dato che \hat{P} e \hat{Q} non commutano, sono due operatori distinti.

In questo capitolo trattiamo il caso semplice dei monomi per cui esponiamo più metodi diversi, mentre nel capitolo successivo tratteremo in maniera più approfondita il caso della quantizzazione di Weyl, che è il metodo più utilizzato e più conosciuto.

1.1 Quantizzazione di monomi

Ci sono varie scelte possibili per associare degli operatori quantistici a dei monomi del tipo $q^r p^s$:

Abbiamo l'ordinamento standard in cui vengono messi prima gli operatori posizione e poi gli operatori impulso:

$$p^s q^r \rightarrow \hat{Q}^r \hat{P}^s \tag{1.1}$$

L'ordinamento antistandard in cui invece gli operatori d'impulso precedono gli operatori posizione:

$$p^s q^r \rightarrow \hat{P}^s \hat{Q}^r \quad (1.2)$$

Questi due ordinamenti, in realtà non sono metodi di quantizzazione perché gli operatori generati non sono autoaggiunti, ma possono tornare utili in alcune situazioni.

Un esempio di un vero e proprio metodo di quantizzazione è quello introdotto da Hermann Weyl [We] nel 1927:

$$p^s q^r \xrightarrow{W} \frac{1}{2^s} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \hat{P}^{s-j} \hat{Q}^r \hat{P}^j = \frac{1}{2^r} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \hat{Q}^{r-j} \hat{P}^s \hat{Q}^j \quad (1.3)$$

Dove l'uguaglianza a destra segue dalla regola di commutazione tra \hat{Q} e \hat{P} . Questo metodo è molto simmetrico, infatti il coefficiente binomiale dà più peso ai fattori più simmetrici e meno peso a quelli meno simmetrici.

Max Born e Pascual Jordan invece introdussero quest'altro metodo [BoJo] qualche anno prima:

$$p^s q^r \xrightarrow{BJ} \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^s \hat{P}^{s-j} \hat{Q}^r \hat{P}^j = \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^r \hat{Q}^{r-j} \hat{P}^s \hat{Q}^j \quad (1.4)$$

I metodi di Weyl e Born-Jordan coincidono solo se $s+r \leq 2$.

Se introduciamo un ordinamento dipendente dal parametro reale τ [Goss] definito in questo modo:

$$p^s q^r \xrightarrow{\tau} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (1-\tau)^j \tau^{s-j} \hat{P}^{s-j} \hat{Q}^r \hat{P}^j \quad (1.5)$$

Notiamo che l'ordinamento di Weyl (1.3) si ottiene dalla (1.5) scegliendo $\tau = 1/2$, scegliendo invece $\tau = 1$ otteniamo l'ordinamento antistandard (1.2), e con $\tau = 0$ l'ordinamento standard (1.1) mentre si può calcolare che l'ordinamento di Born-Jordan (1.4) si può ottenere dalla (1.5) integrando τ sull'intervallo $[0, 1]$, questo integrale si calcola facilmente se si integra per parti $s-j$ volte.

Capitolo 2

Quantizzazione di Weyl

Il metodo di quantizzazione elaborato da Hermann Weyl nel 1927 [We] è il più utilizzato in meccanica quantistica. La corrispondenza di Weyl matematicamente parlando è un isomorfismo tra gli spazi $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$ (che rappresenta le funzioni a quadrato integrabile sullo spazio delle fasi classico) e lo spazio $HS(\mathcal{H})$ che è lo spazio degli operatori di Hilbert-Schmidt sullo spazio di Hilbert degli stati quantistici del sistema (Nell'appendice B sono riportate le principali caratteristiche di questi operatori). Mostriamo come l'isomorfismo dato è un'isometria a patto di riscaldare il prodotto interno in $HS(\mathcal{H})$ (B.3) moltiplicandolo per un fattore $2\pi\hbar$. Inoltre l'isomorfismo può essere esteso al livello algebrico [Pool] facendo corrispondere al prodotto non commutativo tra operatori quantistici in $HS(\mathcal{H})$ uno specifico prodotto in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$ detto prodotto di Moyal che descriveremo nel capitolo. Il fatto che la corrispondenza di Weyl a differenza di altre mappe di quantizzazione sia biunivoca, ci permette anche di dequantizzare gli operatori quantistici e quindi studiare la dinamica di un sistema quantistico nello spazio delle fasi classico utilizzando il prodotto di Moyal. Dato questo isomorfismo, agli operatori densità quantistici corrispondono sullo spazio delle fasi delle speciali distribuzioni di quasi probabilità dette funzioni di Wigner. Questa corrispondenza così ben definita ci dà un altro modo di approcciarci alla meccanica quantistica del tutto equivalente a quello alla Schrödinger e a quello alla Heisenberg. Inoltre, poichè lavoriamo sullo spazio delle fasi che è l'ambiente in cui opera la meccanica Hamiltoniana classica, con questo approccio è più facilmente visibile come la meccanica quantistica si riduca a quella classica sotto opportuni limiti.

2.1 Corrispondenza di Weyl

Vediamo ora come è definita la corrispondenza di Weyl nel caso di spazio delle configurazioni monodimensionale (una particella senza spin in una dimensione).

La corrispondenza di Weyl è la mappa $\Omega_W : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow HS(\mathcal{H})$ che associa un operatore quantistico \hat{F} ad una funzione $f(p, q)$ passando attraverso la trasformata di Fourier di f agendo in questo modo:

$$\Omega_W(f) = \hat{F} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx dy \tilde{f}(x, y) \hat{W}(x, y) \quad (2.1)$$

in cui $\tilde{f}(x, y)$ è la trasformata di Fourier bidimensionale di $f(p, q)$ cioè vale:

$$f(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx dy \tilde{f}(x, y) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(xp + yq)\right) \quad (2.2)$$

mentre \hat{W} è l'operatore di Weyl così definito:

$$\hat{W}(x, y) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(x\hat{P} + y\hat{Q})\right) \stackrel{BKH}{=} \exp\left(\frac{i}{\hbar}x\hat{P}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}y\hat{Q}\right) \exp\left(-\frac{ixy}{2\hbar}\right) \quad (2.3)$$

Confrontando ora la (2.1) e la (2.2) si nota che la corrispondenza di Weyl in pratica consiste nel sostituire la base esponenziale, su cui sviluppiamo f con peso \tilde{f} , con la base data dagli operatori di Weyl, su cui sviluppiamo \hat{F} con lo stesso peso, cioè:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}(xp + yq)\right) \longrightarrow \exp\left(\frac{i}{\hbar}(x\hat{P} + y\hat{Q})\right) \quad (2.4)$$

In questo modo abbiamo un metodo per associare un operatore quantistico ad ogni funzione classica.

Gli operatori di Weyl che abbiamo introdotto sono una famiglia di operatori unitari a due parametri reali che si possono sempre esprimere in questo modo:

$$\hat{W}(x, y) = \hat{U}(x)\hat{V}(y) \exp\left(-\frac{ixy}{2\hbar}\right) \quad (2.5)$$

In cui $\hat{U}(x)$ e $\hat{V}(y)$ sono due gruppi unitari a un parametro reale fortemente continui che soddisfano la relazione di commutazione di Weyl:

$$\hat{U}(x)\hat{V}(y) = \hat{V}(y)\hat{U}(x) \exp\left(\frac{ixy}{\hbar}\right) \quad (2.6)$$

Un teorema molto importante dovuto a von Neumann [ReSi] afferma che tutte le rappresentazioni irriducibili della relazione di commutazione di Weyl sono unitariamente equivalenti. Più precisamente:

Teorema 2.1.1 (von Neumann). *Siano $U(t)$ e $V(s)$ due gruppi unitari fortemente continui ad un parametro reale per i quali vale la relazione di commutazione di Weyl (2.6) e che formano una coppia irriducibile su di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} separabile, allora esiste sempre un operatore unitario $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tale che $\forall f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ valgono:*

- a) $WU(t)W^{-1}f(x) = f(x+t)$
- b) $WV(s)W^{-1}f(x) = f(x)e^{isx}$

Questo teorema è molto importante e verrà utilizzato in seguito per ricavare in maniera algebrica che la mappa di Weyl è un isomorfismo. Ora vediamo qualche altra proprietà degli operatori di Weyl, innanzitutto vediamo che essi costituiscono un gruppo a meno di un fattore di fase, infatti vale:

$$\hat{W}(t, s)\hat{W}(t', s') = \hat{W}(t+t', s+s') \exp\left[\frac{i}{2\hbar}(ts' - st')\right] \quad (2.7)$$

