



Università degli Studi di Milano

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**I VORTICI NELLE TEORIE DI LONDON
E DI GINZBURG-LANDAU**

Candidato:

Giorgio Guerini Rocco

Matricola 829581

Relatore:

Prof. Luca Guido A. Molinari

Correlatore:

Dott. Marco Antonelli

Anno Accademico 2015–2016

Introduzione

Il 10 Luglio 1908 rappresenta una data fondamentale per la fisica delle basse temperature. Il fisico olandese Heike Kamerlingh Onnes, presso i laboratori dell'università di Leida, compì una serie di esperimenti grazie ai quali riuscì ad ottenere per la prima volta elio allo stato liquido all'incredibile temperatura di 1.1 K . Queste esperienze, considerate tutt'oggi una pietra miliare della fisica sperimentale, diedero il via ad una serie di ricerche sulle proprietà elettriche e magnetiche dei materiali sottoposti a temperature sempre più prossime allo zero assoluto: Kamerlingh Onnes si concentrò soprattutto sulla conduttività e la resistenza elettriche arrivando, anche in maniera un pò fortuita, a scoprire un fenomeno tanto strano quanto affascinante: la *superconduttività*.

L'interesse suscitato nei fisici teorici da questo fenomeno fu notevole: durante il XX secolo si sono susseguiti numerosi tentativi di formulare una teoria valida che riuscisse a spiegare in modo quantitativo il comportamento superconduttivo di certi materiali. Teorie come quella dei fratelli London, di Ginzburg-Landau e la teoria *BCS* sono gli esempi più significativi e che ebbero le maggiori credenziali e visibilità.

La superconduttività ha avuto un forte impatto sulla fisica sperimentale dell'ultimo secolo. Sono numerose le applicazioni pratiche nelle quali vengono utilizzati materiali superconduttivi: dai recenti treni a levitazione magnetica (MagLev), sulla scia dei grandi magneti superconduttori utilizzati per le risonanze magnetiche nucleari (MRI) e dei grandi acceleratori di particelle (*LEP*, *CERN*) sino ai dispositivi *SQUID* (Superconducting Quantum Interference Devices), costituiti da sensibili magnetometri in grado di misurare campi magnetici estremamente deboli.

L'intento di questo elaborato è quello di esporre dettagliatamente il fenomeno della superconduttività: nel primo capitolo si studia la fenomenologia dei superconduttori a far tempo dalle esperienze di Kamerlingh Onnes pervenendo alla teoria elaborata dai fratelli London la cui vera prerogativa consiste nell'aver dato un carattere quantitativo ad ipotesi che sino ad allora avevano esclusivamente una valenza qualitativa; nel secondo capitolo viene esposto il modello di Ginzburg-Landau. Questa teoria, puramente fenomenologica, poiché permeata da un formalismo proprio della termodinamica, riuscirebbe a spiegare sotto il profilo

quantitativo e senza dover scrutare la materia a livello microscopico, tutta una serie di osservazioni sperimentali fatte su materiali superconduttivi.

Nell'ultimo capitolo viene analizzata la principale soluzione delle equazioni di Ginzburg-Landau da un punto di vista analitico, con integrazione del reticolo di vortici di Abrikosov.

Come già accennato, una delle più importanti teorie riguardanti la superconduttività è la teoria *BCS*, denominata in tal modo in onore dei fisici statunitensi J. Bardeen, L. N. Cooper, e J. R. Schrieffer che la elaborarono nel 1956. Il notevole riscontro che ebbe questa teoria scaturisce dal fatto che essa costituì il primo modello microscopico della superconduttività e rappresentò una delle migliori applicazioni delle tecniche sviluppate dalla teoria quantistica "dei molti corpi". Quest'ultima si basa sul principio secondo il quale gli agenti delle supercorrenti elettriche fluenti nei superconduttori non siano gli elettroni bensì le cosiddette **coppie di Cooper**, le quali sono stati legati di elettroni di natura bosonica. Successivamente il fisico russo Lev Gor'kov dimostrò che era possibile dedurre il modello di Ginzburg-Landau quale limite della teoria BCS, ottenendo in tal modo una sorta di conferma della propria validità.

Questo elaborato non si è proposto di configurare analiticamente quest'ultima teoria, la quale assurge a dignità tale da rendersi necessaria una trattazione a se stante ben configurabile solo all'interno dei testi scientifici di competenza.

