UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Le equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff e di Lane-Emden nelle teorie di gravita‘ di Einstein e Killing Conforme

Relatore:
Prof. Luca Guido Molinari
Correlatore:
Dott. Carlo Alberto Mantica

Tesi di Laurea di:
Bruno Trezzi
Matricola 06997A

Anno accademico 2023/2024

Indice

Abstract **1**

1 Introduzione **2**

2 Equazioni Tolman-Oppenheimer-Volkoff in Relatività Generale **3**
2.1 Storia 3
2.2 Dimostrazione dell'equazione 3

3 Approccio Covariante **6**
3.1 Una Breve Introduzione 6
3.2 Espressioni 6
3.2.1 Caso n dimensionale 6
3.2.2 Caso quadridimensionale 7
3.3 Equazioni di campo in approccio covariante 8
3.4 TOV in approccio covariante 8

4 Equazione Lane-Emden estesa in relatività generale **10**
4.1 Storia 10
4.2 Dimostrazione dell'equazione estesa in approccio covariante 10
4.3 Limite Newtoniano per l'estensione 12
4.4 Limite di Chandrasekhar 15
4.4.1 Introduzione 15
4.4.2 Derivazione del limite 15

5 Conformal Killing Gravity **18**
5.1 Una Breve Introduzione 18
5.2 Equazioni di Harada 19
5.3 Conformal Killing gravity in uno spazio tempo statico sfericamente simmetrico 20
5.3.1 Equazioni di campo 20
5.3.2 Soluzione di vuoto 22
5.4 Equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff in CKG 23

6 Estensione dell'equazione Lane-Emden in CKG **25**
6.1 Dimostrazione dell'estensione 25
6.2 Limite Newtoniano 29

7 Conclusioni **31**

Bibliography **31**

A Appendice A: Indice politropico **35**

B Appendice B: Soluzione di vuoto generale **38**

Abstract

This thesis explores the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) and Lane-Emden equations in two different gravitational theories: general relativity and Conformal Killing Gravity. Initially, the equations are analyzed in general relativity and its Newtonian limit, before extending them to Conformal Killing Gravity. The TOV equation describes the hydrostatic equilibrium of objects such as neutron stars, while the Lane-Emden equation models the structure of stars in the Newtonian context and is essential for understanding white dwarfs. A covariant approach proposed by Mantica and Molinari is presented, which allows for the derivation of the TOV equation more efficiently, offering advantages in dealing with static and spherically symmetric spacetimes. Subsequently, the Lane-Emden equation is extended in general relativity, and its Newtonian limit is recovered. Finally, the extension of these equations in Conformal Killing Gravity is examined, revealing that the Newtonian limit of Lane-Emden cannot be recovered without constraints on the parameters of the theory, raising questions about the dependence of these parameters on cosmological parameters.

1 Introduzione

In questa tesi verranno trattate le equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff e Lane-Emden in due differenti teorie gravitazionali. In primo luogo verranno mostrate in relatività generale e nel suo limite newtoniano, successivamente si ricaveranno in Conformal Killing Gravity.
L'equazione Tolman-Oppenheimer-Volkoff descrive l'equilibrio idrostatico di un corpo, come una stella compatta, in uno spazio tempo sfericamente simmetrico. Questa equazione collega la pressione interna alla densità e alla massa della stella, tenendo conto della relatività generale, ed è utilizzata per modellizzare oggetti come stelle di neutroni.
L'equazione Lane-Emden costituisce una formulazione del problema dell'equilibrio idrostatico in un contesto newtoniano e descrive la struttura delle stelle studiandone la distribuzione della densità. Questa equazione è quindi fondamentale per la modellizzazione delle nane bianche, poiché permette di analizzare la distribuzione della materia nelle stelle in base alla loro densità e alle loro proprietà termiche.
Nel secondo capitolo si presenta dunque l'equazione di Tolmann-Oppenheimer-Volkoff in relatività generale e un possibile metodo per ricavarla.
Nel terzo capitolo si mostra l'approccio covariante presentato da Mantica e Molinari in [1] per trattare teorie gravitazionali e lo si utilizza per ottenere l'equazione TOV, mostrandone i vantaggi che hanno portato a scegliere questo approccio nei capitoli successivi.
Nel quarto capitolo si ricava l'equazione Lane-Emden estesa in relatività generale e se ne trova il limite Newtoniano così da ottenere l'equazione originale. Dell'equazione Lane-Emden vengono poi presentate le soluzioni analitiche e successivamente viene ricavato il limite di Chandrasekhar per la massa delle nane bianche. Nel quinto capitolo si presenta la Conformal Killing Gravity, teoria sviluppata da Harada per poter descrivere l'inflazione cosmica senza dover imporre la costante cosmologica nelle equazioni di Einstein. Di questa teoria si calcolano le soluzioni di vuoto e l'estensione dell'equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff. In questo caso l'approccio covariante consente di ottenere equazioni di campo del secondo ordine invece che del terzo come nell'approccio per componenti.
Nel sesto capitolo viene calcolata l'estensione dell'equazione Lane-Emden in Conformal Killing Gravity e ne viene mostrata la soluzione analitica nel caso $n = 0$. Successivamente si calcola il limite newtoniano di questa equazione scoprendo che per ottenerlo è necessario imporre dei vincoli sui parametri della teoria.

2 Equazioni Tolman-Oppenheimer-Volkoff in Relatività Generale

2.1 Storia

L'Equazione Tolman-Oppenheimer-Volkoff (da qui in poi TOV) è stata presentata per la prima volta da J. Robert Oppenheimer e George Volkoff nel loro articolo del 1939: "On Massive Neutron Core" [2]. In questo articolo i due autori utilizzarono l'equazione di stato dei gas di Fermi di neutroni per calcolare il limite superiore di ˜0,7 masse solari per la massa gravitazionale di una stella di neurtroni. Il lavoro di Oppenheimer e Volkoff si è basato su due articoli di Richard C. Tolman dei quali il primo è del 1934 dal titolo: "Effect of Inhomogeneity on cosmological models" [3] e il secondo è del 1939 dal titolo: "Static Solution of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid" [4].

Le equazioni qui presentate collegano la pressione di un fluido perfetto, in uno spazio-tempo sfericamente simmetrico, alla massa e alla desnsità di massa.
Se viene, inoltre, fornita anche un'equazione di stato $F(\mu, P) = 0$, che lega la densità, μ, alla pressione, P, l'equazione TOV descrive la struttura interna di un corpo sfericamente simmetrico di materia isotropa in equilibrio.
Se la materia riempie una sfera con area superficiale $4\pi R^2$, il vuoto esterno è descritto dalla soluzione di Schwarzschild, con la massa della stella $m(R) = M$ come unico parametro. Questa è una conseguenza del teorema di Birkhoff (1923): le soluzioni di vuoto sfericamente simmetriche delle equazioni di Einstein sono statiche.

2.2 Dimostrazione dell'equazione

Oppenheimer e Volkoff partirono da dalla più generale forma di una metrica che ha simmetria sferica

$$ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2(\theta)d\phi^2 \tag{2.1}$$

$$\lambda = \lambda(r) \;\; \& \;\; \nu = \nu(r)$$

Se la materia è un fluido perfetto isotropo, cioè presenta solo pressione e densità, allora il suo tensore energia momento si può scrivere come:

$$T_{ab} = (\mu + P)u_a u_b + P g_{ab} \tag{2.2}$$

con μ che è la densità di materia e P che è la pressione.
Date le equazioni di Einstein [1]:

$$G_{ab} = \kappa_G T_{ab} \tag{2.3}$$

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$$

Se ci si pone nel comoving frame, cioè $u^a = (1, 0, 0, 0)$, le componenti non nulle dell'equazione di Einstein sono [2] [3]

$$T_{11} = e^{-\lambda}(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}) - \frac{1}{r^2}$$

$$T_{22} = T_{33} = e^{-\lambda}(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}) \tag{2.4}$$

$$T_{00} = -e^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}) - \frac{1}{r^2}$$

Quindi esplicitanto il tensore energia momento T le equazioni diventano

$$P = e^{-\lambda}(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}) - \frac{1}{r^2}$$

$$P = e^{-\lambda}(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}) \tag{2.5}$$

$$\mu = e^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2}$$

Si può notare quindi che se si prende la prima equazione, la si eguaglia con la seconda e si moltiplica il risultato per $\frac{2}{r}$ si ottiene

$$e^{-\lambda}(\frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2} - \frac{2}{r^3}) - e^{-\lambda}\lambda'(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}) + \frac{2}{r^3} + e^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r})\frac{\nu'}{2} = 0$$

confrontandola con le equazioni (2.5) si nota che

$$\frac{dP}{dr} + (\mu + P)\frac{\nu'}{2} = 0 \tag{2.6}$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto anche calcolado $\nabla_a T^{ab}$
Il sistema risulterà perciò di tre equazioni indipendenti:

$$\mu = e^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2}$$

$$P = e^{-\lambda}(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}) - \frac{1}{r^2} \tag{2.7}$$

[1] κ_G è poi posto poi =1
[2] il primato indica una derivata rispetto alla variabile radiale.
[3] i conti espliciti a meno di un segno si trovano in[5]

$$\frac{dP}{dr} = -(\mu + P)\frac{\nu'}{2}$$

Queste equazioni con l'aggiunta di un equazione di stato $F(\mu, P) = 0$ formano un sistema chiuso che determina l'equilibrio termodinamico. Oppenheimer e Volkoff i [2] sono stati in grando di ricavare l'equazione TOV partendo proprio dalla prima equazione del sistema (2.7), infatti integrandola si ottiene:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \tag{2.8}$$

quindi

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \mu \tag{2.9}$$

che è la prima equazione riscritta.
Esplicitando ν' dalla terza equazione del sistema (2.7) e sostituendo sia esso che $e^{-\lambda}$ nella seconda otteniamo:

$$\frac{dP}{dr}\left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right] = -\frac{P+\mu}{2}\left[rP + \frac{2m(r)}{r^2}\right] \tag{2.10}$$

Che è l'equazione Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

Applicazione

Un'importante applicazione deriva dall'astrofisica infatti se all'equazione TOV si aggiunge una equazione di stato, $F(\mu, P) = 0$, e considera l'equazione (2.9) queste vanno a formare un sistema chiuso che determina l'equilibrio termodinamico e possono essere utilizzate per calcolare la metrica interna di un corpo confinato di raggio $r = R$.
Oppenheimer e Volkoff in [2] supposero il vuoto come metrica esterna, quindi per $r > R$, si utilizzala metrica di Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r}\right]dt^2 + \left[1 - \frac{2M}{r}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \tag{2.11}$$

Con M la massa totale del corpo. Come condizioni di giunzione tra le due metriche, gli autori, imposero la continuità della metrica sul bordo $r = R$ e che la pressione al bordo si annullasse. Le condizioni di giunzione sono perciò:

$$1 - \frac{2M}{R} = 1 - \frac{2m(R)}{R} \tag{2.12}$$

$$1 - \frac{2M}{R} = e^{\nu(R)} \tag{2.13}$$

$$P(R) = 0 \tag{2.14}$$

3 Approccio Covariante

3.1 Una Breve Introduzione

In "The covariant approach to static spacetimes in Einstein and extended gravity theories" [1] Carlo A. Mantica e Luca G. Molinari hanno studiato gli spazi tempo statici con un approccio covariante ottenendo le soluzioni di teorie gravitazionali. Esprimendo i Tensori delle teorie su una base formata dalle quadri-velocità e dalle quadri-accelerazioni gli autori hanno ottenuto un sistema di equazioni scalari, cioè indipendenti dalla parametrizzazione scelta, non ridondanti. In simmetria sferica, hanno calcolato, tra le altre, le espressioni esplicite dei tensori di Ricci e Weyl. Semplici restrizioni sui coefficienti forniscono soluzioni note e nuove in Relatività generale, Teorie f(R), Cotton gravity e Conformal gravity, sia in vuoto che con sorgente di fluido. Uno dei vantaggi di questo approccio è che le equazioni ottenute sono scalari e di primo o secondo ordine nella metrica, perciò relativamente semplici da risolvere

3.2 Espressioni

3.2.1 Caso n dimensionale

Si riportano qui di seguito le formule ricavate da Mantica e Molinari riportate in appendice 1 dell'articolo citato in [1].