Inoltre abbiamo che l'inverso di un operatore di Weyl che, data l'unitarietà, coincide con l'aggiunto è $\hat{W}(t, s)^\dagger = \hat{W}(-t, -s)$. Un'espressione che ci verrà utile è quella dell'elemento di matrice di un operatore di Weyl nella base delle posizioni, si calcola facilmente che vale:

$$\langle q' | \hat{W}(x, y) | q \rangle = \delta(x - (q - q')) e^{iy(q'+q)/(2\hbar)} \quad (2.8)$$

2.1.1 La trasformata di Wigner

La mappa di Weyl è invertibile e la sua inversa che associa una funzione classica ad un operatore quantistico viene chiamata trasformata di Wigner e è definita in questo modo:

$$\Omega_W^{-1}(\hat{F}) = f(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-ipy/\hbar) \left\langle q + \frac{y}{2} \left| \hat{F} \right| q - \frac{y}{2} \right\rangle \quad (2.9)$$

Con queste definizioni valgono: $\Omega_W^{-1}\Omega_W = \mathbb{1}_{\mathcal{L}^2}$ e $\Omega_W\Omega_W^{-1} = \mathbb{1}_{HS}$. Verifichiamo che vale l'Identità su \mathcal{L}^2 .

$$\begin{aligned}
(\Omega_W^{-1}\Omega_W)f(p, q) &= \int dz e^{-ipz/\hbar} \left\langle q + \frac{z}{2} \left| \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx dy \tilde{f}(x, y) \hat{W}(x, y) \right| q - \frac{z}{2} \right\rangle \stackrel{(2.8)}{=} \\
&= \int \frac{dx dy dz}{2\pi\hbar} e^{-ipz/\hbar} \tilde{f}(x, y) \delta(x+z) e^{iyq/\hbar} = \\
&= \int \frac{dx dy}{2\pi} e^{ipx} \tilde{f}(x, y) e^{iqy} = f(p, q)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.1.2 Caso multidimensionale

L'estensione della corrispondenza di Weyl al caso multidimensionale segue in maniera ovvia dalla sua definizione unidimensionale, riportiamo la formula per uno spazio delle fasi di dimensione $2n$:

$$\Omega_W(f) = \hat{F} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int d^n x d^n y \tilde{f}(\underline{x}, \underline{y}) \hat{W}(\underline{x}, \underline{y})$$

dove

$$\tilde{f}(\underline{x}, \underline{y}) = \int d^n q d^n p e^{-\frac{i}{\hbar}(\underline{x}\cdot\underline{p} + \underline{y}\cdot\underline{q})} d^n q d^n p$$

e

$$\hat{W}(\underline{x}, \underline{y}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\underline{x} \cdot \hat{P} + \underline{y} \cdot \hat{Q})\right) \tag{2.11}$$

E la formula inversa è invece:

$$\Omega_W^{-1}(\hat{F}) = f(\underline{p}, \underline{q}) = \int d^n y \exp(-i\underline{p} \cdot \underline{y}/\hbar) \left\langle \underline{q} + \frac{\underline{y}}{2} \left| \hat{F} \right| \underline{q} - \frac{\underline{y}}{2} \right\rangle \tag{2.12}$$

2.1.3 Operatori di Grossmann

Un modo più diretto per definire la corrispondenza di Weyl senza passare per la Trasformata di Fourier fu introdotto da A. Grossmann [Gros] ed è questo:

$$\Omega_W(f) = \hat{F} = \frac{1}{\hbar\pi} \int dp dq f(p, q) \hat{W}(-2q, 2p) \hat{M} \tag{2.13}$$

in cui \hat{M} è l'operatore parità cioè l'operatore unitario tale che:

$$\hat{M}^\dagger \hat{P} \hat{M} = -\hat{P} \quad \hat{M}^\dagger \hat{Q} \hat{M} = -\hat{Q}$$

Se ora definisco l'operatore:

$$\hat{G}(p, q) = \hat{W}(-2q, 2p)\hat{M} \quad (2.14)$$

e lo chiamo operatore di Grossmann posso scrivere in questo modo la corrispondenza di Weyl:

$$\Omega_W(f) = \hat{F} = \frac{1}{\hbar\pi} \int dpdq f(p, q)\hat{G}(p, q) \quad (2.15)$$

Gli operatori di Grossmann hanno interessanti proprietà, infatti sono operatori unitari, autoaggiunti e il prodotto di un numero pari di operatori di Grossmann è un operatore di Weyl, mentre il prodotto di un operatore di Weyl con un operatore di Grossmann è un operatore di Grossmann.

Inoltre vale questa proprietà facilmente calcolabile facendo la traccia nella base delle posizioni:

$$\left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 Tr(\hat{G}(p, q)\hat{G}(p', q')) = \frac{1}{2\pi\hbar}\delta(p - p')\delta(q - q') \quad (2.16)$$

Quindi dati due operatori \hat{F} e \hat{H} tali che $\hat{F} = \Omega_W(f)$ e $\hat{H} = \Omega_W(h)$, applicando la (2.15) e la (2.16) abbiamo questa uguaglianza:

$$Tr(\hat{F}^\dagger \hat{H}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dpdq f^*(p, q)h(p, q) \quad (2.17)$$

Dalla (2.17) a patto di riscalarlo il prodotto interno in $HS(\mathcal{H})$ (B.3) in questo modo,

$$(\hat{F}, \hat{H})_{HS} \equiv 2\pi\hbar Tr(\hat{F}^\dagger \hat{H}) \quad (2.18)$$

deriva che la mappa di Weyl è un'isometria cioè $\forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ vale:

$$(\Omega_W(f), \Omega_W(g))_{HS} = (f, g)_{\mathcal{L}^2} \quad (2.19)$$

A questo punto, esaminando un argomento algebrico trovato dal relatore di questa tesi (L.Molinari) e contenuto nella sua tesi di laurea [Mol] mostriamo come possiamo ricavare gli operatori di Grossmann e dimostrare che la mappa di Weyl è un isomorfismo.

Innanzitutto, dati $\hat{U}(s)$ e $\hat{V}(t)$ gruppi unitari a un parametro reale fortemente continui che soddisfano la relazione di commutazione di Weyl (2.6) definiamo quattro superoperatori che agiscono sullo spazio $HS(\mathcal{H})$ degli operatori di Hilbert-Schmidt su \mathcal{H} (vedi appendice B). La loro azione su un generico operatore \hat{A} è la seguente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_t(\hat{A}) &= \hat{V}^\dagger(t)\hat{A}\hat{V}(t) & \mathcal{V}_s(\hat{A}) &= \hat{U}(s/2)\hat{A}\hat{U}(s/2) \\
\tilde{\mathcal{U}}_t(\hat{A}) &= \hat{U}(t)\hat{A}\hat{U}^\dagger(t) & \tilde{\mathcal{V}}_s(\hat{A}) &= \hat{V}(s/2)\hat{A}\hat{V}(s/2)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Si verifica facilmente che questi quattro superoperatori sono a loro volta due coppie commutanti di gruppi unitari a un parametro reale fortemente continui che soddisfano la relazione di commutazione di Weyl (2.6), infatti:

$$\mathcal{U}_t\mathcal{V}_s = \mathcal{V}_s\mathcal{U}_te^{its/\hbar} \quad \tilde{\mathcal{U}}_t\tilde{\mathcal{V}}_s = \tilde{\mathcal{V}}_s\tilde{\mathcal{U}}_te^{its/\hbar} \tag{2.21}$$

I generatori di queste due coppie di gruppi unitari di superoperatori sono dei superoperatori autoaggiunti che condividono un dominio denso in $HS(\mathcal{H})$. Essi sono rispettivamente:

Derivazione e moltiplicazione per \hat{P} :

$$\mathcal{D}_p(\hat{A}) = [\hat{A}, \hat{Q}] \quad \mathcal{Q}_p(\hat{A}) = \hat{P} \odot \hat{A} \tag{2.22}$$

(Il simbolo \odot rappresenta il prodotto di Jordan, o prodotto simmetrizzato che è costituito dalla metà dell'anticommutatore tra i due operatori)

Derivazione e moltiplicazione per \hat{Q} :

$$\mathcal{D}_q(\hat{A}) = [\hat{P}, \hat{A}] \quad \mathcal{Q}_q(\hat{A}) = \hat{Q} \odot \hat{A} \tag{2.23}$$

Questi superoperatori soddisfano le relazioni di commutazione di Heisenberg, infatti:

$$[\mathcal{Q}_q, \mathcal{D}_q] = [\mathcal{Q}_p, \mathcal{D}_p] = i\hbar \quad [\mathcal{Q}_q, \mathcal{D}_p] = [\mathcal{Q}_p, \mathcal{D}_q] = [\mathcal{Q}_q, \mathcal{Q}_p] = [\mathcal{D}_q, \mathcal{D}_p] = 0 \tag{2.24}$$

e quindi per il teorema di von Neumann (2.1.1) esiste un operatore unitario che chiamiamo $\Omega_W^{-1} : HS(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ tale che $\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ valgono:

- 1) $\Omega_W^{-1}\mathcal{U}_t\Omega_W f(p, q) = f(p + t, q)$
- 2) $\Omega_W^{-1}\mathcal{V}_s\Omega_W f(p, q) = f(p, q)e^{isp}$
- 3) $\Omega_W^{-1}\tilde{\mathcal{U}}_t\Omega_W f(p, q) = f(p, q + t)$
- 4) $\Omega_W^{-1}\tilde{\mathcal{V}}_s\Omega_W f(p, q) = f(p, q)e^{isq}$

Sviluppando al primo ordine nel parametro reale le quattro relazioni sui gruppi unitari ricaviamo queste relazioni sui generatori di tali gruppi:

- 1) $\Omega_W^{-1}\mathcal{D}_p\Omega_W f(p, q) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial p}f(p, q)$
- 2) $\Omega_W^{-1}\mathcal{Q}_p\Omega_W f(p, q) = \hbar pf(p, q)$
- 3) $\Omega_W^{-1}\mathcal{D}_q\Omega_W f(p, q) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}f(p, q)$
- 4) $\Omega_W^{-1}\mathcal{Q}_q\Omega_W f(p, q) = \hbar qf(p, q)$

Da queste ultime relazioni discende che se $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ è autofunzione o della

derivazione o della moltiplicazione, allora $\Omega_W(f) \in HS(\mathcal{H})$ è autooperatore di \mathcal{D} o di \mathcal{Q} . E se $\hat{F} \in HS(\mathcal{H})$ è autooperatore di \mathcal{D} o di \mathcal{Q} allora $\Omega_W^{-1}(\hat{F}) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ è autofunzione della derivazione o della moltiplicazione. Ma le autofunzioni comuni alle due derivazioni (rispetto a p e a q) o anche alle due moltiplicazioni sono una base dello spazio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$, e gli autooperatori comuni alle due derivazioni (\mathcal{D}_p e \mathcal{D}_q) o anche alle due moltiplicazioni sono una base dello spazio $HS(\mathcal{H})$. Dunque la mappa Ω_W manda in maniera biunivoca una base di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ in una base di $HS(\mathcal{H})$. Tale mappa è proprio la mappa di Weyl, e per questo motivo l'abbiamo chiamata Ω_W . Ora vediamo quali sono le autofunzioni in \mathcal{L}^2 comuni alle due derivazioni e quelle comuni alle due moltiplicazioni:

$$\begin{aligned}
-i\hbar \frac{\partial}{\partial q} e^{i(xp+yq)/\hbar} &= y e^{i(xp+yq)/\hbar} & -i\hbar \frac{\partial}{\partial p} e^{i(xp+yq)/\hbar} &= x e^{i(xp+yq)/\hbar} \\
q\delta(q-a)\delta(p-b) &= a\delta(q-a)\delta(p-b) & p\delta(q-a)\delta(p-b) &= b\delta(q-a)\delta(p-b)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Vediamo che le autofunzioni delle derivazioni sono degli esponenziali e le autofunzioni delle moltiplicazioni sono delle delte di Dirac.

Troviamo ora gli autooperatori dei quattro superoperatori corrispondenti su $HS(\mathcal{H})$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_q(\hat{W}(x, y)) &= y\hat{W}(x, y) & \mathcal{D}_p(\hat{W}(x, y)) &= x\hat{W}(x, y) \\
\mathcal{Q}_q(\hat{G}(p, q)) &= q\hat{G}(p, q) & \mathcal{Q}_p(\hat{G}(p, q)) &= p\hat{G}(p, q)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Quindi concludiamo che gli operatori di Weyl sono la base di autooperatori comune ai due superoperatori di derivazione e quindi corrispondono tramite l'isomorfismo alle funzioni esponenziali, mentre gli operatori di Grossmann sono la base di autooperatori comune ai due superoperatori di moltiplicazione e quindi corrispondono in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ alle funzioni delta. Perciò:

$$\delta(p-a)\delta(q-b) \xrightarrow{W} \frac{1}{\pi\hbar} \hat{G}(a, b) \tag{2.27}$$

E di conseguenza:

$$f(p, q) = \int f(a, b)\delta(p-a)\delta(q-b) \xrightarrow{\tau} \hat{F} = \frac{1}{\pi\hbar} \int f(a, b)\hat{G}(a, b) \tag{2.28}$$

2.2 Il prodotto di Moyal

A questo punto sorge il problema di trovare un prodotto $*$: $\mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$ tale che dati due operatori \hat{F} e \hat{G} e le rispettive trasformate di Wigner f e

g si abbia che $\Omega_W^{-1}(\hat{F}\hat{G}) = f * g$ dove $*$ è il prodotto cercato. Con questo prodotto l'isomorfismo di Weyl viene esteso a livello algebrico, i due spazi diventano quindi completamente equivalenti e è possibile studiare la dinamica di sistemi quantistici indifferentemente in uno dei due spazi ottenendo gli stessi risultati. Il prodotto cercato non può essere l'usuale prodotto puntuale in \mathcal{L}^2 definito in questo modo $fg(x) = f(x)g(x)$, perché questo è commutativo e quindi ovviamente non può corrispondere al prodotto operatoriale in $HS(\mathcal{H})$ che invece non lo è. L'operazione $*$ cercata poiché deve corrispondere al prodotto operatoriale tramite la mappa lineare di Weyl deve avere queste caratteristiche:

1. Associatività: $(f * g) * h = f * (g * h)$
2. Hermitianità: $f^* * g^* = (g * f)^*$
3. Linearità: $(\lambda f) * g = f * (\lambda g)$ e $(f + g) * h = f * h + g * h$

Inoltre il prodotto cercato deve ridursi all'usuale prodotto puntuale nel limite classico cioè nel limite $\hbar \rightarrow 0$

L'operazione che soddisfa tutte le caratteristiche elencate è il prodotto di Moyal [**Moy**] che è definito in questo modo:

$$(f * g)(p, q) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 f(p_1 + p, q_1 + q) g(p_2 + p, q_2 + q) e^{[\frac{2i}{\hbar}(q_1 p_2 - p_1 q_2)]} \quad (2.29)$$

Una definizione equivalente, e più facilmente applicabile quando si trattano funzioni derivabili, è la seguente:

$$f(p, q) * g(p, q) = f\left(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q, q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p\right)g(p, q) \quad (2.30)$$

Se integriamo $f * g$ sullo spazio delle fasi guardando la definizione (2.29) notiamo che nel caso di prodotto di Moyal di sole due funzioni vale [**ZFC**]:

$$\int dq dp f(p, q) * g(p, q) = \int dp dq f(p, q)g(p, q) = \int dp dq g(p, q) * f(p, q) \quad (2.31)$$

Inoltre data l'equazione dell'evoluzione temporale per un operatore alla Heisenberg:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \quad (2.32)$$

risulta che la sua trasformata di Wigner ha come limite per $\hbar \rightarrow 0$ l'equazione classica:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_P + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.33)$$

in cui le parentesi graffe sono le usuali parentesi di Poisson. Questo avviene perché vale il limite:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [f, g]_* = \{f, g\}_P \quad (2.34)$$

dove $(i\hbar)^{-1}[f, g]_* = (i\hbar)^{-1}(f * g - g * f)$ è detta parentesi di Moyal. Quindi vediamo che la parentesi di Moyal tende a quella di Poisson nel limite classico $\hbar \rightarrow 0$.

Col prodotto di Moyal vediamo che la mappa di Weyl è una mappa che oltre ad essere invertibile e isometrica preserva anche la struttura di algebra dei due spazi, è quindi un isomorfismo di algebre.

Questo fatto ci permette di studiare la meccanica quantistica nello spazio delle fasi, in maniera completamente equivalente alla trattazione alla Schrödinger.

2.3 La distribuzione di Wigner

Ora che sappiamo quali funzioni dello spazio delle fasi corrispondono agli operatori quantistici secondo la mappa di Weyl, ci chiediamo cosa dobbiamo fare corrispondere agli stati del sistema. I sistemi in meccanica quantistica sono rappresentati dagli operatori densità, a questi operatori corrisponde, nello spazio delle fasi, la distribuzione di Wigner che non è una vera e propria distribuzione di probabilità ma è una distribuzione di quasi probabilità, infatti può assumere anche valori negativi. Wigner la introdusse per studiare le correzioni quantistiche all'equilibrio termodinamico **[Wig]**, essa si rivelò poi utile nell'ambito della quantizzazione di Weyl. In tale ambito la sua definizione viene naturalmente e segue dalla formula di Grossmann, vediamo come si ottiene.