Indice

1	Fenomenologia dei Superconduttori	6
1.1	Esperimenti di Kamerlingh Onnes	6
1.1.1	Effetti peculiari	9
1.2	Proprietà dei superconduttori	10
1.2.1	Resistività nulla	10
1.2.2	Effetto Meissner-Ochsenfeld	12
1.2.3	Superconduttori di tipo I e II	13
1.2.4	Diamagnetismo	15
1.2.5	Effetto Josephson	17
1.2.6	Capacità Termica	18
1.2.7	Effetto Isotopico	20
1.2.8	Materiali superconduttori	21
1.3	Modello fenomenologico di London	23
1.3.1	Le equazioni di London	23
2	Modello di Ginzburg-Landau	29
2.1	Sistemi omogenei. Transizioni del bulk	30
2.2	Sistemi non omogenei	32
2.3	Modello di Ginzburg-Landau in campo magnetico	35
2.3.1	Quantizzazione del flusso	39
3	Reticolo di vortici di Abrikosov	41
3.1	Esistenza di due classi di superconduttori	41
3.2	L'energia di superficie σ_{ns}	41
3.3	Il reticolo di vortici	45
3.3.1	La transizione di fase ad H_{C2}	45
3.3.2	La soluzione di Abrikosov	47
3.4	Struttura e dinamica dei vortici	57
3.4.1	Vortice isolato	57
3.4.2	Interazione tra due vortici	64

Appendice A	67
Appendice B Teoria di Landau inerente le transizioni di fase del secondo ordine	73
B.1 Generalità relative alle transizioni di fase	73
B.2 Il potenziale $\Phi(\eta)$	76
B.2.1 Osservazioni sui termini dell'espansione	77
Appendice C Proprietà termodinamiche in campo magnetico	79
Bibliografia	88

Capitolo 1

Fenomenologia dei Superconduttori

Questo capitolo tratta le principali caratteristiche ed evidenze sperimentali che riguardano i materiali superconduttori. In sintonia con flashback storici che ho effettuato, vengono in primis illustrati gli esperimenti del fisico olandese Heike Kamerlingh Onnes i quali culminarono nella scoperta della superconduttività. Successivamente vengono prospettate una serie di proprietà peculiari di questi materiali, importanti al punto tale da rappresentarne una sorta di definizione globale. Il capitolo si conclude con l'esposizione della teoria dei fratelli London, la quale costituisce uno dei primi modelli teorici idonei a suggerire previsioni in sintonia con i dati sperimentali ed al contempo coinvolgere gli effetti intrinseci ai superconduttori come ad esempio quello di *Meissner-Ochsenfeld*.

1.1 Esperimenti di Kamerlingh Onnes

La scoperta della superconduttività avvenne nell'ambito della fisica delle basse temperature, che è il settore nel quale operava il fisico Kamerlingh Onnes presso i laboratori dell'università di Leida. Nei primi anni del XX secolo, dopo numerosi tentativi falliti, egli riuscì a far liquefare elementi quali l'idrogeno e l'elio. I motivi che lo indussero ad intraprendere tali esperimenti erano, non solo riconducibili ad un puro interesse scientifico, ma anche soprattutto di natura termometrica alla base della quale vi era l'ambizione di poter produrre termometri sempre più precisi e sensibili. Le temperature cui pervennero Onnes e i suoi collaboratori raggiunsero livelli bassissimi: grazie a ciò, nel 1906, si poté liquefare l'idrogeno ad una temperatura di 14 K ed appena quattro anni dopo fu possibile abbassare l'elio liquido alla inaspettata temperatura di 1.1 K, sicuramente la più bassa per quei tempi.

I risultati straordinari sotto il profilo sperimentale cui pervenne quel gruppo di fisici sono tutti riconducibili alle innovazioni tecniche empiriche con l'ausilio di

strumenti all'avanguardia per quell'epoca. Tutto ciò spalancò letteralmente le porte a quello che sarebbe definitivamente stato il nuovo canale di ricerca a cui ancora oggi tutti noi facciamo riferimento, animati dal desiderio di poter approfondire le proprietà di quei materiali che vengono sottoposti a temperature estremamente vicine allo zero assoluto.

Una delle questioni irrisolte di quel tempo era quella di poter rendersi conto degli effetti sulla resistività ρ dei metalli che sono soggetti a temperature sempre più prossime al valore limite $T = 0 K$. La teoria maggiormente condivisa dalla comunità scientifica del tempo venne formulata da Lord Kelvin molti anni prima degli esperimenti di K. Onnes: egli affermava che la resistenza R dei metalli dovesse diminuire al diminuire della temperatura fino a raggiungere un valore di minimo in corrispondenza di uno specifico valore di T . Superato tale minimo, all'approssimarsi della temperatura a $0 K$, la resistenza avrebbe dovuto rafforzarsi bruscamente sino ad un valore infinito. Si riteneva infatti che per temperature basse la mobilità degli elettroni di conduzione decrescesse a tal punto da rendere nullo il valore della *conduttività* σ del metallo.