Partendo dalla metrica di uno spazio statico sfericamente simmetrico:

$$ds^2 = -b^2(r)dt^2 + f_1^2(r)dr^2 + f_2^2(r)d\Omega_{n-2}^2 \tag{3.1}$$

Il tensore di Ricci (R_{kl}), è la somma di un termine di fluido perfetto ed un tensore a traccia nulla, quindi ha forma esplicita [1]:

$$R_{kl} = \frac{R + n\nabla_p \dot{u}^p}{n-1} u_k u_l + \frac{R + \nabla_p \dot{u}^p}{n-1} g_{kl} + \Sigma(r) \left[\frac{\dot{u}_k \dot{u}_l}{\eta} - \frac{u_k u_l + g_{kl}}{n-1} \right] \tag{3.2}$$

$$\Sigma(r) = \nabla_p \dot{u}^p - (n-1)\left(\eta + \frac{\dot{u}^p \nabla_p \eta}{2\eta}\right) - (n-2)E(r).$$

Con R la traccia di R_{kl}, $\nabla_p \dot{u}^p$ la quadri-divergenza dell'accelerazione e $\eta = \frac{b'}{bf_1}^2$.
In generale u^l è un autovettore del tensore di Ricci di tipo tempo ma con la simmetria

[1] N.B. n è la dimensione dello spaziotempo

sferica anche $\dot{u}^l = u_j \nabla^j u^l$ è un autovettore di R_{kl} di tipo spazio con le proprietà [6]:

$$\nabla_j u_l = -u_j \dot{u}_l \qquad\qquad \nabla_j \dot{u}_l = \nabla_l \dot{u}_j \tag{3.3}$$

Inoltre ponendoci nel comoving frame u^l ha solo componente temporale e $\dot{u}^l$ ha componente solo radiale [7].

Il Tensore elettrico E_{kl} è un tensore

$$E_{kl} = E(r)\left[\frac{\dot{u}_k \dot{u}_l}{\eta} - \frac{u_k u_l + g_{kl}}{n-1}\right] \tag{3.4}$$
$$E(r) = \frac{n-3}{n-2}\frac{1}{f_1^2}\left[\frac{f_1^2}{f_2^2} + \frac{f_2''}{f_2} - \frac{f_2'^2}{f_2^2} - \frac{f_1' f_2'}{f_1 f_2} + \frac{b' f_1'}{b f_1} + \frac{b' f_2'}{b f_2} - \frac{b''}{b}\right]$$

$$\nabla_p \dot{u}^p = \frac{1}{b f_1^2}\left[b'' - b'\frac{d}{dr}\log(f_1 f_2) + (n-1)b'\frac{f_2'}{f_2}\right] \tag{3.5}$$
$$\frac{\dot{u}^p \nabla_p \eta}{2\eta} = \frac{1}{f_1}\frac{d}{dr}\frac{b'}{f_1 b} \tag{3.6}$$

Lo scalare $\Sigma(r)$ è:

$$\Sigma(r) = -\frac{1}{f_1^2}\left[\frac{b''}{b} - \frac{b' f_1'}{b f_1} - \frac{b' f_2'}{b f_2}\right] - \frac{n-3}{f_1^2}\left[\frac{f_1^2}{f_2^2} + \frac{f_2''}{f_2} - \frac{f_2'^2}{f_2^2} - \frac{f_1' f_2'}{f_1 f_2}\right]. \tag{3.7}$$

E le curvature scalari dello spazio-tempo e dello spazio sono:

$$R = R^\star - 2\nabla_p \dot{u}^p \tag{3.8}$$
$$R^\star = \frac{(n-2)(n-3)}{f_2^2} - \frac{n-2}{f_1^2}\left[2\frac{f_2''}{f_2} - 2\frac{f_1' f_2'}{f_1 f_2} + (n-3)\frac{f_2'^2}{f_2^2}\right] \tag{3.9}$$

3.2.2 Caso quadridimensionale

Se lo spaziotempo è quadri-dimensionale $n = 4$ le equazioni sopra presentate diventano:

$$R_{kl} = \frac{R + 4\nabla_p \dot{u}^p}{3} u_k u_l + \frac{R + \nabla_p \dot{u}^p}{3} g_{kl} + \Sigma(r)\left[\frac{\dot{u}_k \dot{u}_l}{\eta} - \frac{u_k u_l + g_{kl}}{3}\right] \tag{3.10}$$
$$\Sigma(r) = -\frac{1}{f_1^2}\left[\frac{b''}{b} - \frac{b' f_1'}{b f_1} - \frac{b' f_2'}{b f_2}\right] - \frac{1}{f_1^2}\left[\frac{f_1^2}{f_2^2} + \frac{f_2''}{f_2} - \frac{f_2'^2}{f_2^2} - \frac{f_1' f_2'}{f_1 f_2}\right].$$
$$\nabla_p \dot{u}^p = \frac{1}{b f_1^2}\left[b'' - b'\frac{d}{dr}\log(f_1 f_2) + 3b'\frac{f_2'}{f_2}\right]$$
$$R = R^\star - 2\nabla_p \dot{u}^p$$
$$R^\star = \frac{2}{f_2^2} - \frac{2}{f_1^2}\left[2\frac{f_2''}{f_2} - 2\frac{f_1' f_2'}{f_1 f_2} + (1)\frac{f_2'^2}{f_2^2}\right]$$

3.3 Equazioni di campo in approccio covariante

Dopo aver ottenuto la forma esplicita per $R^\star$, Σ e $\nabla_p \dot{u}^p$ siamo in posizione di ricavare le equazioni di campo, infatti riprendendo (2.3), imponendo $f_2 = r$ e conoscendo il tensore T (vedi [8] sezione III)

$$T_{kl} = (\mu + P)u_k u_l + P g_{kl} + (p_r - p_\perp)\left[\frac{\dot{u}_k \dot{u}_l}{\eta} - \frac{g_{kl} + u_k u_l}{3}\right] \tag{3.11}$$

con μ densità di massa, p_r pressione radiale, $p_\perp$ pressione trasversale e $P = \frac{1}{3}p_r + \frac{2}{3}p_\perp$ pressione effettiva.
Si sostituisce ottenendo

$$\frac{1}{2}R^\star = \mu$$

$$\nabla_p \dot{u}^p = \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}\mu$$

$$\Sigma = (p_r - p_\perp)$$

Ma un fluido di materia ordinaria è supposto isotropo (2.2), cioè $p_r = p_\perp =: p$ quindi:

$$\frac{1}{2}R^\star = \mu \tag{3.12}$$

$$\nabla_p \dot{u}^p = \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}\mu \tag{3.13}$$

$$\Sigma = 0 \tag{3.14}$$

Inoltre possiamo considerare l'equazione di continuità $\nabla^k T_{kj} = 0$ per un fluido perfetto e ottenere:

$$\frac{p'}{p + \mu} = -\frac{b'}{b} \tag{3.15}$$

3.4 TOV in approccio covariante

Come mostrato da Mantica e Molinari in [7] è possibile ricavare l'Equazione TOV in approccio covariante

Infatti prendendo come metrica interna:

$$ds^2 = -b_-(r)^2 dt^2 + \left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{3.16}$$

Per cui $R^\star$, Σ e $\nabla_p \dot{u}^p$ diventano [2]

$$R^\star = \frac{4M'}{r^2} \tag{3.17}$$

$$\Sigma = -\left[\frac{b''}{b} - \frac{b'}{br}\right]\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] + \frac{b'}{b}\left[\frac{M'r - M}{r^2}\right] - \frac{3M - rM'}{r^3} \tag{3.18}$$

$$\nabla_p \dot{u}^p = \left[\frac{b''}{b} + 2\frac{b'}{br}\right]\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] - \frac{b'}{b}\left[\frac{M'r - M}{r^2}\right] \tag{3.19}$$

quindi si può ricavre $\Sigma + \nabla_p \dot{u}^p - \frac{R^\star}{4}$

$$\nabla_p \dot{u}^p + \Sigma - \frac{R^\star}{4} = \frac{3b'}{br}\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] - \frac{3M(r)}{r^3} \tag{3.20}$$

Facendo analogamente con (3.12), (3.13) e (3.14) e eguagliando si giunge a

$$\frac{3b'}{br}\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] - \frac{3M(r)}{r^3} = \frac{3}{2}p \tag{3.21}$$

Da cui sostituendo la (3.15) e riarrangiando i termini si può scrivere la TOV (2.10) come

$$\frac{dp}{dr}\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] = -\frac{p+\mu}{2}\left[rp + \frac{2M(r)}{r^2}\right] \tag{3.22}$$

che si accompagna a $\frac{dM(r)}{dr} = \frac{1}{2}r^2\mu$ la quale si ricava da $R^\star$

[2] si tenga conto che f_1^2 si puo' dimostrare essere $\left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]$ in modo analogo al caso per componenti

4 Equazione Lane-Emden estesa in relatività generale

4.1 Storia

L'equazione di Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)+\theta^n=0$$

venne proposta per la prima volta da Robert Emden nel 1907 in "Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme" [9], articolo in cui si studiava l'equazione di stato politropica applicata a corpi celesti. Questo lavoro si basò su un articolo precedente di Homer Lane in "On the Theoretical Temperature of the Sun" [10].
Questa equazione venne successivamente studiata da svariati autori, come ad esempio Chandrasekhar in "An Introduction to the Study of Stellar Structure" [11], che calcolarono le soluzioni analitiche per i casi $n = 0, 1, 5$.
Nel 1964 Robert Tooper, nel suo artcolo dal titolo "General Relativistic Polytropic Fluid Sphere" [12], ricavò un'estensione dell'equazione Lane-Emden valida in Relatività Generale.

4.2 Dimostrazione dell'equazione estesa in approccio covariante

Per dimostrare l'estensione dell'equazione si parte scrivendo la metrica interna nella forma (3.16), mentre come metrica esterna si considera quella di Schwarzschild. Si utilizzano quindi le equazioni di campo scritte nella forma (3.17), (3.18) e (3.19) e l'equazione di continuità (3.15).
Introduciamo quindi l'equazione di stato politropica come in [12]

$$p_m = K\mu_m^{1+\frac{1}{n}} \tag{4.1}$$

dove K e n sono costanti reali, n viene definito "indice politropico" ed è una costante fisica, invece K è determinato dallle caratteristiche termiche delle sfere di fluido.
Si introduce inoltre un funzione $\theta(r)$ che lega la densità di materia alla densità del centro del corpo oggetto di studio[1].

$$\mu_m = \mu_m^0\theta^n \tag{4.2}$$

[1] p_m, μ_m e θ sono funzioni del raggio r

Sostituendo (4.2) in (4.1) si ottiene [2]

$$p_m = K(\mu_m^0)^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1} \tag{4.3}$$

$$p_m' = K(\mu_m^0)^{1+\frac{1}{n}}\theta'\theta^n(n+1) \tag{4.4}$$

Si definisce quindi

$$p_m^0 = K(\mu_m^0)^{1+\frac{1}{n}} \tag{4.5}$$

Si può procedere ora a sostituire (4.2), (4.3) e (4.4) in (3.15)

$$\frac{b'}{b} = -\frac{K(\mu_m^0)^{\frac{1}{n}}\theta'(n+1)}{K(\mu_m^0)^{\frac{1}{n}}\theta + 1} \tag{4.6}$$

Chiamando $\sigma = K(\mu_m^0)^{\frac{1}{n}}$ si giunge a

$$\frac{b'}{b} = -\frac{\sigma\theta'(n+1)}{\sigma\theta + 1} \tag{4.7}$$

che può essere integrata (anche se solo formalmente) per ottenere

$$b = C(\sigma\theta + 1)^{-(n+1)} \tag{4.8}$$

Per determinare C bisogna imporre la continuità della metrica, cioè $b_-(R) = b_+(R)$, dove b_- è l'equazione trovata e b_+ è il termine corrispondente della metrica di Schwarzschild.
Si noti inoltre che $\sigma = \frac{p_m^0}{\mu_m^0}$.
Si possono quindi sommare (3.18), (3.19) e (3.17) moltiplicata per $\frac{1}{2}$, ottenendo

$$\Sigma + \nabla_p \dot{u}^p + \frac{R^\star}{2} = 3\frac{b'}{br}\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] - \frac{3M(r)}{r^3} + \frac{3M'(r)}{r^2} \tag{4.9}$$

e analogamente sommando (3.14), (3.13) e (3.12) [3]

$$\Sigma + \nabla_p \dot{u}^p + \frac{R^\star}{2} = \frac{3}{2}(p_m + \mu_m) \tag{4.10}$$