Sappiamo che dato un operatore densità $\hat{\rho}$ il valor medio di un operatore quantistico \hat{F} corrispondente alla funzione classica $f(p, q)$ è dato da:

$$\langle \hat{F} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{F}) = \frac{1}{\pi \hbar} \int dpdq f(p, q) Tr[\hat{\rho} \hat{G}(p, q)] = \int dpdq f(p, q) \rho(p, q) \quad (2.35)$$

La funzione $\rho(p, q)$ che compare nell'ultimo membro è la funzione di Wigner e la sua definizione la si desume dall'ultima uguaglianza nella (2.35):

$$\rho(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{G}(p, q)] \quad (2.36)$$

Ora ci si può chiedere se la distribuzione di Wigner sia la trasformata di Wigner dell'operatore densità, proviamo a calcolare $\rho(p, q)$:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dq' \langle q' | \hat{\rho}\hat{G}(p, q) | q' \rangle = \frac{1}{\pi\hbar} \int dq' \langle q' | \hat{\rho} \exp\left(-\frac{2iq\hat{P}}{\hbar} + \frac{2ip\hat{Q}}{\hbar}\right) \hat{M} | q' \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dq' \langle q' | \hat{\rho} \exp\left(-\frac{2iq\hat{P}}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{2ip\hat{Q}}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{2iqp}{\hbar}\right) | -q' \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dq' \langle q' | \hat{\rho} | -q' + 2q \rangle \exp\left(-\frac{2iq'p}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{2iqp}{\hbar}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy \left\langle q + \frac{y}{2} \left| \hat{\rho} \right| q - \frac{y}{2} \right\rangle \exp\left(-\frac{ipy}{\hbar}\right) = \frac{\Omega_W^{-1}(\hat{\rho})}{2\pi\hbar} \end{aligned} \quad (2.37)$$

(Per sviluppare l'esponenziale è stata utilizzata la formula di Baker-Campbell-Hausdorff, poi è stato fatto il cambio di variabili d'integrazione $y = 2q' - 2q$, e nell'ultimo passaggio si è usata la (2.9))

Vediamo quindi che la distribuzione di Wigner corrisponde alla trasformata di Wigner dell'operatore densità a meno di un fattore di normalizzazione $1/2\pi\hbar$. Dalla (2.37) ricaviamo anche una definizione equivalente per la funzione di Wigner:

$$\rho(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy \left\langle q + \frac{y}{2} \left| \hat{\rho} \right| q - \frac{y}{2} \right\rangle \exp\left(-\frac{ipy}{\hbar}\right) \quad (2.38)$$

Da quest'ultima equazione discendono immediatamente queste proprietà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p, q) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle \quad \int_{-\infty}^{\infty} dq \rho(p, q) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle \quad (2.39)$$

Nel caso in cui l'operatore densità sia di uno stato puro $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ la distribuzione di Wigner associata prende una forma più semplice:

$$\rho_\psi(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \langle \psi | \hat{G}(p, q) | \psi \rangle \quad (2.40)$$

E le equazioni della (2.39) diventano:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p, q) = |\psi(q)|^2 \quad \int_{-\infty}^{\infty} dq \rho(p, q) = |\psi(p)|^2 \quad (2.41)$$

Vediamo che la distribuzione di Wigner integrata su tutte le posizioni dà la probabilità di una misura d'impulso, mentre integrata su tutti gli impulsi dà la probabilità di una misura di posizione.

Se inoltre lo stato oltre ad essere puro è uno stato coerente $|z\rangle$ centrato in (p_0, q_0) (vedi appendice A) la distribuzione di Wigner corrispondente assume una forma più semplice:

$$\rho_z(p, q) = \frac{1}{\pi \hbar} e^{-i[(q-q_0)^2 + (p-p_0)^2]/\hbar} \quad (2.42)$$

che è l'espressione di una gaussiana bidimensionale centrata in (p_0, q_0) con larghezza $\sqrt{\hbar}$ che quindi converge a $\delta(q - q_0)\delta(p - p_0)$ se \hbar tende a zero (vedi figura 2.1).

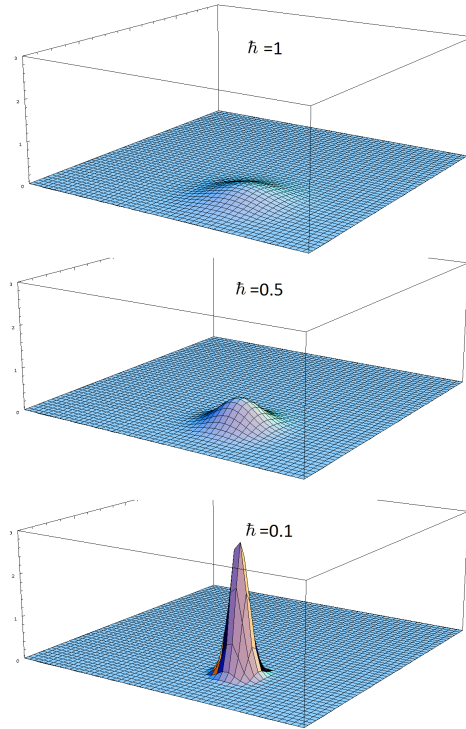


Figura 2.1: Funzione di Wigner per uno stato coerente con valori decrescenti di \hbar , notiamo che al decrescere di \hbar la gaussiana diventa sempre più piccata e si può così avere una verifica visiva del fatto che la gaussiana tende alla delta bidimensionale per $\hbar \rightarrow 0$.

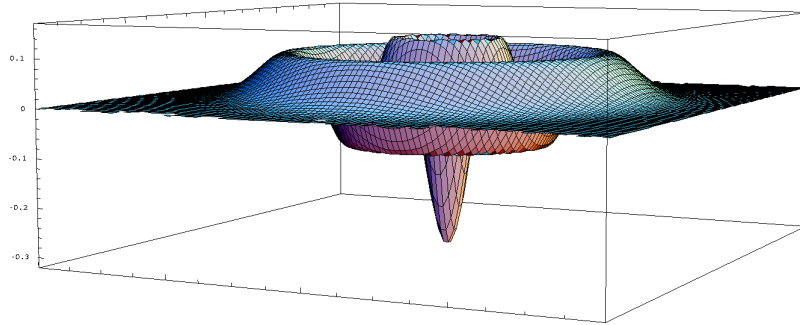


Figura 2.2: Funzione di Wigner per la funzione d'onda di oscillatore armonico con $n = 3$ cioè $\psi(q) \propto (8q^3 - 12q)e^{-q^2/2}$.

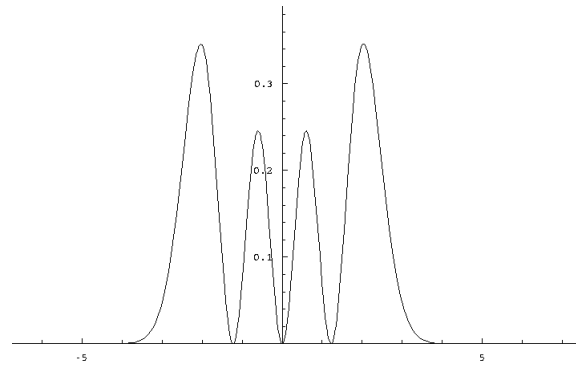


Figura 2.3: Probabilità di posizione $|\psi(q)|^2$ per lo stato $n=3$ dell'oscillatore armonico. Ottenuta integrando la rispettiva funzione di Wigner su tutti gli impulsi.

2.4 La distribuzione di Wigner per i biliardi quantistici

Ora per fare un esempio di utilizzo della distribuzione di Wigner studieremo il caso dei biliardi quantistici. I biliardi quantistici sono dei sistemi bidimensionali in cui si ha un potenziale nullo all'interno dell'area del biliardo e infinito all'esterno. Per trovare le autofunzioni di questi sistemi bisogna risolvere l'equazione di Schrödinger con condizioni al contorno di Dirichlet, le quali implicano che la funzione d'onda si annulli alla frontiera e sia nulla fuori dal biliardo.

Quindi, dato $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio connesso sul piano euclideo, con una frontiera $\partial\Omega$ liscia a tratti, il biliardo di Dirichlet è definito da queste equazioni:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_n(q) &= E_n\psi_n(q) & q \in \Omega - \partial\Omega \\
\psi_n(q) &= 0 & q \in \mathbb{R}^2/\Omega
\end{aligned}
\tag{2.43}$$

Dunque l'equazione differenziale da risolvere è:

$$(\nabla^2 + k_n^2)\psi_n(q) = 0 \quad k_n^2 = E_n 2m/\hbar^2 \tag{2.44}$$

Questa equazione è l'equazione di Helmholtz, la stessa che in meccanica classica descrive ad esempio la risonanza per una membrana elastica vibrante con un contorno definito.