Prima della liquefazione dell'elio la temperatura più bassa disponibile era di $14 K$, corrispondente al punto di fusione dell'idrogeno. A questa temperatura Onnes dedicò esperimenti implicanti l'immersione di sottili fili di platino ed oro nell'idrogeno e ne misurò la loro resistenza: l'andamento di $R(T)$ ottenuto interpolando i dati sperimentali sembrava confermare l'ipotesi di Kelvin per cui si potesse pervenire ad un minimo del valore della resistenza. Venne conseguito un altro importante risultato consistente nel fatto che la resistenza assurgeva a valori significativi in rapporto al grado di purezza del materiale: aggiungendo infatti piccole quantità di impurità chimiche, i fili di platino mostravano un incremento della resistenza proporzionale alla concentrazione delle impurità stesse.

Nel 1910, una volta disponibile elio liquido alla temperatura di circa $2 K$, il gruppo di fisici ripeté gli esperimenti su fili di platino. Numerose difficoltà rallentarono il processo di perfezionamento del set up adatto a quella fattispecie di misurazioni. K. Onnes, non essendo particolarmente interessato a realizzare un criostato in grado di contenere il resistore in platino e l'elio liquido senza causarne la simultanea ebollizione, si dedicò egli stesso nel cercare di modificare la strumentazione in modo da poter effettuare sin da subito alcune misure sperimentali.

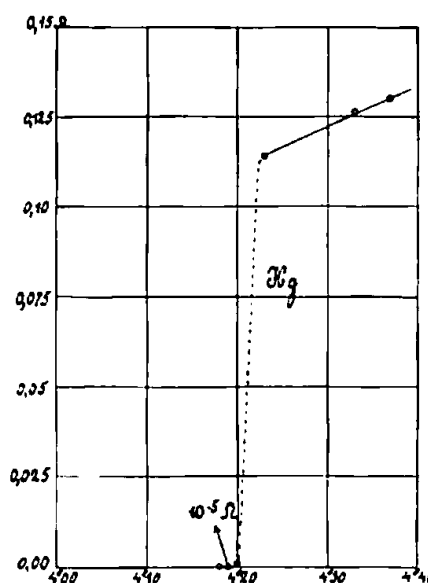
I risultati furono sorprendenti ed inaspettati: sotto i $4.25 K$ la resistenza dei fili si attestò su di un valore costante. Questo fatto contrastò l'ipotesi di Kelvin circoscritta all'esistenza di un valore minimo per $R(T)$. Il valore residuo della resistenza era connaturato, secondo Onnes, alle impurità presenti nel platino. Ci si aspettava di trovare un valore nullo di resistenza per temperatura $T = 0 K$.

L'esperimento indusse il team a ritenere di aver scoperto un nuovo fenomeno: ciò fu infatti confermato nel momento stesso in cui furono eseguite ulteriori

misurazioni con il mercurio, elemento all'epoca disponibile con un alto grado di purezza presso i laboratori di Leida. L'8 Aprile 1911 Onnes riferì i risultati di un esperimento a fronte del quale il nuovo campione poteva essere raffreddato ad una temperatura di 3 K . Le sue esatte parole furono "*The temperature measurement was successful, practically zero.*", attribuite alla resistività raggiunta dal mercurio.

In quelle condizioni, continuò il fisico olandese, risultava alquanto difficile controllare la temperatura dell'elio. Si procedette ad un'ulteriore raffreddamento ma, prima di raggiungere i 2 K , l'elio si restrinse improvvisamente per poi constatarne una violenta evaporazione sulla superficie. Senza esserne consci il gruppo aveva a tutti gli effetti osservato per la prima volta nella storia la transizione superfluida dell'elio liquido. Fu così che si poté osservare due differenti transizioni quantistiche.

Figura 1.1: Grafico che evidenzia i valori di resistenza assunti dal campione di mercurio per vari valori della temperatura T . Si noti come in un intervallo di soli 0.01 K nei pressi della transizione la temperatura crolla da $0.1\ \Omega$ a circa $10^{-5}\ \Omega$.



La figura 1.1 riporta l'andamento della resistenza R del mercurio in funzione della temperatura, mostrando chiaramente la transizione superconduttiva a circa 4.2 K .

Quando Onnes espose i risultati delle sue ricerche all'Accademia delle Scienze olandese, sottolineò il fatto che il proprio modello di "*supraconductivity*" (così chiamata dal Fisico inizialmente) potesse anticipare ben tre previsioni:

1. La resistenza del mercurio a 4.3 K doveva essere minore della resistenza a 14 K ;
2. Essa doveva ancora dipendere dalla temperatura;
3. A temperature prossime allo zero assoluto la resistenza avrebbe dovuto essere nulla.

Un aspetto interessante degli esperimenti di Onnes è costituito dalla modalità con cui sono stati eseguiti: una volta raffreddato il mercurio a 3 K , il team esplorò temperature intorno ai 4.3 K procedendo nella direzione positiva step by step, osservando nel contempo la transizione a circa 4.12 K . Il motivo che li indusse a procedere incrementando la temperatura invece che diminuirla, deve essere cercato nel tentativo di rimanere nella possibilità di gestire un maggiore controllo da parte dei medesimi.