Uguagliando le due equazioni sopra e sostituendo (4.7), (4.2) e (4.3) si trova

$$-\frac{\sigma\theta'(n+1)}{r(\sigma\theta+1)}\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] - \frac{M(r)}{r^3} + \frac{M'(r)}{r^2} - \frac{1}{2}\theta^n\mu_m^0(\sigma\theta + 1) = 0 \tag{4.11}$$

Inoltre uguagliando la (3.17), divisa per due, alla (3.12) e sostituendo (4.2) si ottiene

$$M'(r) = \frac{1}{2}r^2\mu_m^0\theta^n \tag{4.12}$$

Allora cambiando di segno (4.11), moltiplicando per r^2 e sostituendo (4.12)

$$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma\theta+1}r\theta'\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] + \frac{M(r)}{r} + M'(r)\sigma\theta = 0 \tag{4.13}$$

Le equazioni (4.12) e (4.13) sono le stesse che si trovano in [12]

[2] μ_m^0 è elevato alla $1 + \frac{1}{n}$
[3] $\mu = \mu_m$ e $p = p_m$

4.3 Limite Newtoniano per l'estensione

Prima di procedere a trovare il limite bisogna fare un cambio di variabile per rendere adimensionali tutte le grandezze presenti

$$r = \frac{\xi}{A} \qquad v(\xi) = 2\frac{A^3 M(r)}{\mu_{m^0}} \tag{4.14}$$
$$v'(\xi) = \frac{2A^2 M'(r)}{\mu_{m^0}} \qquad A = \left[\frac{1}{2}\frac{\mu_{m^0}}{(n+1)\sigma}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Quindi (4.12) e (4.13) diventano

$$\xi^2\theta' \frac{1 - 2\sigma(n+1)v/\xi}{1+\sigma\theta} + v + \sigma\xi\theta\frac{dv}{d\xi} = 0 \tag{4.15}$$
$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2\theta^n \tag{4.16}$$

il sistema si può ridurre all'equazione di Lane-Emden estesa in relatività generale [12] e per risolverlo si impongono le condizioni al contorno

$$\theta(0) = 1 \qquad v(0) = 0$$

Per ottenere l'equazione di Lane-Emden bisogna trovare il limite newtoniano, cioè $\sigma \to 0$, quindi le due equazioni si riducono a

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta^n = 0 \tag{4.17}$$

Questa equazione, (4.17), può essere risolta imponendo le condizioni al contorno cioè

$$\theta(0) = 1, \qquad \theta'(0) = 0$$

La prima condizione implica che la funzione densità di massa μ_m si riduca per $r = 0$ alla densità di massa del centro μ_m^0. La seconda che la derivata della pressione p'_m nell'origine si annulli.
Vengono qui riportate da [11] le soluzioni analitiche per $n = 0, 1, 5$ (i grafici di queste soluzioni sono riportati alla fine del paragrafo.)

$$\begin{cases} \theta = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 & n = 0 \\ \theta = \frac{\sin\xi}{\xi} & n = 1 \\ \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2/3}} & n = 5 \end{cases} \tag{4.18}$$

La soluzione per $n = 0$ è la soluzione di densità uniforme per una sfera di fluido incomprimibile.
L'indice politropico $n = 1, 5$ fornisce una buona approssimazione per nane bianche a bassa densità, in accordo con l'equazione di stato per materia degenere non relativistica e per gas monoatomici ideali [13].

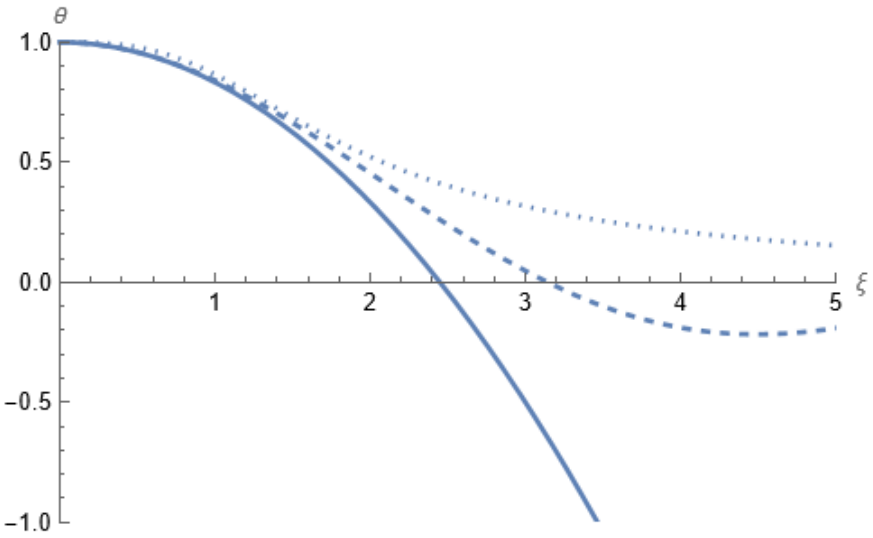


Figura 4.1: Soluzioni analitiche dell'equazione Lane-Emden: $n = 0$ linea piena, $n = 1$ linea tratteggiata, $n = 5$ linea punteggiata

L'indice politropico $n = 3$ è utilizzato per modellizzare le stelle della sequenza principale come il Sole, almeno nella zona radiativa (vedi modello standard di Eddington della struttura stellare) [11]. n=3 è utilizzato, inoltre, come modello per i nuclei delle nane bianche, secondo l'equazione di stato della materia degenere relativistica [13].
L'indice politropico $n = 5$ è associato ad un oggetto raggio infinito ma con massa finita e fu studiato per la prima volta da Arthur Schuster nel 1883 [11].
Il caso $n \to \infty$ corrisponde ad una sfera isotermica di gas in equilibrio[4].

Massa in funzione del raggio

Integrando l'equazione (3.17), nel limite Newtoniano, si può trovare quale sia l'andamento della massa al variare del raggio adimensionale. Si ottiene dunque

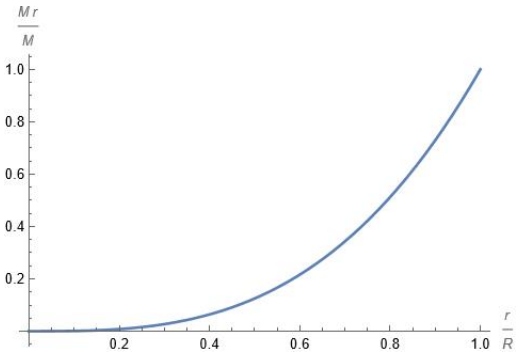
$$M(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{\mu_m^0}{A^3}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} \tag{4.19}$$

e il raggio in funzione del raggio adimensionale è

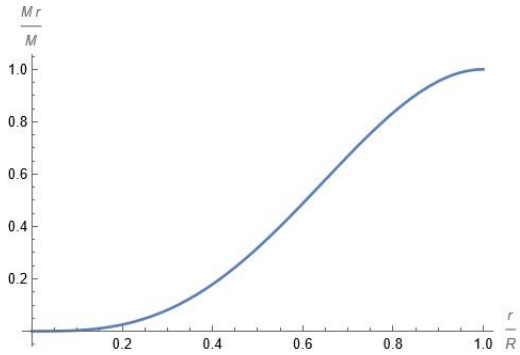
$$r = \left[2(n+1)K(\mu_m^0)^{\frac{1}{n}-1}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.20}$$

In particolare in (fig.4.2) sono riportati i grafici della massa al variare del raggio per le tre soluzioni analitiche dell'equazione Lane-Emden. In ascissa è riportato r/R [5] in ordinata $M(r)/M$ dove con M si indica la massa totale della stella.

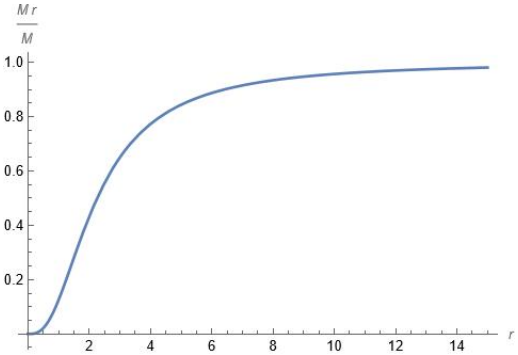
[4]infatti in [11] si dimostra che $T \propto \mu^{\frac{1}{n}}$ per cui se $n \to \infty$ T è uguale ad una costante
[5]per n=5 il raggio massimo è infinito per cui è stato graficato solo r



(a) n=0



(b) n=1



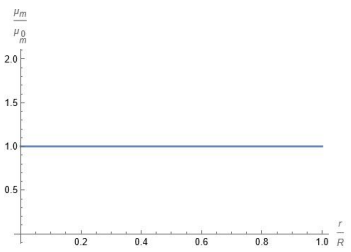
(c) n=5

Figura 4.2: Massa in funzione del raggio.

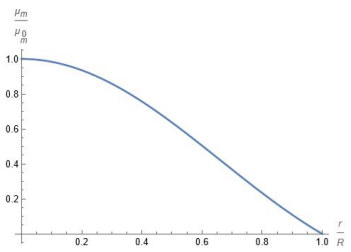
Da questi grafici si può notare che, come ci si aspetta, la soluzione per $n = 0$ è una funzione $M(r) \propto r^3$. Il raggio per $n = 1$ è indipendente (4.20) dalla densità di massa del centro e dipende solo dal parametro K. La massa totale per $n = 5$ è finita nonostante il raggio del corpo non lo sia infatti $\lim_{\xi\to\infty}(-\xi^2\theta'(\xi)) \to \sqrt{3}$.

Densità di massa e pressione per le soluzioni analitiche

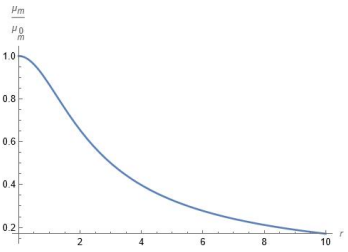
Conoscendo le definizioni (4.2) e (4.3) si possono graficare le pressioni e le densità di materia in funzione del raggio.
In (fig.4.3) sono rappresentate le densità di materia per le soluzioni analitiche dell'equazione Lane-Emden. In ascissa è riportato r/R [5] in ordinata è riportato $\frac{\mu_m}{\mu_m^0}$.



(a) n=0



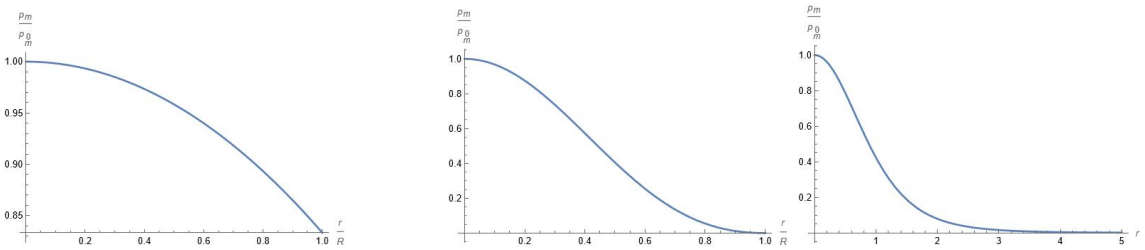
(b) n=1



(c) n=5

Figura 4.3: Densità in funzione del raggio.

In (fig.4.4) sono rappresentate le pressioni per le soluzioni analitiche dell'equazione Lane-Emden. In ascissa è riportato r/R [5] in ordinata è riportato $\frac{p_m}{p_m^0}$.



(a) n=0 (b) n=1 (c) n=5

Figura 4.4: Pressione in funzione del raggio.

4.4 Limite di Chandrasekhar

4.4.1 Introduzione

Il limite di Chandrasekhar rappresenta un valore critico fondamentale per la comprensione dell'evoluzione stellare e delle nane bianche. Questo limite, che fu calcolato dall'astronomo indiano Subrahmanyan Chandrasekhar nel 1930 [14], corrisponde alla massa massima di una nana bianca, circa 1,4 volte quella del Sole, al di sopra della quale la stella non può più mantenere la sua stabilità.
Le nane bianche sono oggetti estremamente compatti e densi, la stabilità di una stella di questo tipo è sostenuta dalla pressione di degenerazione degli elettroni che impedisce il collasso della stella per la forza di gravitazione. Tuttavia, quando la massa di una nana bianca supera il limite di Chandrasekhar, la pressione di degenerazione non è più sufficiente a contrastare la forza gravitazionale, portando a un ulteriore collasso della stella.