Le uniche forme di biliardo per le quali esistono soluzioni analitiche del problema agli autovalori sono il cerchio, il rettangolo e l'ellisse poiché il problema in questi casi risulta separabile con un'opportuna scelta di coordinate, anche il triangolo equilatero è risolvibile notando alcune simmetrie del sistema.

Ma per biliardi di altre forme come ad esempio lo stadio di Bunimovich (costituito da un rettangolo racchiuso tra due semicerchi) o il biliardo a forma di cardioide, non esistono soluzioni analitiche ma solo soluzioni numeriche.

Una caratteristica interessante di questi sistemi quantistici è che spesso mostrano un effetto chiamato scarring, cioè si trova che la probabilità di posizione di alcune autofunzioni ha dei massimi in corrispondenza di alcune orbite periodiche classiche (vedi fig2.6 e fig2.5).

Per lo studio di questi sistemi viene utile utilizzare la distribuzione di Wigner (o la distribuzione di Husimi che è strettamente collegata con essa e di cui tratteremo in seguito) perchè è ciò che si avvicina di più ad una distribuzione di probabilità sullo spazio delle fasi, e quindi è il miglior candidato per ricercare impronte classiche nel sistema quantistico, una delle quali è proprio il fenomeno dello scarring. In realtà però, la distribuzione di Wigner, essendo definita sullo spazio delle fasi $2n$ -dimensionale, è difficile da visualizzare, per questo risulta più utile studiarne i marginali. Infatti la funzione di Wigner come abbiamo mostrato ha quest'utile proprietà: integrata su tutti gli impulsi restituisce la probabilità di posizione mentre integrata su tutte le posizioni restituisce la probabilità di impulso.

In generale per lo studio dei biliardi quantistici si utilizza la probabilità di posizione, ma può risultare utile pure studiare la probabilità d'impulso [Bac]. Infatti, dal fatto che $E \propto p^2$, segue che la probabilità di impulso si distribuisce sul cerchio di raggio $p = \sqrt{E}$ e quindi possiamo trascurare la dipendenza radiale integrandola su tutti i raggi. In questo modo otteniamo una funzione monodimensionale, che rappresenta la distribuzione di probabilità angolare della direzione dell'impulso. Studiando i picchi di questa funzione (vedi

Fig.2.6 in basso) possiamo facilmente vedere se ci sono direzioni di impulso privilegiate, e quindi individuare i cosiddetti scarred states.

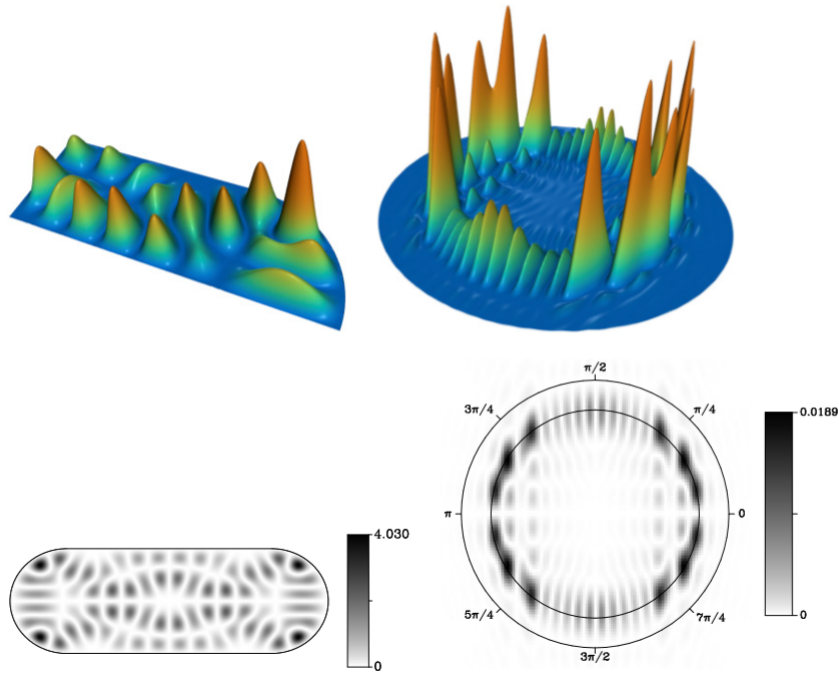


Figura 2.4: In questo caso viene studiato un autostato del biliardo quantistico a forma di stadio, in alto a sinistra si vede la probabilità di posizione per un quadrante dello stadio, mentre a destra si vede la probabilità di impulso, che si distribuisce su di una circonferenza. [Bac]

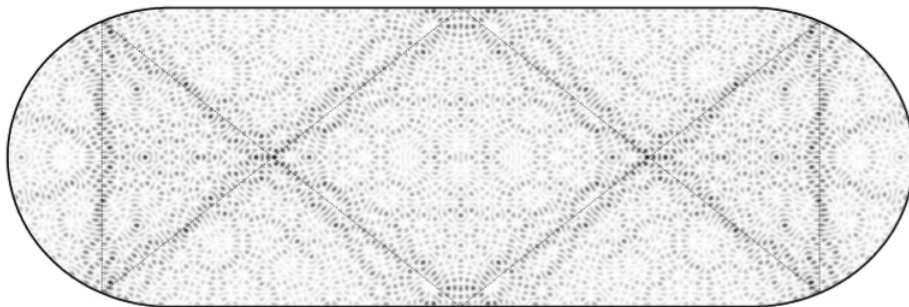


Figura 2.5: Un'altra rappresentazione della probabilità di posizione di un autostato del biliardo bidimensionale a forma di stadio, in cui si individua facilmente un'orbita periodica classica. [Bac]

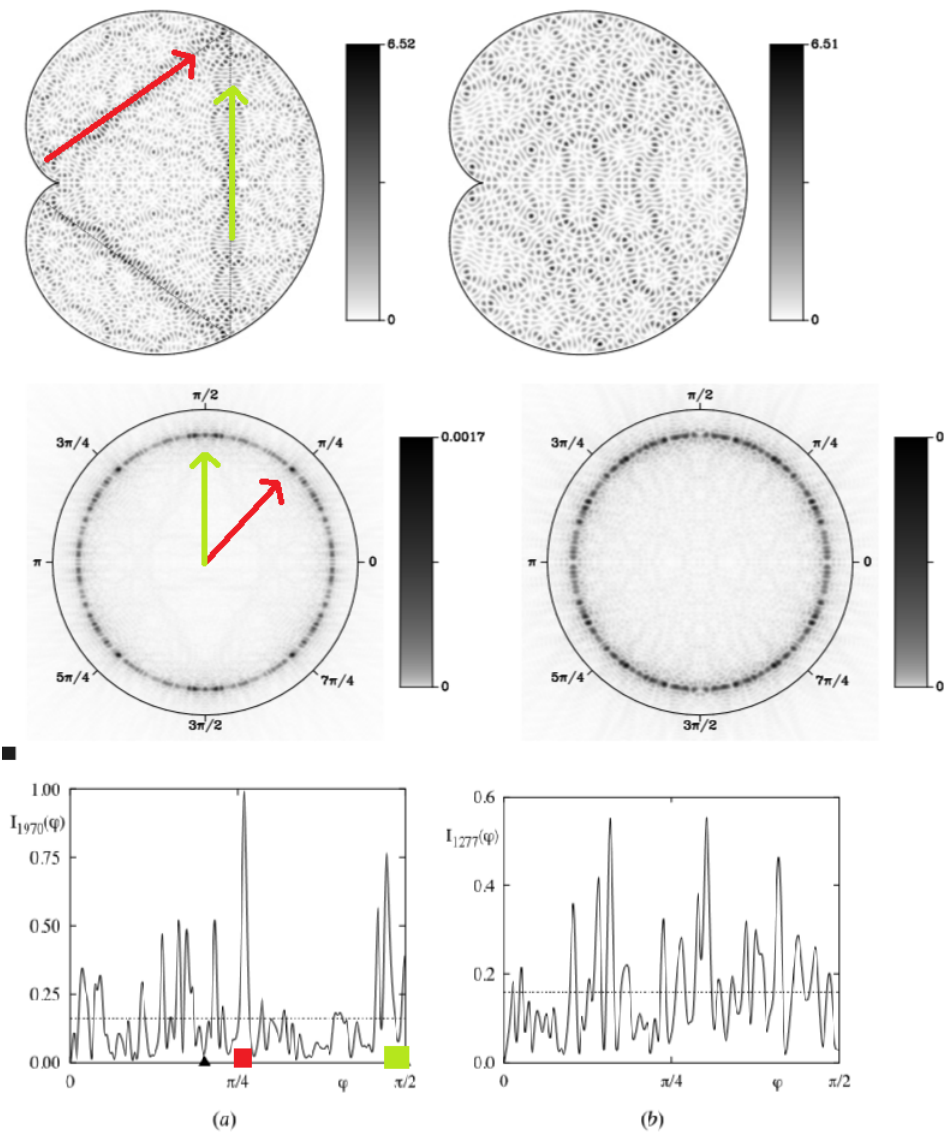


Figura 2.6: Vediamo la rappresentazione di due autostati del biliardo quantistico a forma di cardioide, i alto abbiamo la rappresentazione nella probabilità di posizione, in centro le probabilità d'impulso, e in basso le probabilità angolari d'impulso. Notiamo che nel caso di sinistra è identificabile una delle traiettorie periodiche classiche, e che i massimi della funzione angolare individuano proprio le direzioni di queste traiettorie. [Bac]