1.1.1 Effetti peculiari

Consapevole di aver effettuate una scoperta fenomenologica alquanto rilevante, K. Onnes iniziò ad occuparsi delle attinenti proprietà elettriche, chimiche e magnetiche dei materiali che avrebbero dovuto confrontarsi in sede di transizione superconduttiva. Nel 1913 avendo studiato in maniera capillare le diverse leghe del mercurio, egli constatò che la resistenza di tali materiali subiva la stessa repentina caduta del mercurio puro. Questo fatto dimostrò che non solo i materiali puri ma anche le leghe metalliche erano in grado di divenire superconduttori.

Successivamente gli scienziati scoprirono che anche lo stagno e il piombo risultavano possedere una *temperatura critica* T_C (rispettivamente 4 K e 6 K) al di sotto della quale essi diventavano superconduttori. Il mercurio pertanto non costituiva più l'unico materiale definito superconduttore a disposizione degli addetti ai lavori e conseguentemente poté essere più facile elaborare esperimenti in relazione alla natura dei suddetti materiali.

Inevitabile che tale scoperta indusse Onnes a tentare di escogitare le relative possibili applicazioni. Egli ambì di poter costruire alcune bobine superconduttrici le cui proprietà potessero generare campi magnetici dell'ordine dei 10 Tesla, valore alquanto complesso da ottenere in un laboratorio. Suo malgrado Onnes scoprì che i materiali superconduttori da lui testati erano caratterizzati da uno specifico *campo magnetico critico* H_C : sottoponendo il campione ad un campo magnetico $H > H_C$, il materiale ritornava nella propria fase normale. In relazione al piombo si pervenne ad un valore di H_C pari a 600 Gauss ($1\text{ G} = 10^{-4}\text{ T}$), ben lontano dai 10 Tesla inizialmente supposti.

Provando a misurare la microresistenza residua in diversi materiali superconduttivi, Onnes si trovò a fronteggiare un'altra loro interessante quanto peculiare caratteristica: *le correnti persistenti*. Con l'ausilio infatti di una bobina di piombo nella fase superconduttiva, egli riuscì ad indurre elettromagneticamente al suo interno una corrente; subito dopo aver rimosso la sorgente di campo magnetico ne misurò il decadimento nel tempo. Si pervenne in tal modo a constatare la non diminuzione nel tempo delle correnti le quali al contrario rimanevano assestate sui valori originari senza che gli strumenti di misura ne indicassero cambiamenti apprezzabili. Più tardi fu accertata la possibilità di mantenere correnti di 200

A circolanti in anelli superconduttori per diversi giorni, in completa assenza di attenuazioni.

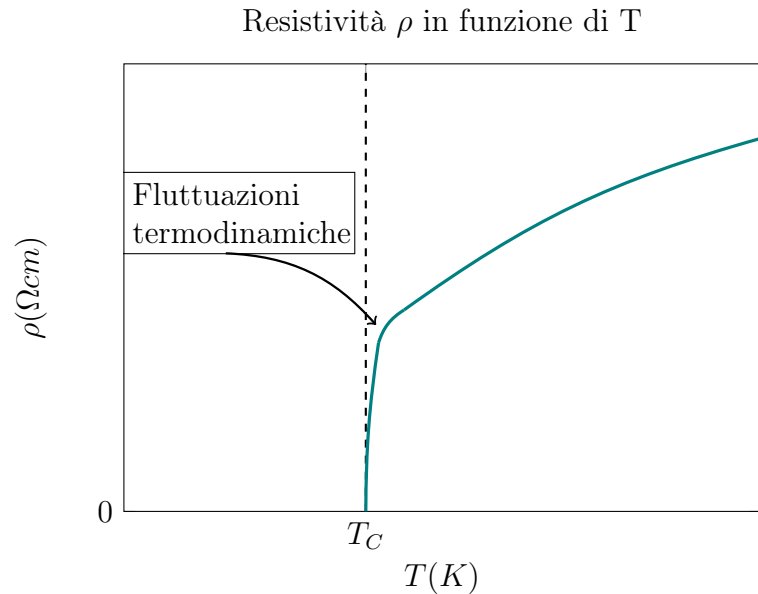
1.2 Proprietà dei superconduttori

Rammento le principali caratteristiche dei materiali superconduttori e per far ciò coinvolgono senza tema le equazioni di Maxwell che come è noto governano i fenomeni elettromagnetici.

1.2.1 Resistività nulla

Come osservato sperimentalmente da Onnes un superconduttore è caratterizzato dall'aver una resistività ρ **esattamente** nulla.