4.4.2 Derivazione del limite

All'interno della nana bianca non ci sono processi di fusione nucleare per cui è necessaria una forza diversa dalla pressione termica per mantenere la stella in equilibrio. A causa del principio di Pauli, due fermioni (elettroni) non possono occupare lo stesso stato quantistico. Con l'aumentare della densità gli elettroni riempiono i livelli energetici partendo dallo stato fondamentale. Di conseguenza, gli elettroni rimanenti si trovano in stati con energie sempre più elevate. La velocità risultante porta a una pressione degli elettroni, la pressione di degenerazione, che contrasta la forza di gravità e stabilizza la nana bianca.
Per trovare la pressione di degenerazione si tratta quindi la nana bianca come un gas di Fermi ideale di elettroni.
In questa sezione si segue il procedimento di [13].
Dalla statistica di Fermi-Dirac [13] è possibile ricavare i valori di n per i gas di Fermi

di elettroni in regime sia relativistico che non (vedi Appendice A).

$$\begin{cases} n = \frac{3}{2} & \text{caso non relativistico} \\ n = 3 & \text{caso relativistico} \end{cases} \tag{4.21}$$

Si considerino l'equazione di Lane-Emden (4.17) e le condizioni al contorno $\theta(0) = 1$ e $\theta'(0) = 0$. Si noti che il raggio del corpo nell'equazione Lane-Emden è definito dal primo zero della funzione $\theta(\xi)$ che viene chiamato comunemente ξ_1, poiché oltre questo valore la densità di materia diventa negativa. Per cui il raggio è[6]

$$R = \frac{\xi_1}{A} = \left[\frac{(n+1)K(\mu_m^0)^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}\right]^{\frac{1}{2}} c^{1+\frac{1}{n}}\xi_1 \tag{4.22}$$

per cui usando la definizione $M(R)$ si ottiene

$$M(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \mu_m(r) dr = \frac{4\pi}{A^3}\mu_m^0 \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi \tag{4.23}$$

Per integrare si utilizza l'equazione (4.17) trovando

$$M(R) = 4\pi c^{3+\frac{3}{n}} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{\frac{3}{2}} (\mu_m^0)^{(3-n)/2n} \xi_1^2 |\theta'(\xi')| \tag{4.24}$$

invertendo per μ_m^0 l'equazione (4.22) e sostituendola in (4.24) si giunge ad una relazione che collega la massa complessiva al raggio

$$M(R) = 4\pi c^{(2n+2)/(n-1)} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{n/n+1} \xi_1^{(n-3)/(1-n)} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| R^{(3-n)/(1-n)} \tag{4.25}$$

In questa equazione si nota che nel caso di materia degenere relativistica, $n = 3$, $M(R)$ non dipende ne dal raggio R ne dalla densità di materia del centro. Infatti al crescere della densità della nana bianca gli elettroni diventano sempre più energetici e la massa si si avvicina sempre di più ad un valore limite, chiamato massa di Chandrasekhar M_{ch}, che rappresenta il massimo possibile valore di massa per una nana bianca. Per trovare M_{ch} è necessario esplicitare K e $\xi_1^2|\theta'(\xi_1)|$ (per n=3), da [13] sono

$$\xi_1^2|\theta'(\xi_1)| = 2.01824 \qquad\qquad K = \frac{\hbar c}{12\pi^2}\left(\frac{3\pi^2 Z}{m_N c^2 \overline{A}}\right)^{\frac{4}{3}}$$

dove Z è il numero atomico e $\overline{A}$ è il numero di massa, m_N è la massa dei neutroni. Per cui il raggio può essere riscritto come

$$R = \frac{1}{2}(3\pi)^{\frac{1}{2}}(6.896585)\left(\frac{\hbar^{\frac{3}{2}} Z}{c^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} m_e m_N \overline{A}}\right)\left(\frac{\mu_{crit}}{\mu_m^0}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{4.26}$$

$$\mu_{crit} = \frac{m_N m_e^3 c^3}{3\pi^2\hbar^3} \tag{4.27}$$

[6] avendo ripristinato c e $8\pi G$, N.B. $\sigma = \frac{K(\mu_m^0)}{c^2}$

e la massa

$$M = \frac{1}{2}(3\pi)^{\frac{1}{2}}(2.01824)\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{Z}{m_n\overline{A}}\right) \tag{4.28}$$

Inserendo i valori [15] la massa diventa

$$M = 1.4312\left(\frac{2Z}{\overline{A}}\right)^2 M_{sun} \tag{4.29}$$

le nane bianche sono formate principalmente da ^{12}C, inserendo quindi il valore di $\frac{Z}{\overline{A}}$ si arriva al raggio di Chandrasekahr $M = 1.4559 M_{sun}$

5 Conformal Killing Gravity

5.1 Una Breve Introduzione

Nell'agosto del 2023 Junpei Harada ha pubblicato un articolo dal titolo "Gravity at cosmological distances: Explaining the accelerating expansion without dark energy" [16] in questo articolo l'autore si poneva il problema di riuscire a scrivere delle equazioni di campo che soddisfacessero tre criteri:

1. La costante cosmologica deve essere ottenuta come costante di integrazione.

   Questo primo criterio fornisce un importante vantaggio teorico rispetto alla relatività generale che non lo soddisfa. Nelle equazioni di Einstein infatti la costante cosmologica Λ è fissata come $G_{ab} = \kappa_G T_{ab} - \Lambda g_{ab}$. Einstein investigò anche [17], [18] delle equazioni a traccia nulla $R_{ab} - Rg_{ab}/4 = \kappa_G(T_{ab} - Tg_{ab}/4)$ che rispettavano il primo criterio proposto dall'autore, ma la legge di conservazione $\nabla_a T^{ab} = 0$ andava imposta come condizione aggiuntiva e questo conduce al secondo criterio preso in considerazione da Harada

2. La legge di conservazione, $\nabla_a T^{ab} = 0$, deve derivare delle equazioni di campo, piuttosto che essere assunta.

   La relatività generale soddisfa questo secondo criterio ma non il primo, mentre le equazioni di Einstein a traccia nulla soddisfano il primo ma non il secondo. Altre teorie come la Conformal gravity [19] e la Cotton gravity [20], [21] soddisfano entrambi i criteri ma mostrano che ogni metrica conformemente piatta è una soluzione di vuoto. Questo risultato ci conduce a soluzioni non fisiche, ad esempio la metrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker sarebbe una soluzione di vuoto ma è in contrasto con le osservazioni. Quindi Harada introduce il terzo criterio

3. Una metrica conformemente piatta, che sia cioè $g(x) = f(x)\eta$ [1], non deve essere necessariamente una soluzione nel vuoto

Imponendo i criteri di cui sopra Harada presentava delle nuove equazioni di campo che li soddisfavano oltre ad una possibile soluzione di vuoto. Nello stesso articolo Harada applica le sue equazioni alla cosmologia. Assumendo omogeneità e isotropia dell'universo, la soluzione di queste equazioni presenta una proprietà significativa: anche in assenza di energia oscura o della costante cosmologica, con la sola materia

[1] $g(x)$ è la metrica della varietà, $f(x)$ è un fattore conforme e η è la metrica piatta

presente, l'universo evolve da un'espansione che decelera a una che accelera. In effetti, in questa teoria, l'espansione accelerante emerge come conseguenza delle equazioni del campo gravitazionale, anziché essere attribuita a una pressione negativa. Questo offre una nuova spiegazione per l'attuale espansione accelerata dell'universo. Nello stesso anno Carlo Alberto Mantica e Luca Guido Molinari hanno pubblicato: "A Note on Harada's conformal Killing gravity" [22] in cui mostravano come le equazioni di Harada possano essere riscritte come equazioni di Einstein con l'aggiunta di un tensore di Killing e quindi nominavano la teoria "Conformal Killing Gravity" (CKG). Nello stesso articolo gli autori illustravano come la loro parametrizzazione, in un contesto cosmologico di Friedman-Robertson-Walker, portasse ad avere un tensore di fluido che dipendeva solo dalla metrica e non dalle sue derivate. Le equazioni Friedmann estese, in cui il tensore di Killing ha divergenza nulla, sono del secondo ordine nella metrica e mostrano gli stessi risultati ottenuti da Harada con equazioni del terzo ordine.
Successivamenti altri autori si sono interessati a questa teoria: Barnes in tre articoli si è proposto di indagare le soluzioni in vuoto, ottenendo la più generale possibile in serie di Lurent, le soluzioni con sorgente di Maxwell [23] [24] e le onde gravitazionali [25]. Gérard Clément, Khireddine Nouicer hanno ottenuto le soluzioni di vuoto in forma chiusa e hanno studiato i buchi neri e wormhole [26]. Junior, Lobo e Rodriguez hanno studiato le soluzioni di buchi neri regolari e accopiati con campi elettrodinamici non lineari e scalari inoltre hanno studiato le soluzioni di black bounce. Alshal et al. hanno infine studiato la dinamica dei "thin-shell wormhole" [27]

5.2 Equazioni di Harada

In "Gravity at cosmological distances: Explaining the accelerating expansion without dark energy" [16] e in "Dark energy in conformal Killing gravity" [28] J.Harada ha proposto delle nuove equazioni di campo (da qui in poi Equazioni di Harada o HFE) nella forma

$$\begin{aligned} H_{jkl} &= \kappa_G\, T_{jkl} \\ H_{jkl} &= \nabla_j R_{kl} + \nabla_k R_{lj} + \nabla_l R_{jk} - \tfrac{1}{3}(g_{kl}\nabla_j R + g_{lj}\nabla_k R + g_{jk}\nabla_l R) \\ T_{jkl} &= \nabla_j T_{kl} + \nabla_k T_{lj} + \nabla_l T_{jk} - \tfrac{1}{6}(g_{kl}\nabla_j T + g_{lj}\nabla_k T + g_{jk}\nabla_l T) \end{aligned} \tag{5.1}$$

R_{jk} è il tensore di ricci che ha traccia R, inoltre T_{kl} è il Tensore Energia Momento che ha traccia T.
L'identità di Bianchi $\nabla_j R^j{}_k = \frac{1}{2}\nabla_k R$ garantisce che valga l'equazione di continuità $\nabla_j T^j{}_k = 0$. È importante sottolineare che le soluzioni delle equazioni di Einstein rimangono soluzioni anche per questa estensione. In " A Note on Harada's conformal Killing gravity" [22] Mantica e Molinari riescono a trovare una parametrizzazione che consente di riscrive le equazioni di Harada come Equazioni di Einstein modificate da un tensore di Killing conforme a divergenza nulla.

Si noti infatti che (5.1) può essere riscritta come [2]

$$\nabla_j(R_{kl}-T_{kl})+\nabla_k(R_{lj}-T_{lj})+\nabla_l(R_{jk}-T_{jk})=$$
$$\frac{1}{6}\nabla_j(2R-T)g_{kl}+\frac{1}{6}\nabla_k(2R-T)g_{lj}+\frac{1}{6}\nabla_l(2R-T)g_{jk}$$

sottraendo poi da entrambi i membri $\frac{1}{2}(\nabla_j R g_{kl}+\nabla_k R g_{lj}+\nabla_l R g_{jk})$ si ottiene

$$\begin{aligned}&\nabla_j(R_{kl}-\frac{R}{2}g_{kl}-T_{kl})\\&+\nabla_k(R_{lj}-\frac{R}{2}g_{lj}-T_{lj})+\nabla_l(R_{jk}-\frac{R}{2}g_{jk}-T_{jk})\\&=-\frac{1}{6}\left[g_{kl}\nabla_j(R+T)+g_{lj}\nabla_k(R+T)+g_{jk}\nabla_l(R+T)\right].\end{aligned}$$

Definendo infine $K_{jk}=R_{jk}-\frac{R}{2}g_{jk}-T_{jk}$ che ha come traccia $K=-R-T$ e ripristinando κ_G si ottiene

$$\begin{aligned}&R_{kl}-\tfrac{1}{2}Rg_{kl}=\kappa_G(T_{kl}+K_{kl})\\&\nabla_j K_{kl}+\nabla_k K_{jl}+\nabla_l K_{jk}=\tfrac{1}{6}(g_{kl}\nabla_j K+g_{jl}\nabla_k K+g_{jk}\nabla_l K).\end{aligned}\tag{5.2}$$

E' importante notare che H_{jkl} in (5.1) ha derivate del terzo ordine nella metrica mentre (5.2), se lo spaziotempo è statico e sfericamente simmetrico, ha derivate del secondo ordine [8]. Inoltre in [8] Mantica e Molinari hanno dimostrato che le equazioni del terzo ordine di Harada sono riducibili alle equazioni del secondo ordine ricavate dai due autori.