2.5 Problema momento angolare

Ora tratteremo espressamente il caso del quadrato del momento angolare che è un esempio di una quantità per cui l'espressione classica e quella quantistica differiscono manifestamente. Partiamo dal ricordare l'espressione classica del momento angolare:

$$\ell = (x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3, x_1 p_2 - x_2 p_1) \quad (2.45)$$

Quindi il suo quadrato sarà costituito dalla somma di tre termini $\ell^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2$. Il nostro obiettivo è quello di trovare l'espressione quantistica di ℓ^2 servendoci della regola di quantizzazione di Weyl, per fare questo iniziamo a concentrarci solo sul termine ℓ_3^2 , per gli altri due termini il procedimento è analogo:

$$\ell_3^2 = x_1^2 p_2^2 + x_2^2 p_1^2 - 2x_1 p_1 x_2 p_2 \quad (2.46)$$

I primi due termini in (2.46) se quantizzati con qualsiasi regola di quantizzazione portano agli operatori $\hat{X}_1^2 \hat{P}_2^2$ e $\hat{X}_2^2 \hat{P}_1^2$. Il termine $f_{12}(x_1, x_2, p_1, p_2) = 2x_1 p_1 x_2 p_2$ potrebbe essere quantizzato utilizzando la regola di quantizzazione per i monomi, ma noi lo quantizzeremo con la formula di quantizzazione di Weyl per una funzione generica (2.11), in modo da avere un esempio di procedura generale. Per fare questo dobbiamo trovare innanzitutto la trasformata di Fourier multidimensionale di f_{12} che chiamiamo \tilde{f}_{12} :

$$\tilde{f}_{12}(x_1, x_2, p_1, p_2) = 2\hbar^4 (2\pi\hbar)^2 \delta'(x_1) \delta'(x_2) \delta'(p_1) \delta'(p_2) \quad (2.47)$$

dove $\delta'(x)$ è la derivata della delta in senso distribuzionale.

La (2.47) può essere capita se si calcola l'antitrasformata di Fourier della $\delta'(x)$:

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta'(x)) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} kx} \delta'(x) = \frac{-ik}{\hbar\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (2.48)$$

Ora applichiamo la formula (2.11) e calcoliamo la trasformata di Weyl di f_{12} ricordandoci che in questo caso la dimensione dello spazio delle configurazioni è 2, perché la funzione f_{12} non dipende dalle componenti (x_3, p_3) :

$$\begin{aligned} \Omega_W(f_{12}) &= \\ &= \int \frac{dx_1 dx_2 dp_1 dp_2}{(2\pi\hbar)^2} 2\hbar^4 (2\pi\hbar)^2 \delta'(x_1) \delta'(x_2) \delta'(p_1) \delta'(p_2) e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 \hat{X}_1 + x_2 \hat{X}_2 + p_1 \hat{P}_1 + p_2 \hat{P}_2)} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Ora scindendo l'esponenziale con la formula di Baker-Campbell-Hausdorff e integrando si ottiene:

$$\Omega_W(f_{12}) = -\frac{\hbar^2}{2} - i\hbar(\hat{X}_1\hat{P}_1 + \hat{X}_2\hat{P}_2) + 2\hat{X}_1\hat{P}_1\hat{X}_2\hat{P}_2 \quad (2.50)$$

Quindi ricordando la formula (2.46) e la definizione di f_{12} abbiamo:

$$\begin{aligned} \Omega_W(\ell_3^2) &= \hat{X}_1^2\hat{P}_2^2 + \hat{X}_2^2\hat{P}_1^2 + \frac{\hbar^2}{2} + i\hbar(\hat{X}_1\hat{P}_1 + \hat{X}_2\hat{P}_2) - 2\hat{X}_1\hat{P}_1\hat{X}_2\hat{P}_2 = \\ &= \hat{L}_3^2 + \frac{\hbar^2}{2} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Facendo lo stesso conto per tutte e tre le componenti di ℓ si conclude che:

$$\Omega_W(\ell^2) = \hat{L}^2 + \frac{3}{2}\hbar^2 \quad (2.52)$$

Notiamo dunque che c'è una differenza di $3\hbar^2/2$ tra la funzione classica e l'operatore quantistico.

Se ora calcoliamo il valore medio di questo operatore nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno $|1s\rangle$, poiché questo stato ha numero quantico $\ell = 0$, otteniamo che:

$$\langle 1s | \Omega_W(\ell^2) | 1s \rangle = \langle 1s | \hat{L}^2 | 1s \rangle + \langle 1s | \frac{3}{2}\hbar^2 | 1s \rangle = \frac{3}{2}\hbar^2$$

perché

$$\hat{L}^2 | 1s \rangle = \hbar^2 \ell(\ell + 1) | 1s \rangle = 0 \quad (2.53)$$

A questo punto potremmo porci il problema di come conciliare il fatto che nel modello di Bohr lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno ha $\ell = \hbar$, mentre nella meccanica quantistica di Schrödinger il valore medio del momento angolare nello stesso stato è nullo. Questo problema è stato trattato da J. P. Dahl e M. Springborg [**DaSp**] in un loro articolo del 1982, essi partendo dall'espressione (2.52) e integrandola su un certo sottospazio classico definito nell'articolo hanno ottenuto $\ell^2 = \hbar^2$ che è il valore atteso dal modello di Bohr per lo stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno.

Capitolo 3

La distribuzione di Husimi

La distribuzione introdotta da Kôdi Husimi nel 1940 [Hus] è un'altra distribuzione di quasi probabilità, è limitata, normalizzata e positiva, ma non è una vera distribuzione di probabilità perché non rispetta il terzo assioma della teoria della probabilità di Kolmogorov, cioè non è additiva su insiemi mutualmente disgiunti. Questo deriva dal fatto che essa è definita sul piano complesso nel quale ogni punto corrisponde ad uno stato coerente (per informazioni di base sugli stati coerenti vedi l'appendice A), e poiché stati coerenti diversi non sono mai ortogonali tra loro (A.5) risulta che le probabilità associate tramite la distribuzione di Husimi a due punti distinti, non rappresentano le probabilità di due eventi mutualmente esclusivi.

Per introdurre questa distribuzione abbiamo bisogno degli stati coerenti. Essi sono definiti come autostati dell'operatore di distruzione, e gli operatori di creazione \hat{a}^\dagger e distruzione \hat{a} formano una coppia irriducibile sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} degli operatori, questo significa che non esistono in \mathcal{H} sottoinsiemi invarianti per gli operatori tali che la loro chiusura sia sottoinsieme proprio di \mathcal{H} . Questa proprietà ci indica che ogni operatore \hat{F} in \mathcal{H} può essere scritto come funzione degli operatori di creazione e distruzione. Inoltre, usando la relazione di commutazione $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{1}$, possiamo riscrivere ogni prodotto di più operatori \hat{a} e \hat{a}^\dagger posti in qualsiasi ordine come somma di prodotti nei quali nessun operatore di distruzione compare a destra di un operatore di creazione. Questo ordinamento viene detto ordinamento anti-normale, vediamo un esempio che chiarifica quest'ultima affermazione:

$$\hat{a}^2(\hat{a})^\dagger\hat{a} = \hat{a}^2(\hat{a}\hat{a}^\dagger - [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]) = (\hat{a})^3\hat{a}^\dagger - \hat{a}^2 \quad (3.1)$$

Data quest'ultima proprietà possiamo sviluppare ogni operatore \hat{F} in questo modo:

$$\hat{F} = \sum_{n,m} f_{n,m} \hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^m \quad (3.2)$$

in cui $f_{n,m}$ sono coefficienti complessi.