Figura 1.2: Il comportamento di $\rho(T)$ è approssimativamente lineare per temperature $T > T_C$ (trascurando correzioni del 2° ordine). Avvicinandosi alla temperatura critica si nota una leggera curvatura dovuta essenzialmente a fluttuazioni associate alla transizione superconduttiva.



La figura 1.2 mostra l'andamento qualitativo della resistività $\rho(T)$ in funzione della temperatura per un superconduttore, evidenziando la transizione di fase superconduttiva alla temperatura critica T_C .

L'immediata conseguenza di questo fatto è che la conducibilità σ del materiale assume un valore infinito e per mantenere sensata la relazione costitutiva $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ è necessario che il campo elettrico all'interno del superconduttore sia identicamente nullo:

$$\mathbf{E} = 0. \tag{1.1}$$

Questo porta alla conclusione che vi è circolazione di corrente in assenza di campo elettrico nel superconduttore.

La transizione termodinamica in esame risulta essere del **II ordine** tra la fase normale ($T > T_C$) e quella superconduttiva ($T < T_C$). Per la maggior parte dei superconduttori la resistività diviene improvvisamente nulla (in modo discontinuo) alla temperatura critica. In alcuni casi, per esempio nei superconduttori ad alte temperature recentemente scoperti, a causa di fluttuazioni associate alla transizione, la resistività decresce in modo continuo prima di diventare zero. In tal caso si definisce temperatura critica quella per la quale viene soddisfatta la relazione

$$\rho = 0. \quad (1.2)$$

Si sarebbe indotti a ritenere che quest'ultima proprietà sia la corretta definizione di superconduttività. Tuttavia in laboratorio, stante la sensibilità finita degli strumenti, risulta difficile distinguere un valore nullo di resistività da un valore diverso da zero ma estremamente piccolo. Mi riferisco ai vari metodi sperimentali che accertano la validità della relazione (1.2), se non che il miglior modo per assumere la certezza consiste nell'osservare le già menzionate **correnti persistenti**. E' dimostrato che tali correnti non sono suscettibili di alcun tipo di resistenza. Inoltre non dissipano energia e conseguentemente non decadono mai.

Si consideri un anello di materiale superconduttivo di area S e contorno C . Se nella regione dove è presente il superconduttore si applica un campo magnetico esterno \mathbf{B}_{ext} esso genererà un flusso attraverso l'anello definito da

$$\Phi(\mathbf{B}_{ext}) = \int_S \mathbf{B}_{ext} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.3)$$

dove $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}d\sigma$: \mathbf{n} è il versore normale alla superficie S e $d\sigma$ è l'elemento infinitesimo di superficie. Dalla terza equazione di Maxwell (legge dell'induzione) sappiamo che

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Applicando il teorema di Stokes e la definizione di flusso data dall'equazione (1.3) otteniamo

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.5)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.6)$$

La relazione (1.6) deve valere per ogni cammino chiuso che circonda l'area dell'anello. Optando per un cammino interno al superconduttore, nel quale è nullo il campo elettrico, deve sussistere la relazione

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad (1.7)$$

per cui il flusso attraverso S dovrà rimanere costante nel tempo. In forza di quest'ultima relazione si è sufficientemente indotti a ritenere come si possa indurre correnti persistenti all'interno di un superconduttore. Si consideri ancora il nostro anello inizialmente nella sua fase normale. Si applichi un campo magnetico esterno in modo da generare un flusso Φ attraverso la sua superficie. Una volta raffreddato il materiale al di sotto della temperatura critica esso diventa superconduttore e quindi dovrà valere la relazione (1.7). Se ora blocchiamo la sorgente del campo magnetico esterno, si constaterà che l'unico modo con cui Φ potrà rimanere costante sta nel generare nel superconduttore correnti tali da produrre un campo magnetico, quindi un flusso attraverso S , uguale al precedente. Tale flusso sarà costante nel tempo e pertanto lo saranno anche le correnti, per cui appare pienamente giustificata la denominazione "persistenti". Esperimenti recenti hanno mostrato che queste correnti sono in grado di circolare per anni senza subire alcuna attenuazione.

1.2.2 Effetto Meissner-Ochsenfeld

Le modalità grazie alle quali si è addivenuti alla scoperta della superconduttività potrebbero far ritenere che la definizione di superconduttore sia un materiale che possiede una conducibilità elettrica infinita, o analogamente, una resistività nulla.

Nella realtà potremmo immaginare un materiale metallico, totalmente privo di impurezze, la cui resistività tenda a zero all'abbassarsi della temperatura in modo continuo e senza dare evidenze di una qualche transizione di fase. Tale materiale, nonostante possieda una resistività nulla per temperatura $T = 0 K$, non sarebbe classificato come superconduttore per la non esistenza di una temperatura critica e quindi di una fase superconduttiva.

La definizione universalmente accettata di superconduttore è quel materiale che esibisce l'effetto **Meissner-Ochsenfeld**.