5.3 Conformal Killing gravity in uno spazio tempo statico sfericamente simmetrico

Premessa

In questa sezione si segue il procedimento seguito da Mantica e Molinari in [7]

5.3.1 Equazioni di campo

Si consideri una metrica statica e sfericamente simmetrica nella forma

$$ds^2=-y(r)dt^2+\frac{h(r)}{y(r)}dr^2+r^2d\Omega_2^2\tag{5.3}$$

Riscrivendo (3.10) con $b^2=y(r)$, $f_1=\frac{h(r)}{y(r)}$ e $f_2=r^2$

$$R_{kl}=\frac{R+4\nabla_p\dot{u}^p}{3}u_ku_l+\frac{R+\nabla_p\dot{u}^p}{3}g_{kl}+\Sigma(r)\left[\chi_k\chi_l-\frac{u_ku_l+g_{kl}}{3}\right].\tag{5.4}$$

[2] $\kappa_G=1$

con $\chi^l = \frac{\dot{u}^l}{\sqrt{\eta}}$ e [3]

$$R = R^\star - 2\nabla_p \dot{u}^p \tag{5.5}$$
$$\frac{R^\star}{2} = \frac{1}{r^2} + \frac{y}{r}\frac{h'}{h^2} - \frac{y'}{rh} - \frac{y}{r^2 h} \tag{5.6}$$
$$\nabla_p \dot{u}^p = \frac{y''}{2h} - \frac{y'}{4}\frac{h'}{h^2} + \frac{y'}{rh} \tag{5.7}$$
$$\Sigma = -\frac{y''}{2h} + \frac{y'}{4}\frac{h'}{h^2} + \frac{y}{r^2 h} + \frac{y}{2r}\frac{h'}{h^2} - \frac{1}{r^2} \tag{5.8}$$

Inoltre si nota che esiste un'identità geometrica

$$\frac{R^\star}{2} + \nabla_p \dot{u}^p + \Sigma = \frac{3y}{2r}\frac{h'}{h^2} \tag{5.9}$$

Quindi si prende (5.2) per poter scrivere le equazioni di campo manca solo la definizione di K. In [8] Mantica e Molinari hanno dimostrato che può essere scritto nella forma

$$K_{kl} = A(r)u_k u_l + B(r)g_{kl} + C(r)\chi_k \chi_l \tag{5.10}$$

ed è a divergenza nulla se

$$A(r) = k_2 r^2 - 2k_3 y(r) \tag{5.11}$$
$$B(r) = k_1 + 2k_2 r^2 + k_3 y(r) \tag{5.12}$$
$$C(r) = -k_2 r^2 \tag{5.13}$$

con k_1, k_2 e k_3 sono costanti Quindi vista la forma di K_{kl} e R_{kl} si può scrivere il Tensore energia-momento nella forma (3.11)

$$T_{kl} = (\mu_m + P_m)u_k u_l + P_m g_{kl} + (p_{mr} - p_{m\perp})\left[\chi_k \chi_l - \frac{g_{kl} + u_k u_l}{3}\right] \tag{5.14}$$

Analogamente si riscrive K_{kl} nella stessa forma

$$K_{kl} = (\mu_d + P_d)u_k u_l + P_d g_{kl} + (p_{dr} - p_{d\perp})\left[\chi_k \chi_l - \frac{g_{kl} + u_k u_l}{3}\right] \tag{5.15}$$

con mu le densità di massa, P le pressioni effettiva, p_r le pressioni radiali e $p_\perp$. m a pedice è per la materia e d per il "dark sector". Inoltre $P = \frac{1}{3}(p_r + 2p_\perp)$ valida sia per la materia sia per il "dark sector".
Si possono quindi eguagliare (5.10) a (5.15) ottenendo [4]

$$\begin{aligned} \mu_d &= A - B = -k_1 - k_2 r^2 - 3k_3 y(r) \\ p_{dr} &= B + C = k_1 + k_2 r^2 + k_3 y(r) \\ p_{d\perp} &= B = k_1 + 2k_2 r^2 + k_3 y(r) \end{aligned} \tag{5.16}$$

[3] i primati indicano dervate rispetto a r
[4] N.B. la densità di energia oscura può essere negativa

Può essere scritta un'idendità chiamata in [7] "dark equation of state"

$$\mu_d(r) + 5p_{dr}(r) - 2p_{d\perp}(r) = 2k_1 \tag{5.17}$$

Si possono quindi ottenere le equazioni di campo $R_{kl} - \frac{1}{2}Rg_{kl} = T_{kl} + K_{kl}$[5]

$$\begin{aligned} &\frac{R^\star}{2} = \mu_m + \mu_d \\ &\nabla_p \dot{u}^p = \frac{3}{2}(P_m + P_d) + \frac{1}{2}(\mu_m + \mu_d) \\ &\Sigma = (p_{mr} - p_{m\perp}) + (p_{dr} - p_{d\perp}) \end{aligned} \tag{5.18}$$

E la conservazione di T ($\nabla_k T^{kl} = 0$) in simmetria statica sferica si riduce a

$$\frac{dp_{mr}}{dr} = -\frac{y'}{2y}(\mu_m + p_{mr}) - \frac{2}{r}(p_{mr} - p_{m\perp}) \tag{5.19}$$

Se il fluido è perfetto le pressioni sono uguali $p_{mr} = p_{m\perp} =: p_m$ quindi le equazioni di campo diventano

$$\begin{aligned} &\frac{R^\star}{2} = \mu_m + \mu_d \\ &\nabla_p \dot{u}^p = \frac{3}{2}(p_m + P_d) + \frac{1}{2}(\mu_m + \mu_d) \\ &\Sigma = p_{dr} - p_{d\perp} \end{aligned} \tag{5.20}$$

e l'equazione di continuità diventa

$$\frac{dp_{mr}}{dr} = -\frac{y'}{2y}(\mu_m + p_m) \tag{5.21}$$

5.3.2 Soluzione di vuoto

Si riporta qui la soluzione di vuoto della CKG, ottenuta prima da Barnes in serie [23], scritta in forma chiusa da Gérard Clément, Khireddine Nouicer [26] e in approccio covariante da Mantica e Molinari in [7].
In appendice A si trova un possibile metodo risolutivo in approccio covariante.

Forma generale

$$y(r) = C\frac{\sqrt{k_3 r^2 + k_4}}{r} + \left[\frac{k_1}{k_3} - \frac{3}{2}\frac{k_2 k_4}{k_3^2}\right]\left[\frac{\sqrt{k_3 r^2 + k_4}}{r\sqrt{k_3}}\Phi\left(r\sqrt{\frac{|k_3|}{|k_4|}}\right) - 1\right] + \frac{1}{k_4} + \frac{k_2}{2k_3}r^2 \tag{5.22}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \text{ArcSinh}(x) & k_3 > 0, k_4 > 0 \\ \text{ArcCosh}(x) & k_3 > 0, k_4 < 0 \\ \text{ArcSin}(x) & k_3 < 0, k_4 > 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

[5] κ_G è posta a 1

Soluzioni particolari: Vuoto di Harada

Se si pone $k_3 = 0$, $k_4 = 1$, $C = -2M$, $k_1 = -\Lambda$ e $k_2 = -\lambda$ si ottiene il vuoto trovato da Harada (eq. 21 in [16])

$$y(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{\lambda}{5}r^4 \tag{5.24}$$

Soluzioni particolari: Vuoto logaritmico

Se si pone $k_4 = 0$ e $k_3 > 0$ si ottiene una soluzione interessante dal punto di vista cosmologico

$$y(r) = \frac{k_1}{k_3}\log(r\sqrt{k_1}) + \frac{k_2}{2k_3}r^2 - \frac{1}{2k_3}\frac{1}{r^2} + \text{const.} \tag{5.25}$$

Questa soluzione è positiva oltre un orizzonte se $k_1, k_2 > 0$. Se $k_2 = 0$ cresce come $log(r)$ e la soluzione può essere utile nel problema della rotazione galattica.

5.4 Equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff in CKG

In [7] Mantica e Molinari sono riusciti ad ottenere l'estensione dell'equazione TOV in CKG che ha come sorgente di gravità un fluido perfetto del tipo (2.2) come segue: Si prenda una metrica statica sfericamente simmetrica del tipo

$$ds^2 = -b^2(r)dt^2 + \left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{5.26}$$

Le equazioni (5.6), (5.7) e (5.8) diventano

$$\begin{aligned} R^\star &= \frac{4M'}{r^2} \\ \Sigma &= -\left[\frac{b''}{b} - \frac{b'}{br}\right]\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] + \frac{b'}{b}\left[\frac{M'r - M}{r^2}\right] - \frac{3M - rM'}{r^3} \\ \nabla_p \dot{u}^p &= \left[\frac{b''}{b} + 2\frac{b'}{br}\right]\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] - \frac{b'}{b}\left[\frac{M'r - M}{r^2}\right] \end{aligned} \tag{5.27}$$

e l'equazione di continuità (5.21) diventa

$$\frac{p'_m}{p_m + \mu_m} = -\frac{b'}{b} \tag{5.28}$$

Inoltre riprendendo le (5.20)

$$\begin{aligned} \frac{R^\star}{2} &= \mu_m + \mu_d \\ \nabla_p \dot{u}^p &= \frac{3}{2}(p_m + P_d) + \frac{1}{2}(\mu_m + \mu_d) \\ \Sigma &= p_{dr} - p_{d\perp} \end{aligned}$$

Si può, allora, fare $\nabla_p \dot{u}^p + \Sigma - \frac{R^\star}{4}$, dalle (5.27) si ottiene

$$\nabla_p \dot{u}^p + \Sigma - \frac{R^\star}{4} = \frac{3b'}{br}\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] - \frac{3M(r)}{r^3} \tag{5.29}$$

invece dalle (5.20)

$$\nabla_p \dot{u}^p + \Sigma - \frac{R^\star}{4} = \frac{3}{2}(p_m + p_{dr}) \tag{5.30}$$

Eguagliandole e sostituendo $\frac{b'}{b}$ usando l'equazione di continuità (5.28) si giunge all'equazione TOV estesa per la CKG in uno spazio tempo sfericamente simmetrico che ha come sorgente un fluido perfetto isotropo

$$p'_m\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] = -\frac{p_m + \mu_m}{2}\left[r(p_m + p_{dr}) + \frac{2M(r)}{r^2}\right]. \tag{5.31}$$

Come ci si aspetta l'equazione TOV estesa si riduce all'equazione TOV della relatività generale (2.10) se $k_1 = k_2 = k_3 = 0$
Inoltre eguagliando la prima equazione del sistema (5.27) alla prima equazione (5.20) si ritrova la definizione di $M(r)$

$$M'(r) = \frac{1}{2}r^2(\mu_m(r) + \mu_d(r)) \tag{5.32}$$

6 Estensione dell'equazione Lane-Emden in CKG

6.1 Dimostrazione dell'estensione

Per ottenere le equazioni Lane-Emden estese si consideri un oggetto confinato di raggio $r = R$ allora la metrica interna e quella esterna diventano

$$ds_-^2 = -b_-^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2M(r)}{r}} + r^2 d\Omega_2^2 \qquad r < R \tag{6.1}$$

$$ds_+^2 = -b_+^2(r)dt^2 + f_{1+}^2(r)dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \qquad r > R \tag{6.2}$$