Ora inserendo una relazione di completezza di stati coerenti tra i due operatori nella equazione (3.2) e ricordando che gli stati coerenti sono autostati di \hat{a} otteniamo:

$$\hat{F} = \int \frac{d^2z}{\pi} f(z, z^*) |z\rangle \langle z| \quad (3.3)$$

dove:

$$f(z, z^*) = \sum_{n,m} f_{n,m} z^n (z^*)^m \quad (3.4)$$

L'equazione (3.3) mostra una proprietà molto interessante degli stati coerenti e cioè che ogni operatore può sempre essere sviluppato in maniera diagonale su una base di stati coerenti, quindi ad ogni operatore \hat{F} possiamo associare una funzione $f(z)$ definita sui complessi e di conseguenza sullo spazio delle fasi (tramite la relazione (A.2))

Ora vediamo come da questa proprietà ricaviamo l'espressione della distribuzione di Husimi $\rho(z)$ che è quella funzione (associata a un operatore densità $\hat{\rho}$) che va integrata con la $f(z)$ per ottenere il valore medio di \hat{F} su uno stato fisico con matrice densità $\hat{\rho}$.

Calcoliamo dunque il valore medio di un operatore \hat{F} per una matrice densità $\hat{\rho}$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F} \rangle &= Tr(\hat{\rho} \hat{F}) = Tr(\hat{\rho} \int \frac{d^2z}{\pi} f(z, z^*) |z\rangle \langle z|) = \\ &= \int \frac{d^2\alpha d^2z}{\pi^2} f(z, z^*) \langle \alpha | \hat{\rho} | z \rangle \langle z | \alpha \rangle = \int d^2z f(z, z^*) \frac{\langle z | \hat{\rho} | z \rangle}{\pi} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Da quest'ultima equazione definiamo la distribuzione di Husimi $\rho_Q(z)$ relativa ad un operatore densità come valore di aspettazione di tale operatore calcolato sullo stato coerente $|z\rangle$ e diviso per π

$$\rho_Q(z) = \frac{1}{\pi} \langle z | \hat{\rho} | z \rangle \quad (3.6)$$

Ora potrebbe essere interessante vedere in che relazione stanno tra loro la distribuzione di Husimi e quella di Wigner, per fare ciò ricordiamo come

si calcola il valore medio di un'osservabile tramite la distribuzione di Husimi esprimendo tutto in funzione di p e q :

$$\langle \hat{F} \rangle = \int d^2z f(z, z^*) \rho_Q(z) \stackrel{(A.2)}{=} \int \frac{dpdq}{\hbar} f_Q(p, q) \rho_Q(p, q) \quad (3.7)$$

Notiamo che in questo caso la $f_Q(p, q)$ è la funzione che rappresenta lo sviluppo dell'operatore \hat{F} sulla base continua degli stati coerenti. Ora invece partendo dal valore medio calcolato con la distribuzione di Wigner ricaviamo che relazione c'è tra le due distribuzioni:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F} \rangle &= \int dpdq f_W(p, q) \rho_W(p, q) \stackrel{(2.9)}{=} \\ &= \int dpdq \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle q + y/2 | \hat{F} | q - y/2 \rangle \rho_W(p, q) \stackrel{(3.3)}{=} \\ &= \int dpdqdy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle q + y/2 | \left(\int \frac{d^2z'}{\pi} f_Q(z', z'^*) |z'\rangle \langle z'| \right) | q - y/2 \rangle \rho_W(p, q) \stackrel{(A.2)}{=} \\ &= \int dpdqdy \frac{dp'dq'}{\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}py} f_Q(p', q') \langle q + y/2 | z' \rangle \langle z' | q - y/2 \rangle \rho_W(p, q) = \\ &= \int \frac{dp'dq'}{\hbar} f_Q(p', q') \left(\int \frac{dpdqdy}{\pi} e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle q + y/2 | z' \rangle \langle z' | q - y/2 \rangle \rho_W(p, q) \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Confrontando l'ultima espressione della (3.8) con la (3.7) osserviamo che:

$$\rho_Q(p', q') = \int \frac{dpdqdy}{\pi} e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle q + y/2 | z' \rangle \langle z' | q - y/2 \rangle \rho_W(p, q) \quad (3.9)$$

Ora per ottenere un'espressione migliore si scrivono gli stati coerenti z' in funzione dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico come prescritto dalla formula (A.3) poi si utilizza la formula di Baker-Campbell-Hausdorff per separare gli esponenziali, a questo punto si utilizza l'espressione esplicita dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico nella base delle posizioni, si integra rispetto alla variabile y e si ottiene questa espressione:

$$\rho_Q(p', q') = \frac{2}{\pi} \int dpdq e^{-\frac{1}{\hbar}((q-q')^2 + (p-p')^2)} \rho_W(p, q) \quad (3.10)$$

Quindi vediamo che la distribuzione di Husimi si può ottenere da quella di Wigner integrando quest'ultima con una gaussiana bidimensionale di larghezza $\sigma = \sqrt{\hbar/2}$. Questa operazione può essere vista come un'operazione di smoothing della distribuzione di Wigner; infatti ogni punto della

distribuzione di Husimi è una media dei valori che la distribuzione di Wigner assume nell'intorno dello stesso punto, tale media è una media pesata e il peso decresce gaussianamente al crescere della distanza dal punto considerato. In particolare, poiché i punti con maggiore peso sono quelli che distano meno di σ dal punto iniziale in pratica l'area su cui si media la Wigner vale $\sigma^2 = \hbar/2$ che coincide con il valore minimo dell'indeterminazione in posizione e momento $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$.

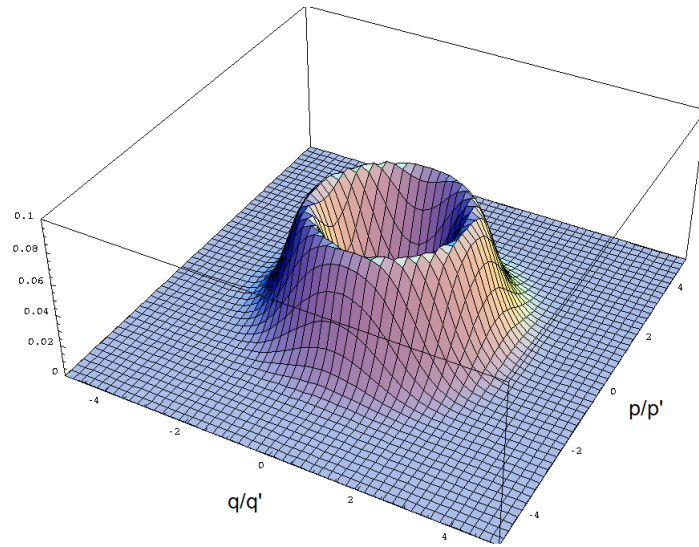


Figura 3.1: Distribuzione di Husimi per autostato con $n=3$ dell'oscillatore armonico, $q' = \sqrt{2\hbar/(m\omega)}$ $p' = \sqrt{2\hbar m\omega}$, per calcolarla si è utilizzata la formula A.6, si noti come questa distribuzione differisca in maniera significativa da quella di Wigner associata allo stesso stato (vedi figura 2.2)

Capitolo 4

Quantizzazione di Born-Jordan

Ora introduciamo a titolo esemplificativo un altro metodo di quantizzazione introdotto da Max Born e Pascual Jordan in un articolo del 1925 [BoJo] precedente all'introduzione della quantizzazione di Weyl. Questo metodo di quantizzazione non è però invertibile come quello di Weyl, ma risulta essere più utile ad esempio nelle analisi tempo-frequenza.

4.1 Quantizzazione di Born Jordan

Dalla regola di Born-Jordan per la quantizzazione dei monomi (1.4) prendiamo spunto per la quantizzazione di qualsiasi funzione. Come abbiamo visto per i monomi, la regola di Born-Jordan può essere vista come una media su $\tau \in [0, 1]$ di tutte le τ -quantizzazioni che avevamo definito per i monomi (1.5). Ora procederemo definendo una τ -quantizzazione generale, e definiremo la quantizzazione di Born-Jordan come integrale sull'intervallo $[0,1]$ delle τ -quantizzazioni. Per fare ciò troviamo innanzitutto gli elementi di matrice nella base delle posizioni per un operatore quantistico associato a una funzione classica tramite la regola di Weyl:

$$\langle q_2 | F_W | q_1 \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{ip}{\hbar}(q_2 - q_1)} f\left(\frac{q_2 + q_1}{2}, p\right) \quad (4.1)$$

Prendendo spunto da questo definiamo la τ -quantizzazione [Goss] di un operatore nella base delle posizioni:

$$\langle q_2 | F_\tau | q_1 \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{ip}{\hbar}(q_2 - q_1)} f((1 - \tau)q_2 + \tau q_1, p) \quad (4.2)$$

Notiamo che $F_W = F_{1/2}$ cioè come nel caso dei monomi la regola di Weyl si trova ponendo $\tau = 1/2$. Definiamo ora la quantizzazione di Born-Jordan per una funzione qualsiasi in questo modo:

$$F_{BJ} = \int_0^1 d\tau F_\tau \quad (4.3)$$

O in maniera più esplicita:

$$\langle q_2 | F_{BJ} | q_1 \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{ip}{\hbar}(q_2 - q_1)} \int_0^1 d\tau f((1 - \tau)q_2 + \tau q_1, p) \quad (4.4)$$

Essendo quella delle posizioni una base dello spazio di Hilbert un operatore è ben definito sapendo la sua espressione in questa base.