Si consideri, per semplicità, un cilindro di materiale superconduttore ad una temperatura $T > T_C$ in una regione dove è possibile applicare un campo magnetico esterno \mathbf{B}_{ext} . Inizialmente il materiale si trova nella fase normale e $\mathbf{B}_{ext} = 0$. Ora supponiamo di raffreddare il cilindro portandolo nella fase superconduttiva. Come abbiamo visto, il campo elettrico \mathbf{E} deve essere nullo al suo interno: in funzione della relazione (1.4) possiamo scrivere

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.8)$$

ovvero il campo magnetico all'interno del superconduttore dovrà rimanere costante. Poiché esso è invece nullo inizialmente, il campo magnetico all'interno del corpo dovrebbe rimanere tale anche dopo che viene attivata la sorgente del campo esterno, stante la relazione (1.8).

Per cui si prendano in considerazione le operazioni svolte nell'ordine inverso: prima si dovrà applicare il campo magnetico esterno \mathbf{B}_{ext} , il quale permea il corpo che si trova ancora nella fase normale. Dopodiché portiamo il materiale alla fase superconduttiva. Ciò che si potrà osservare è che il campo magnetico verrà **espulso** dal corpo.

La rimozione di \mathbf{B}_{ext} è ciò che si definisce effetto **Meissner-Ochsenfeld**. Quest'ultimo non potrà essere semplicemente dedotto dalla relazione (1.2), perciò dovrà essere considerato alla stregua di un fenomeno del tutto nuovo e più significativo. Da un punto di vista empirico possiamo osservare che questo effetto risulta molto più semplice da maneggiare rispetto al misurare la resistività di un materiale superconduttivo: basterà semplicemente sondare la regione adiacente al corpo con un ago magnetico per osservare la curvatura delle linee di campo.

Notiamo che a prescindere dall'ordine con il quale vengono svolte le operazioni descritte, lo stato finale risulta essere il medesimo. Pertanto l'effetto Meissner-Ochsenfeld stabilisce una proprietà di equilibrio termico che non dipende dalla storia passata del materiale superconduttore.

1.2.3 Superconduttori di tipo I e II

Sul piano sperimentale l'effetto Meissner-Ochsenfeld si manifesta nei materiali superconduttori sottoposti a campi magnetici sufficientemente piccoli. Si consideri, per semplicità, un cilindro (infinitamente esteso) di materiale superconduttore immerso in un campo magnetico \mathbf{H} ad esso parallelo. Ove il cilindro risultasse essere superconduttivo ad una certa temperatura T ed a campo $\mathbf{H} = 0$, ne risulterà un unico valore di $H = H_C(T)$, detto campo magnetico **critico** (a quella specifica temperatura) oltre il quale il cilindro tornerà alla fase normale. Il processo è reversibile nel senso che quando $H < H_C(T)$ il materiale tornerà alla fase superconduttiva.

Con una analogia verificheremo come la dipendenza del campo critico dalla temperatura stia nella forma

$$\frac{H_C(T)}{H_C(0)} = \left[1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^2 \right] \quad (1.9)$$

ove $H_C(0)$ è il campo critico alla temperatura $T = 0$ K.

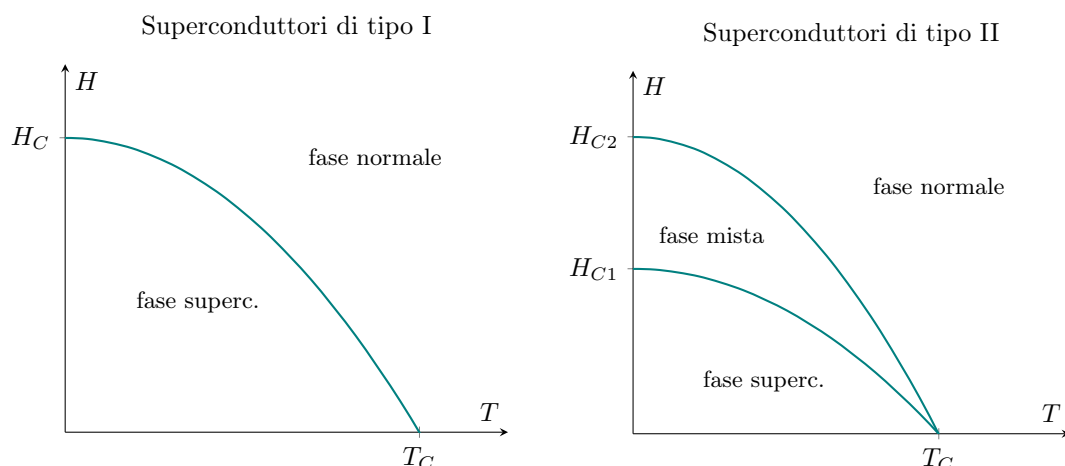


Figura 1.3

I materiali per i quali l'applicazione di un campo magnetico $H > H_C(T)$ provoca la scomparsa della fase superconduttiva sono detti superconduttori di **I tipo**.