Le condizioni al contorno, continuità della metrica e l'equilibrio delle pressioni, [8] possono essere scritte come

$$b_-^2(R) = b_+^2(R) \tag{6.3}$$

$$1 - \frac{2M(R)}{R} = \frac{1}{f_{1+}^2(R)} \tag{6.4}$$

$$p_m(R) = p_{dr}^+(R) - p_{dr}^-(R) \tag{6.5}$$

Mantica e Molinari, sempre in [8], hanno dimostrato che se il tensore di Killing è continuo su tutto lo spazio, cioè $\Delta K = K^+ - K^- = 0$, allora $p_m(R) = 0$.
Si consideri quindi come metrica esterna il vuoto di Harada ($k_3 = 0$):

$$b_+^2 = 1 - \frac{2\overline{M}}{r} + \frac{k_1}{3}r^2 + \frac{k_2}{5}r^4 \tag{6.6}$$

$$f_{1+}^2 = 1/b_-^2 \tag{6.7}$$

in cui $\overline{M}$ è la massa di materia, k_1 è la costante cosmologica e k_2 è un nuovo termine introdotto dalla CKG, avendo imposto la continuità del tensore di Killing K in tutto lo spazio, i termini del "dark sector" diventano

$$\mu_d(r) = -k_2 r^2 - k_1 \tag{6.8}$$

$$p_{dr}(r) = k_2 r^2 + k_1 \tag{6.9}$$

$$p_{d\perp} = 2k_2 r^2 + k_1 \tag{6.10}$$

Riprendendo (5.27), (5.20) e (5.28) si è quindi in posizione di ricavare l'estensione dell'equazione Lane-Emden in Conformal Killing gravity.
Come anche in sez. 3.5.2, si introduce l'equazione politropica

$$p_m = \Omega \mu_m^{1+\frac{1}{n}} \tag{6.11}$$

dove Ω e n sono costanti reali.
Si introduce inoltre un funzione $\theta(r)$ che lega la densità di materia alla densità del centro del corpo oggetto di studio[1].

$$\mu_m = \mu_m^0 \theta^n \tag{6.12}$$

Sostituendo (6.12) in (6.11) si ottiene [2]

$$p_m = \Omega(\mu_m^0)^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1} \tag{6.13}$$
$$p_m' = \Omega(\mu_m^0)^{1+\frac{1}{n}}\theta'\theta^n(n+1) \tag{6.14}$$

Si definisce quindi

$$p_m^0 = \Omega(\mu_m^0)^{1+\frac{1}{n}} \tag{6.15}$$

Procedendo a sostituire (6.12), (6.13) e (6.14) in (5.28)

$$\frac{b_-'}{b_-} = -\frac{\Omega(\mu_m^0)^{\frac{1}{n}}\theta'(n+1)}{\Omega(\mu_m^0)^{\frac{1}{n}}\theta + 1} \tag{6.16}$$

e chiamando $\sigma = \Omega(\mu_m^0)^{\frac{1}{n}}$, si giunge a

$$\frac{b_-'}{b_-} = -\frac{\sigma\theta'(n+1)}{\sigma\theta + 1} \tag{6.17}$$

che può essere integrata (anche se solo formalmente) per ottenere

$$b_- = C(\sigma\theta + 1)^{-(n+1)} \tag{6.18}$$

Per determinare C bisogna imporre la continuità della metrica, cioè $b_-(R) = b_+(R)$, dove b_- è l'equazione trovata e b_+ è la soluzione di vuoto di Harada.
Si noti inoltre che $\sigma = \frac{p_m^0}{\mu_m^0}$.
Calcolando $\Sigma + \nabla_p \dot{u}^p + \frac{R^\star}{2}$ dalle (5.27) si ottiene

$$\Sigma + \nabla_p \dot{u}^p + \frac{R^\star}{2} = 3\frac{b'}{br}\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] - \frac{3M(r)}{r^3} + \frac{3M'(r)}{r^2} \tag{6.19}$$

analogamente da (5.20)

$$\Sigma + \nabla_p \dot{u}^p + \frac{R^\star}{2} = \frac{3}{2}(\mu_m + p_m) + \frac{3}{2}(\mu_d + p_{dr}) \tag{6.20}$$

sostituendo (6.12) e (6.11), (6.8) e (6.9) in (6.20) si trova

$$\Sigma + \nabla_p \dot{u}^p + \frac{R^\star}{2} = \frac{3}{2}\theta^n r^2 \mu_m^0(\sigma\theta + 1) \tag{6.21}$$

[1] p_m, μ_m e θ sono funzioni del raggio r
[2] μ_m^0 è elevato alla $1 + \frac{1}{n}$

Uguagliando (6.19), (6.21) e sostituendo (6.17), dopo aver riarrangiato i termini, si può scrivere

$$M' = \frac{1}{2}\theta^n r^2 \mu_m^0(\sigma\theta + 1) + r\frac{\sigma(n+1)\theta'}{\sigma\theta + 1}\left[1 - \frac{2M}{r}\right] + \frac{M}{r} \tag{6.22}$$

Inoltre eguagliando la prima equazione del sistema (5.27) alla prima equazione (5.20) si ritrova la definizione di $M(r)$

$$M'(r) = \frac{1}{2}r^2(\mu_m(r) + \mu_d(r)) \tag{6.23}$$

e sostituendo le definizioni di μ_m e μ_d diventa

$$M'(r) = \frac{1}{2}r^2(\mu_m^0\theta^n(r) - k_1 - k_2 r^2)$$

Il sistema formato da (6.22) e (6.23) è l'estensione dell'equazione Lane-Emden in Conformal Killing gravity e, se si annullano i termini del tensore di Killing, si riduce all'estensione in relatività generale trovata da Tooper in [12].

Caso di densità uniforme

Per un caso di questa equazione è già nota una soluzione analitica, infatti se $n = 0$ la densità di materia è uniforme e quindi il sistema formato da (6.22) e (6.23) deve condurre alla soluzione già ottenuta da Mantica e Molinari in [8]. Infatti, ponendo $n = 0$ in (6.23) e integrando si ottiene

$$M(r) = \frac{1}{6}(\mu_m^0 - k_1) - \frac{1}{10}k_2 r^5 \tag{6.24}$$

e sostituendo (6.23) e (6.24) in (6.22) con $n = 0$ si ricava

$$(\sigma\theta + 1)\left[\frac{1}{3}(\mu_m^0 - k_1)r^2 - \frac{2}{5}r^4\right] = r\sigma\theta'\left[1 - \frac{1}{3}(\mu_m^0 - k_1) + \frac{1}{5}k_2 r^4\right] + \frac{1}{2}(\sigma\theta + 1)^2 r^2 \mu_m^0$$

Moltiplicando l'equazione ottenuta per μ_m^0 e dividendola per r

$$\mu_m^0(\sigma\theta + 1)\left[\frac{1}{3}(\mu_m^0 - k_1)r - \frac{2}{5}r^3\right] = \mu_m^0\sigma\theta'\left[1 - \frac{1}{3}(\mu_m^0 - k_1) + \frac{1}{5}k_2 r^4\right] + \frac{1}{2}(\sigma\theta + 1)^2 r(\mu_m^0)^2 \tag{6.25}$$

Riscrivendo le definizioni (6.12) e (6.13) [3]

$$\mu_m = \mu_m^0 \tag{6.26}$$
$$p_m(r) = \sigma\mu_m^0\theta(r) \tag{6.27}$$

[3] p_m(r) non è ben definita per $n = 0$ per cui si tralascia l'equazione politropica $p_m(r) = K\mu_m^{1+\frac{1}{n}}$ e si assume un fluido incomprimibile in cui $p_m(r)$ viene scritto come una costante ($\sigma\mu_m^0$) prodotta ad una funzione ($\theta(r)$)

per cui (6.25) può essere riscritta come

$$(p_m+\mu_m)\left[\frac{1}{3}(\mu_m^0-k_1)r-\frac{2}{5}r^3\right]=p_m'\left[1-\frac{1}{3}(\mu_m^0-k_1)+\frac{1}{5}k_2r^4\right]+\frac{1}{2}(p_m+\mu_m)^2r \tag{6.28}$$

che è la stessa equazione ottenuta da Mantica e Molinari in [8]. Questa equazione può essere risolta definendo $y(r)=p_m+\mu_m=\mu_m^0(\sigma\theta+1)$, infatti sostituendo diventa

$$y'\left[1-\frac{\mu_m^0-k_1}{3}r^2+\frac{k_2}{5}r^4\right]+\frac{y^2}{2}r-y\left[\frac{\mu_m^0-k_1}{3}r-2\frac{k_2}{5}r^3\right]=0 \tag{6.29}$$

che è un un'equazione di Bernoulli che se risolta permette di trovare l'espressione esplicita per $p_m(r)$ o alternativamente per $\theta(r)$. Risolvendola [8] per $\theta(r)$ e imponendo la condizione al contorno $\theta(R)=0$ si ottiene

$$\frac{1}{\mu_m^0(\sigma\theta+1)}=\frac{1}{4}\frac{\frac{\mu_m^0-k_1}{6}-\frac{k_2}{5}r^2}{(\frac{\mu_m^0-k_1}{6})^2-\frac{k_2}{5}}+\sqrt{\frac{1-\frac{2M(r)}{r}}{1-\frac{2M(R)}{R}}}\left[\frac{1}{\mu_m^0}-\frac{1}{4}\frac{\frac{\mu_m^0-k_1}{6}-\frac{k_2}{5}R^2}{(\frac{\mu_m^0-k_1}{6})^2-\frac{k_2}{5}}\right] \tag{6.30}$$

Se si pongono k_1 e k_2 a zero si recupera la soluzione in relatività generale, con $M(r)=\frac{\mu_m^0}{6}r^3$

$$p_m(r)=\mu_m^0\frac{\sqrt{1-2M(R)/R}-\sqrt{1-2M(r)/r}}{\sqrt{1-2M(r)/r}-3\sqrt{1-2M(R)/R}}$$

Per cui la metrica interna (6.18) [4], imponendone la continuità con quella esterna, diventa

$$b_-(r)=\sqrt{1-\frac{2M(r)}{r}}\left[1-\frac{\mu_m^0}{4}\frac{\frac{\mu_m^0-k_1}{6}-\frac{k_2}{5}R^2}{(\frac{\mu_m^0-k_1}{6})^2-\frac{k_2}{5}}\right]+\frac{\mu_m^0}{4}\frac{\frac{\mu_m^0-k_1}{6}-\frac{k_2}{5}r^2}{(\frac{\mu_m^0-k_1}{6})^2\frac{k_2}{5}}\sqrt{1-\frac{2M(R)}{R}} \tag{6.31}$$

che è proprio quanto ottenuto in [8].
Questa soluzione dipende unicamente dalla densità (μ_m^0), dal raggio (R) del corpo in studio e dai parametri (k_1,k_2) del "dark sector" che permeano tutto lo spaziotempo. All'esterno questa metrica andrà incollata con la metrica di Harada (6.2) che è composta dai 2 termini del "dark sector" (k_1, k_2) e dalla massa di materia definita da $\overline{M}=\int_0^R\frac{1}{2}r'^2\mu_m^0dr'=\frac{1}{6}\mu_m^0R^3$. Da [7] è tratto il grafico (6.1) che confronta le pressioni e le metriche nel caso di CKG e in Relatività Generale