Appendice A

Stati coerenti

Gli stati coerenti furono introdotti per la prima volta da Erwin Schrödinger nello studio dell'oscillatore armonico nel 1926 [Schrö]. Schrödinger si rese conto che questi stati, sovrapposizione di autostati dell'oscillatore armonico, avevano delle caratteristiche interessanti perché si comportavano come stati *quasi classici*, infatti ad esempio, l'energia media calcolata su tali stati corrisponde al valore classico, e le medie di posizione ed impulso hanno forme oscillatorie in relazione di fase costante. Inoltre essi hanno la caratteristica di essere stati gaussiani di minima indeterminazione e di restare tali anche a seguito di evoluzione temporale. Il nome *stato coerente* apparì per la prima volta in alcuni lavori di R.J. Glauber del 1963 [Glaub] in cui venivano utilizzati nello studio dell'elettrodinamica quantistica. Essi sono uno strumento molto utile per trattare la meccanica quantistica nello spazio delle fasi perché sono in corrispondenza uno a uno con lo spazio delle fasi classico.

Sono definiti come autostati dell'operatore di distruzione $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{Q} + i\hat{P})$ noto dalla trattazione quantistica dell'oscillatore armonico (in questo caso \hat{Q} e \hat{P} sono gli operatori posizione e impulso riscalati assorbendo le costanti ω e m dell'oscillatore armonico). Si dimostra che lo spettro è continuo e $\forall z \in \mathcal{C} \exists |z\rangle$ tale che:

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle \tag{A.1}$$

Se io definisco $p, q \in \mathcal{R}$ tramite questa relazione:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q + ip) \tag{A.2}$$

Allora si dimostra che: $\langle z|\hat{P}|z\rangle = p$ e $\langle z|\hat{Q}|z\rangle = q$ quindi si può pensare all'autovalore z come a ciò che mi rappresenta sul piano complesso il valore medio di posizione e impulso. Si vede quindi che c'è una corrispondenza

biunivoca tra gli stati coerenti e lo spazio delle fasi. Risolvendo l'equazione agli autovalori (A.1) oppure con metodi algebrici si trova che:

$$|z\rangle = e^{(-|z|^2/2)} e^{z\hat{a}^\dagger} |0\rangle = e^{z\hat{a}^\dagger - z^* \hat{a}} |0\rangle = \hat{W}(-q/\hbar, p/\hbar) |0\rangle \quad (\text{A.3})$$

In cui \hat{W} è l'operatore di Weyl e $|0\rangle$ è lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico, o più in generale l'autostato con autovalore nullo dell'operatore numero.

Una proprietà interessante degli stati coerenti è quella di costituire un sistema più che completo di vettori nello spazio di Hilbert **[BBGK]**, la risoluzione dell'identità associata è:

$$\mathbb{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2z |z\rangle \langle z| \quad (\text{A.4})$$

in cui $d^2z = dpdq/(2\hbar)$.

Il sistema di stati coerenti è più che completo infatti ha la cardinalità del continuo e due stati coerenti non sono mai tra loro ortogonali:

$$\langle z|w\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} - \frac{|w|^2}{2} + \bar{z}w\right) \quad (\text{A.5})$$

Un'altra espressione che può venirci utile è la probabilità di occupazione dell'autostato $|n\rangle$ dell'operatore numero in uno stato coerente $|z\rangle$:

$$P_n = |\langle n|z\rangle|^2 = \frac{1}{n!} |z|^{2n} e^{-|z|^2} \quad (\text{A.6})$$

Appendice B

Operatori di Hilbert-Schmidt

Un operatore limitato $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è detto di Hilbert-Schmidt se vale:

$$\text{Tr}(A^\dagger A) = \sum_n \langle u_n | A^\dagger A | u_n \rangle < +\infty \quad (\text{B.1})$$

Con $\{u_n\}$ SONC in \mathcal{H} . Si dimostra **[ReSi]** che questa definizione non dipende dalla scelta della base ed è dunque ben posta.

Lo spazio così definito è normato, con norma:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(A^\dagger A)} \quad (\text{B.2})$$

ed è completo rispetto a questa norma, inoltre è anche uno spazio di Hilbert con prodotto interno:

$$(A, B) = \text{Tr}(A^\dagger B) \quad (\text{B.3})$$

Lo spazio di operatori di Hilbert-Schmidt è un ideale bilatero dello spazio degli operatori limitati, cioè dati $A \in HS(\mathcal{H})$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si ha che:

$$AB \in HS(\mathcal{H}) \quad BA \in HS(\mathcal{H}) \quad (\text{B.4})$$

Un'altra proprietà utile di questi operatori è che il prodotto di due operatori di Hilbert-Schmidt è un operatore di classe traccia, lo spazio degli operatori di classe traccia è indicato con $\mathcal{T}(\mathcal{H}) \subseteq HS(\mathcal{H})$ e è definito in questo modo:

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{Tr}|A| < \infty\}$$

con

$$|A| = \sqrt{A^\dagger A} \quad (\text{B.5})$$

Anche $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ è uno spazio normato e è un'ideale bilatero sia di $HS(\mathcal{H})$ sia di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Gli operatori densità della meccanica quantistica sono operatori di classe traccia e questo permette di calcolare il valore di aspettazione di qualsiasi operatore limitato, e in particolare di qualsiasi operatore di Hilbert-Schmidt. Un'altra proprietà interessante dello spazio $HS(\mathcal{H})$ è che esso con l'usuale operazione di composizione costituisce un'algebra. Più in particolare costituisce un' \mathcal{H}^* -algebra, cioè è dotato di un'involuzione che in questo caso è l'aggiunzione per cui dati $A, B \in HS(\mathcal{H})$ vale:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \tag{B.6}$$

Bibliografia

- [Bac] A.Backer, R.Shubert *Chaotic eigenfunctions in momentum space*, J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) 4795.
- [BBGK] V.Bargmann, P.Butera, L.Girardello, J.R.Klauder *On the completeness of the coherent states*, Rep. Math. Phys. **2** (1971) 221.
- [BoJo] M.Born, P.Jordan *Zur Quantenmechanik*, Z. Physik **34** (1925) 858.
- [DaSp] J.P.Dahl, M.Springborg, *Wigner's phase space function and atomic structure, I. The hydrogen atom ground state*, Mol. Phys. **47**(5) (1982) 1001.
- [Gla] R.J.Glauber, *Coherent and incoherent states of radiation field*, Phys. Rev. **131** (1963) 2766.
- [Goss] M.A.de Gosson, *Born–Jordan Quantization and the Equivalence of the Schroedinger and Heisenberg Pictures*, Found. Phys. **44**(10)(2014) 1096.
- [Gros] A. Grossmann, *Parity Operator and Quantization of δ -functions*, Commun. Math. Phys. **48** (1976) 191.
- [Hus] K.Husimi, *Some Formal Properties of the Density Matrix*, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn. **22** (1940) 264.
- [Mol] L.G.Molinari, Tesi di laurea: *La Corrispondenza di Weyl*, 1982.
- [Moy] J.E.Moyal, *Quantum Mechanics as a Statistical Theory*, Cambridge Phyl. Soc. **45** (1949).
- [Pool] J.C.T.Pool, *Mathematical Aspects of the Weyl Correspondence*, J. Math. Phys. **7** (1966) 66.
- [ReSi] M.Reed, B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Functional Analysis*, Academic Press, 1980.

- [**Schrö**] E.Schrödinger, *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik*, *Naturwissenschaften* **14** (1926) 664.
- [**We**] H.Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover (1927).
- [**Wig**] E.Wigner, *On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium*, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.
- [**ZFC**] C.K.Zachos, D.B.Fairlie, T.L.Curtright, *Quantum Mechanics in Phase Space*, World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd., 2005.