Esiste poi tutta una serie di superconduttori che si comportano in modo diverso rispetto ai precedenti. In tal caso è possibile identificare due diversi campi critici, detti rispettivamente campo magnetico **critico inferiore** $H_{C1}(T)$ e campo magnetico **critico superiore** $H_{C2}(T)$. Per campi $H < H_{C1}(T)$ questi materiali si comportano esattamente come i superconduttori di I tipo, estrinsecando l'effetto Meissner-Ochsenfeld e aventi campo \mathbf{B} nullo al loro interno. La differenza sostanziale emerge quando si applica un campo magnetico esterno $H_{C1} < H_{ext} < H_{C2}$. Nel caso del I tipo la superconduttività scompare. In questo caso invece emerge una fase **mista** ove il flusso di H_{ext} penetra il materiale e perciò il campo magnetico \mathbf{B} al suo interno non è più identicamente nullo. Quando H_{ext} supera anche H_{C2} , la superconduttività è annullata anche in questo secondo caso.

Questi superconduttori sono detti di **II tipo**. Il diagramma di fase per le due tipologie di superconduttore è mostrato in figura 1.3.

Non appena potrò chiarire tutto ciò nel momento in cui discuteremo la soluzione di Abrikosov delle equazioni di Ginzburg-Landau, si potrà evincere il modo in cui il flusso del campo magnetico esterno attraversa il superconduttore, con ciò creando un **reticolo di vortici**. A sua volta il vortice è costituito da un nucleo, localizzato a livello delle impurità, in cui il materiale si trova nella fase normale; intorno a questa piccola regione circolano delle supercorrenti tali da impedire al campo magnetico esterno di penetrare il materiale all'infuori di questi nuclei. Il corpo si trova quindi in una fase mista, superconduttivo in tutto il suo volume tranne che in un reticolo periodico di "buchi" dove il campo può penetrare.

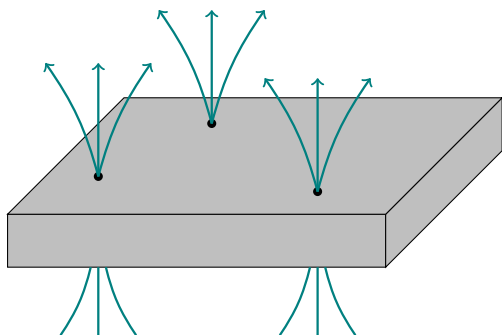


Figura 1.4: Vortici in un superconduttore di tipo II. Il campo magnetico esterno \mathbf{H} penetra all'interno del materiale attraverso dei *tubi di flusso*, all'interno dei quali il metallo è nella fase normale. I *core* dei tubi si formano dove sono presenti delle impurità e si dispongono formando un reticolo (*reticolo di Abrikosov*).

Nella figura 1.4 è possibile visualizzare quest'ultima situazione. Si osservi che il campo critico H_{C1} risulta essere in genere di poche centinaia di Gauss (molto piccolo). D'altra parte il campo H_{C2} può raggiungere valori di decine di Tesla. Per questo motivo i superconduttori di secondo tipo sono quelli più utilizzati a livello industriale e tecnologico.

1.2.4 Diamagnetismo

Per mostrare le proprietà diamagnetiche di un superconduttore consideriamo un solenoide ideale (infinitamente esteso), caratterizzato da un numero di spire per unità di lunghezza $n = \frac{N}{l}$. Il campo magnetico \mathbf{H} prodotto all'interno del solenoide è dato dall'espressione $\mathbf{H} = nI\mathbf{k}$ dove I è la corrente circolante nelle spire e \mathbf{k} è il versore che identifica l'asse del solenoide. Tale campo magnetico viene considerato **uniforme** per l'ipotesi di idealità del solenoide.

Richiamiamo ora brevemente alcune proprietà delle equazioni di Maxwell. A causa dell'effetto Meissner-Ochsenfeld il superconduttore deve mantenere nullo il campo di induzione magnetica \mathbf{B} al suo interno. Per far ciò, oltre alle correnti esterne che circolano nelle spire, deve produrre delle correnti interne di *magnetizzazione* \mathbf{J}_{mag} che si andranno a sommare alle precedenti secondo la relazione

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_{mag}. \quad (1.10)$$

La magnetizzazione del materiale è definita dall'equazione $\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_{mag}$. La relazione che lega il campo magnetico, l'induzione magnetica e la magnetizzazione è la seguente:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (1.11)$$