[4] avendo riscritto C come $C_1\mu_m^0$

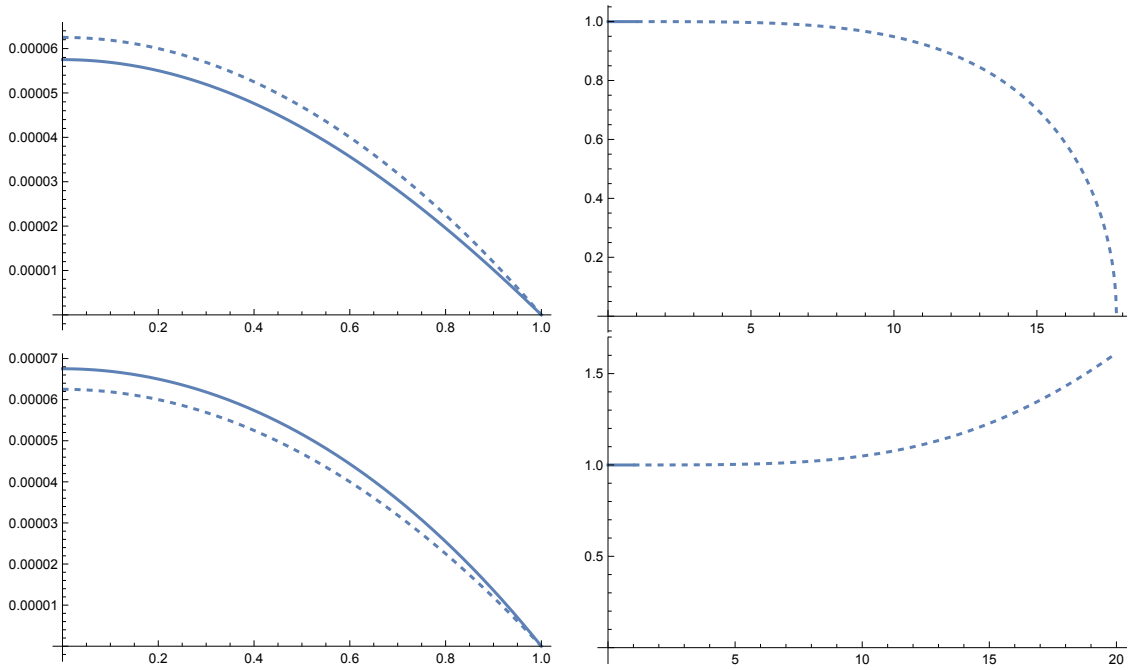


Figura 6.1: A sinistra: la pressione $p_m(r)/\mu_m$ in CKG (linea continua) in GR (linea tratteggiata). A destra: la funzione metrica interna b_- (linea continua) e il vuoto di Harada b_+ (linea tratteggiata), in funzione di r/R, queste due soluzioni si raccordano in $r/R = 1$. Immagini superiori: $k_1 = 0$, $X = \frac{1}{3}\mu_m R^2 = \frac{1}{4}10^{-3}$, $Y = -\frac{1}{5}k_2 R^4 = 10^{-5}$ (in GR: $X = \frac{1}{4}10^{-3}$, $Y = 0$). La metrica di Harada diventa negativa attorno a $r/R = 18$. Immagini inferiori: $\Lambda = 0$, $X = \frac{1}{4}10^{-3}$, $Y = -10^{-5}$

6.2 Limite Newtoniano

Per poter indagare il limite Newtoniano del sistema formato dalle equazioni (6.23) e (6.22) è preferibile rendere adimensionali le grandezze presenti, si faccia quindi il seguente cambio di variabili

$$r = \frac{\xi}{A} \qquad v(\xi) = 2\frac{A^3 M(r)}{\mu_{m^0}} \tag{6.32}$$

$$v'(\xi) = \frac{2A^2 M'(r)}{\mu_{m^0}} \qquad A = \left[\frac{1}{2}\frac{\mu_{m^0}}{(n+1)\sigma}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Sostituendo in (6.23) e (6.22) otteniamo

$$v'(\xi) = \xi^2\theta^n - \xi^2\frac{k_1}{\mu_{m^0}} - \xi^4\frac{k_2}{\mu_{m^0}A^2} \tag{6.33}$$

$$v'(\xi) = \xi^2\theta^n(\sigma\theta+1) + \frac{\theta'\xi}{\sigma\theta+1}\left[1 - 2\sigma(n+1)\frac{v(\xi)}{\xi}\right] + \frac{v(\xi)}{\xi} \tag{6.34}$$

La seconda equazione può essere riarrangiata nella seguente forma

$$\sigma\xi^3\theta^{n+1} + \xi^2\theta'\frac{1-2\sigma(n+1)v(\xi)/\xi}{1+\sigma\theta} + v(\xi) = -\frac{k_1}{\mu_{m^0}}\xi^3 - \frac{k_2}{\mu_{m^0}A^2}\xi^5 \tag{6.35}$$

per ottenere l'equazione di Lane-Emden si annulla il termine di costante cosmologica k_1 e si trova

$$v(\xi) = -\sigma\xi^3\theta^{n+1} - \xi^2\theta' \frac{1 - 2\sigma(n+1)v(\xi)/\xi}{1+\sigma\theta} - \frac{k_2}{\mu_{m^0}A^2}\xi^5 \tag{6.36}$$

che derivata rispetto a ξ

$$v'(\xi) = -\frac{d}{d\xi}\left[\sigma\xi^3\theta^{n+1} + \xi^2\theta' \frac{1 - 2\sigma(n+1)v(\xi)/\xi}{1+\sigma\theta}\right] - \frac{5k_2}{\mu_{m^0}A^2}\xi^4 \tag{6.37}$$

Uguagliando il risultato a (6.33) (avendo posto $k_1 = 0$) si scrive

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\sigma\xi^3\theta^{n+1} + \xi^2\theta' \frac{1 - 2\sigma(n+1)v(\xi)/\xi}{1+\sigma\theta}\right] + \theta^n = -\frac{4k_2}{\mu_{m^0}A^2}\xi^2 \tag{6.38}$$

Si può procedere allora a calcolare il limite Newtoniano, cioè $\sigma \to 0$.
Nel limite il membro di sinistra diventa

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right] + \theta^n \tag{6.39}$$

che è il primo membro dell'equazione di Lane-Emden.
Il membro di destra invece può essere riscritto esplicitando A

$$-4k_2\frac{2(n+1)\sigma}{(\mu_m^0)^2}\xi^2$$

e sostituendo

$$\mu_m^0 = \left(\frac{\sigma}{\Omega}\right)^n$$

si trova

$$-4k_2\Omega^{2n}2(n+1)\sigma^{1-2n}\xi^2 \tag{6.40}$$

Questo termine, quando $\sigma \to 0$, si deve annullare per poter ritrovare il membro di destra dell'equazione Lane-Emden ma se k_2 è indipendente da σ si annulla solo se

$$n < \frac{1}{2} \tag{6.41}$$

Questa condizione però risulta non fisica per cui o non si recupera il limite Newtoniano o k_2 non è indipendente da σ.

7 Conclusioni

In questa tesi si sono ricavate le equazioni di Tolmann-Oppenheimer-Volkoff e di Lane-Emden in relatività generale, utilizzando sia l'approccio per componenti che l'approccio covariante. Di quest'ultimo, proposto da Mantica e Molinari, si sono mostrati i vantaggi nella trattazione degli spazi tempo statici e sfericamente simmetrici. Delle equazioni Lane-Emden si sono illustrate anche le possibili soluzioni analitiche. Successivamente si sono ricavate queste stesse equazioni in Conformal Killing Gravity, un'estensione della relatività generale proposta da Harada nel 2023, utilizzando nuovamente l'approccio covariante. Dell'equazione di Lane Emden estesa si è anche proceduto a controllare il limite Newtoniano osservando che in Conformal Killing Gravity non è recuperabile a meno che uno dei parametri della teoria, k_2, sia dipendente dalla densità di massa del centro del corpo oggetto di studio. Questo fatto pone un quesito sulla dipendenza dei parametri della teoria dai parametri cosmologici.
La Conformal Killing Gravity non può ancora essere considerata una teoria alternativa alla relatività generale nonostante Mantica e Molinari abbiano iniziato a studiarne le implicazioni cosmologiche. Infatti in [29] gli autori hanno utilizzato le equazioni di Friedmann in CKG per studiare l'evoluzione dell'universo, trovando dei risultati che potrebbero implicare un destino futuro simile a quello previsto dalla ΛCDM, con un possibile "Big Rip". In questo articolo i fitting del parametro di Hubble rispetto al redshift, utilizzando i dataset dei Cronometri Cosmici (CC) e delle Oscillazioni Acustiche Barioniche (BAO), hanno portato a risultati promettenti. I dati CC indicano la possibilità di un "Big Rip" tra 21 miliardi di anni, mentre l'analisi combinata di CC e BAO suggerisce una transizione esotica intorno ai 15,6 miliardi di anni.
Recentemente inoltre Junior, Lobo e Rodriguez in [30] hanno creato dei modelli di buchi neri in CKG, ne hanno studiato le proprietà e hanno confrontato le previsioni di questi modelli con i dati raccolti da Event Horizon Telescope (ETH), mostrando che, con una corretta scelta dei parametri della teoria, i modelli sono consistenti con le osservazioni sul buco nero al centro della nostra galassia.
Per poter essere considerata come alternativa alla relatività generale ordinaria la Conformal Killing Gravity deve comunque essere ancora messa alla prova attraverso le osservazioni sul Sistema Solare e cioè il redshift gravitazionale, il lensing gravitazionale, l'effetto Shapiro e la precessione delle orbite. Rimangono inoltre da investigare le perturbazioni in spazi-tempo FRW e de-Sitter.

Bibliografia

[1] Carlo Mantica e Luca Molinari; *The covariant approach to static spacetimes in Einstein and extended gravity theories*; in: *General Relativity and Gravitation* 55 (set. 2023); DOI: 10.1007/s10714-023-03149-w.

[2] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff; *On Massive Neutron Cores*; eng; in: *Physical review* 55.4 (1939), pp. 374–381; ISSN: 0031-899X.

[3] Richard C. Tolman; *Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models*; eng; in: *General relativity and gravitation* 29.7 (1997), pp. 935–943; ISSN: 0001-7701.

[4] Richard C. Tolman; *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*; eng; in: *Physical review* 55.4 (1939), pp. 364–373; ISSN: 0031-899X.

[5] R.C. Tolman; *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*; Dover Books on Physics; Dover Publications, 1987, pp. 241–244; ISBN: 9780486653839.

[6] Hans Stephani et al.; *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*; 2ª ed.; Cambridge Monographs on Mathematical Physics; Cambridge University Press, 2003.

[7] Carlo Alberto Mantica e Luca Guido Molinari; *Tolman Oppenheimer Volkoff equation and static perfect fluid spheres in Conformal Killing gravity*; 2024; arXiv: 2409.18663 [gr-qc]; URL: https://arxiv.org/abs/2409.18663.

[8] Carlo Alberto Mantica e Luca Guido Molinari; *Conformal Killing gravity in static spherically symmetric spacetimes*; eng; in: *Physical review. D* 110.4 (2024); ISSN: 2470-0010.

[9] R. Emden; *Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Warmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme ...* Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische probleme; B.G. Teubner, 1907.

[10] Homer J. Lane; *On the theoretical temperature of the Sun, under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat, and depending on the laws of gases as known to terrestrial experiment*; in: *American Journal of Science* s2-50.148 (1870), pp. 57–74; DOI: 10.2475/ajs.s2-50.148.57.

[11] S. Chandrasekhar e S. Chandrasekhar; *An Introduction to the Study of Stellar Structure*; Astrophysical monographs; Dover Publications, 1957; ISBN: 9780486604138.

[12] Robert F. Tooper; *General Relativistic Polytropic Fluid Spheres.* In: *The Astrophysical Journal* 140 (1964), p. 434.

[13] Irina Sagert et al.; *Compact stars for undergraduates*; in: *European Journal of Physics* 27.3 (apr. 2006), pp. 577–610; ISSN: 1361-6404; DOI: 10.1088/0143-0807/27/3/012; URL: http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/27/3/012.

[14] Subrahmanyan Chandrasekhar; *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs*; in: *apj* 74 (1931), p. 81.

[15] S. Navas et al.; *Review of particle physics*; in: *Phys. Rev. D* 110.3 (2024), p. 030001; DOI: 10.1103/PhysRevD.110.030001.

[16] Junpei Harada; *Gravity at cosmological distances: Explaining the accelerating expansion without dark energy*; eng; in: *Physical review. D* 108.4 (2023); ISSN: 2470-0010.

[17] George F R Ellis et al.; *On the trace-free Einstein equations as a viable alternative to general relativity*; eng; in: *Classical and quantum gravity* 28.22 (2011), pp. 225007–; ISSN: 0264-9381.

[18] George F. R. Ellis; *The trace-free Einstein equations and inflation*; in: *General Relativity and Gravitation* 46.1 (2013); ISSN: 1572-9532; DOI: 10.1007/s10714-013-1619-5; URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10714-013-1619-5.

[19] Philip D. Mannheim e Demosthenes Kazanas; *Exact vacuum solution to conformal Weyl gravity and galactic rotation curves*; eng; in: *The Astrophysical Journal* 342.2 (1989), pp. 635–638; ISSN: 0004-637X.

[20] Junpei Harada; *Emergence of the Cotton tensor for describing gravity*; in: *Physical review. D* 103.12 (2021), pp. 1–; ISSN: 2470-0010.

[21] Carlo Alberto Mantica e Luca Guido Molinari; *Codazzi tensors and their space-times and Cotton gravity*; eng; in: *General relativity and gravitation* 55.4 (2023); ISSN: 0001-7701.

[22] Carlo Alberto Mantica e Luca Guido Molinari; *Note on Harada's conformal Killing gravity*; eng; in: *Physical review. D* 108.12 (2023); ISSN: 2470-0010.

[23] Alan Barnes; *Vacuum Static Spherically Symmetric Spacetimes in Harada's Theory*; 2023; arXiv: 2309.05336 [gr-qc]; URL: https://arxiv.org/abs/2309.05336.

[24] Alan Barnes; *Spherically symmetric electrovac spacetimes in conformal Killing gravity*; in: *Classical and Quantum Gravity* 41.15 (2024), p. 155007; DOI: 10.1088/1361-6382/ad5c33; URL: https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ad5c33.

[25] Alan Barnes; *pp-waves in conformal Killing gravity*; 2024; arXiv: 2404.09310 [gr-qc]; URL: https://arxiv.org/abs/2404.09310.

[26] Gérard Clément e Khireddine Nouicer; *Spherical symmetric solutions of conformal Killing gravity: black holes, wormholes, and sourceless cosmologies*; in: *Classical and Quantum Gravity* 41.16 (2024), p. 165005; DOI: 10.1088/1361-6382/ad5f24; URL: https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ad5f24.

[27] Hassan Alshal et al.; *Linearized stability of Harada thin-shell wormholes*; in: *General Relativity and Gravitation* 57.1 (2024); ISSN: 1572-9532; DOI: 10.1007/s10714-024-03344-3; URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10714-024-03344-3.

[28] Junpei Harada; *Dark energy in conformal Killing gravity*; eng; in: *Physical review. D* 108.10 (2023); ISSN: 2470-0010.

[29] Carlo Alberto Mantica e Luca Guido Molinari; *Conformal Killing cosmology: Geometry, dark sector, growth of structures, and a big rip*; eng; in: *Physical review. D* 110.6 (2024); ISSN: 2470-0010.

[30] Ednaldo L. B. Junior et al.; *Novel charged black hole solutions in conformal Killing gravity*; 2025; arXiv: 2502.00589 [gr-qc]; URL: https://arxiv.org/abs/2502.00589.

A Appendice A: Indice politropico

In questa appendice si segue quanto fatto in [13]
Per ricavare l'equazione di stato si parta dalla distribuzione di un gas ideale di fermioni, la sua distribuzione di energia è descritta dalla statistica di Fermi-Dirac [13]. Data la funzione di occupazione fermionica

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\Phi)/k_B T} - 1} \tag{A.1}$$

con E l'energia, Φ il potenziale chimico, k_B è la costante Boltzmann e T è la temperatura si introduce la densità numerica $n = N/V$ (con N il numero totale di fermioni e V il volume occupato) per cui la densità di particelle nello spazio degli stati può essere scritta come

$$n = \frac{1}{V} \int_0^\infty g(E) f(E) dE \tag{A.2}$$

dove $g(E)$ è la densità degli stati per un determinato valore di energia. Per un gas degenere di fermioni la temperatura può essere considerata nulla [13] poiché $(\Phi - m_e c^2) >> k_B T$. Per essere aggiunta al sistema, una particella deve avere un'energia pari all'energia di Fermi del sistema, poiché tutti gli altri livelli energetici sono già occupati. Questa descrizione corrisponde esattamente alla definizione del potenziale chimico, e quindi possiamo scrivere $\mu = E_F$. Con tutte queste ipotesi, possiamo scrivere la distribuzione

$$\begin{cases} 1 & E \leq E_F \\ 0 & E \geq E_F \end{cases}$$

Allora la densità numerica diventa

$$n = \frac{1}{V} \int_0^{E_F} g(E) dE \tag{A.3}$$

riscrivendo il n sullo spazio delle fasi e sapendo che la degenerazione per i fermioni è 2 si ottiene[1]

$$n_e = \int_0^{k_F} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} d^3k = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \tag{A.4}$$

[1] la e a pedice indica che è la densità numerica degli elettroni

Poiché le stelle devono essere elettricamente neutre allora il numero di protoni deve essere uguale a quello degli elettroni. Assumendo che le nane bianche siano composte principalmente da ^{12}C o da ^{16}O allora possiamo calcolare la massa densità di massa della stella come

$$\mu_m = n_e m_N \frac{A}{Z} \tag{A.5}$$

in cui m_N è la massa del neutrone e A/Z è il rapporto tra numero di massa e numero atomico. Nella densità appena calcolata si è trascurata la massa degli elettroni poiché molto minore di quella dei nucleoni. Per cui il momento d Fermi può essere riscritto come

$$k_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 \mu_m}{m_N} \frac{Z}{A} \right) \tag{A.6}$$

Il momento nucleoni è trascurabile rispetto alla loro massa a riposo e quindi essi forniscono un contributo trascurabile alla pressione a temperatura nulla. Invece gli elettroni si comportano come un gas degenere e hanno molta energia cinetica e quindi forniranno il contributo maggiore alla pressione.
Sapendo che l'energia di un elettrone è $E(k) = \sqrt{k^2c^2 + m_e^2c^4}$ possiamo calcolare la pressione.
La pressione di un sistema in cui i momenti sono distribuiti isotropicamente sono dati da [13]

$$p_m = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} kvk^2 dk \tag{A.7}$$

con la velocità $v = kc^2/E$ ed il fattore $1/3$ che deriva dall'isotropia. Per cui per gli elettroni si ottiene

$$p(k_F) = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^2c^2}{E(K)} k^2 dk = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} (k^2c^2 + m_e^2c^4)^{-\frac{1}{2}} c^2 k^4 dk \tag{A.8}$$

chiamando quindi $u = k/m_e c$ si può riscrivere l'integrale come

$$p(k_F) = \frac{m_e^4 c^5}{3\pi\hbar^3} \int_0^{\frac{k_F}{m_e c}} (u^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} u^4 du \tag{A.9}$$

Ponendosi ora nel caso non relativistico cioè in cui l'energia a riposo degli elettroni è molto maggiore della loro energia cinetica cioè $k_f << m_e c$ allora $u << 1$ per cui approssimando $p(k_F)$ e sostituendo A.6

$$p(k_F) \approx \frac{m_e^4 c^5}{3\pi\hbar^3} \int_0^{\frac{k_F}{m_e c}} u^4 du = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2 \mu_m Z}{m_N A} \right)^{\frac{5}{3}} \tag{A.10}$$

Possiamo scrivere, quindi, l'equazione di stato non relativistica come

$$p \approx K_{non-rel} (\mu_m)^{\frac{5}{3}} \tag{A.11}$$

$$K_{nonrel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2 \mu_m Z}{m_N A} \right)^{\frac{5}{3}} \tag{A.12}$$

Con un conto analogo si può ricavare l'equazione di stato relativistica, cioè l'energia cinetica degli elettroni è molto maggiore dell'energia a riposo $k_F >> m_e c$ e quindi $u >> 1$, ottenendo

$$p \approx K_{rel}(\mu_m)^{\frac{4}{3}} \tag{A.13}$$

$$K_{rel} = \frac{\hbar c}{12\pi^2}\left(\frac{3\pi^2 \mu_m Z}{m_N A}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{A.14}$$

Una relazione nella forma $p = K(\mu_m)^{1+\frac{1}{n}}$ è detta equazione di stato politropica per cui si può calcolare l'indice politropico n per nana bianca

$$\begin{cases} n = \frac{3}{2} & \text{caso non relativistico} \\ n = 3 & \text{caso relativistico} \end{cases} \tag{A.15}$$

B Appendice B: Soluzione di vuoto generale

Per trovare la soluzione di vuoto più generale in CKG si parte considerando (5.20) rendendo nulli termini di massa [8] ottendendo qundi:

$$\begin{aligned} \frac{R^\star}{2} &= -k_1 - k_2 r^2 - 3k_3 y(r) \\ \nabla_p \dot{u}^p &= k_1 + 2k_2 r^3 \\ \Sigma &= -k_2 r^2 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Riscrivendo (5.9) usando i valori trovati in (B.1)

$$\frac{R^\star}{2} + \nabla_p \dot{u}^p + \Sigma = \frac{3y}{2r}\frac{h'}{h^2} = -3k_3 y(r) \tag{B.2}$$

Per cui risolvendo l'equazione differenziale in funzione di $h(r)$ si trova

$$h(r) = \frac{1}{k^3 r^2 + k_4} \tag{B.3}$$

Sostituendo $h(r)$ nelle equazioni di campo (5.6, 5.8, 5.7) si scrive

$$\frac{y'}{r}(k_3 r^2 + k_4) + \frac{y}{r^2}k_4 = k_1 + k_2 r^2 + \frac{1}{r^2} \tag{B.4}$$

$$y''(k_3 r^2 + k_4) + \frac{y'}{r}(3k_3 r^2 + 2k_4) = 4k_2 r^2 + 2k_1 \tag{B.5}$$

$$y''(k_3 r^2 + k_4) + y' k_3 r - 2\frac{y}{r^2}k_4 = 2k_2 r^2 - \frac{2}{r^2} \tag{B.6}$$

Queste equazioni però non sono indipendenti, infatti se si sottrae la terza equazione dalla seconda si ottiene la prima, inoltre se si deriva la prima equazione si ottiene la terza per qui non sono indipendenti. Quindi per risolvere questo sistema è necessario risolvere solo quella del primo ordine (B.4).
Per risolvere questa equazione è possibile utilizzare la formula risolutiva delle equazioni del primo ordine. Per prima cosa la si pone in forma

$$y' + y\left(\frac{k_4}{r}\frac{1}{k_3 r^2 + k_4}\right) = \left(k_1 r + k_2 r^3 + \frac{1}{r}\right)\frac{1}{k_3 r^2 + k_4} \tag{B.7}$$

poi si può applicare la formula

$$y' + a(r)y = b(r) \tag{B.8}$$

$$y = e^{-\int a(r)dr}\left[C + \int b(r) e^{\int a(r)dr} dr\right] \tag{B.9}$$

Quindi

$$\int a(r)dr = \ln \frac{r}{\sqrt{k^3 r^2 + k_4}}$$

Rimane da valutare allora

$$\int b(r) e^{\int a(r)dr} dr = \int \frac{k_1 r^2 + k_2 r^4 + 1}{(k_3 r^2 + k_4)^{\frac{3}{2}}} \tag{B.10}$$

Per risolvere questo integrale bisogna separare i casi rispetto a k_3 e k_4
Se $k_3 > 0$ e $k_4 > 0$ si fa la sostituzione

$$r = \sqrt{\frac{|k_4|}{|k_3|}} \sinh(t) \tag{B.11}$$

Integrando e sostituendo in (B.9) si ottiene

$$y(r) = C\frac{\sqrt{k_3 r^2 + k_4}}{r} + \left[\frac{k_1}{k_3} - \frac{3}{2}\frac{k_2 k_4}{k_3^2}\right]\left[\frac{\sqrt{k_3 r^2 + k_4}}{r\sqrt{k_3}} \text{ArcSinh}\left(r\sqrt{\frac{|k_3|}{|k_4|}}\right) - 1\right] + \frac{1}{k_4} + \frac{k_2}{2k_3} r^2 \tag{B.12}$$

Se $k_3 > 0$ e $k_4 < 0$ si fa la sostituzione

$$r = \sqrt{\frac{|k_4|}{|k_3|}} \cosh(t) \tag{B.13}$$

Integrando e sostituendo in (B.9) si ottiene

$$y(r) = C\frac{\sqrt{k_3 r^2 + k_4}}{r} + \left[\frac{k_1}{k_3} - \frac{3}{2}\frac{k_2 k_4}{k_3^2}\right]\left[\frac{\sqrt{k_3 r^2 + k_4}}{r\sqrt{k_3}} \text{ArcCosh}\left(r\sqrt{\frac{|k_3|}{|k_4|}}\right) - 1\right] + \frac{1}{k_4} + \frac{k_2}{2k_3} r^2 \tag{B.14}$$

Se

$$r = \sqrt{\frac{|k_4|}{|k_3|}} \sin(t) \tag{B.15}$$

Integrando e sostituendo in (B.9) si ottiene

$$y(r) = C\frac{\sqrt{k_3 r^2 + k_4}}{r} + \left[\frac{k_1}{k_3} - \frac{3}{2}\frac{k_2 k_4}{k_3^2}\right]\left[\frac{\sqrt{k_3 r^2 + k_4}}{r\sqrt{k_3}} \text{ArcSin}\left(r\sqrt{\frac{|k_3|}{|k_4|}}\right) - 1\right] + \frac{1}{k_4} + \frac{k_2}{2k_3} r^2 \tag{B.16}$$

Che è quanto scritto nella sezione 4.3.3