Le equazioni di Maxwell sono inoltre accompagnate da condizioni al contorno che determinano la variazione dei campi \mathbf{B} ed \mathbf{H} sulla superficie del mezzo:

$$\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1t} = H_{2t} \end{cases} \quad (1.12)$$

ovvero si conservano la componente normale di \mathbf{B} alla superficie e la componente tangente di \mathbf{H} . Nel nostro caso specifico, imponendo la condizione $\mathbf{B} = 0$ nel superconduttore, riscriviamo la relazione (1.11) come

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H}. \quad (1.13)$$

La *Suscettività magnetica* χ_m vale di conseguenza:

$$\chi_m = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H=0} = -1. \quad (1.14)$$

(equivalentemente la permeabilità magnetica del mezzo vale $\mu_r = \chi_m + 1 = 0$). Materiali che possiedono una suscettività magnetica negativa sono detti *Diamagneti*. La magnetizzazione è opposta al campo esterno \mathbf{H} , perciò vi è un effetto di *schermo* nel mezzo. Ne caso dei superconduttori $\chi_m = -1$, quindi vi è **completa** schermatura del campo esterno, con il risultato che $\mathbf{B} = 0$. Per questa loro proprietà i superconduttori vengono definiti **Diamagneti perfetti**.

La suscettività magnetica non è in generale una funzione costante; essa dipende dalle caratteristiche del mezzo, dal suo grado di omogeneità, dal suo stato di isotropia e dal campo magnetico esterno. E' utile visualizzare l'andamento di $M(H)$ (e indirettamente anche la variazione di $\chi_m = \frac{dM}{dH}$) nel caso di superconduttori di tipo I e II.

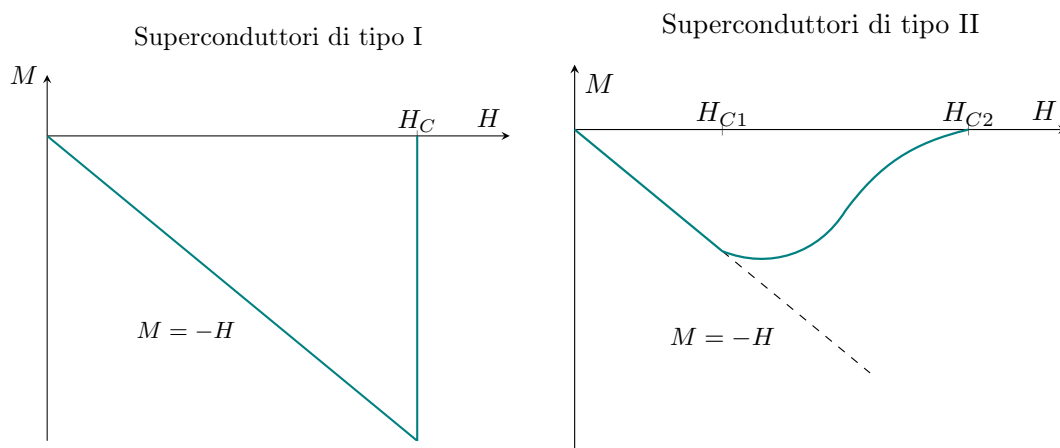


Figura 1.5

Vediamo come nei superconduttori di I tipo la suscettività $\chi_m = -1$ fintanto che si è nella fase superconduttiva. Quando $H > H_C$ il mezzo transisce alla fase normale e la suscettività cambia in maniera discontinua.

Per i materiali di II tipo, fintanto che $H < H_{C1}$ si ritrova la situazione precedente. Nel momento di cui $H_{C1} < H < H_{C2}$, parte del campo magnetico esterno comincia a penetrare nel superconduttore attraverso i vortici di Abrikosov, il campo B inizia ad aumentare all'interno del mezzo e perciò la magnetizzazione (e quindi la suscettività) cresce in maniera continua.

Le proprietà diamagnetiche di un superconduttore sono molto importanti dal punto di vista sperimentale; per verificare che un mezzo materiale si trova nella fase superconduttiva, invece di misurarne la resistività elettrica, si va a misurare la sua suscettività magnetica.

1.2.5 Effetto Josephson

Una delle conseguenze più importanti della teoria BCS, confermata poi sperimentalmente, è l'esistenza del cosiddetto **effetto Josephson**.

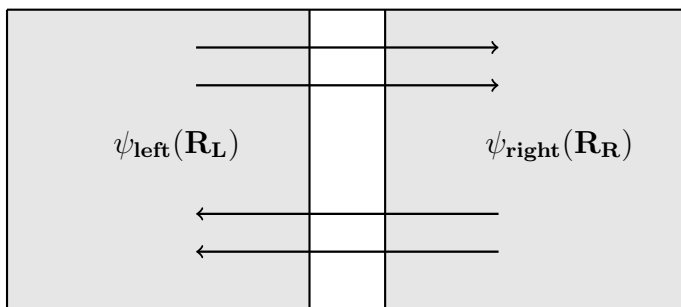


Figura 1.6: Schema di una giunzione Josephson. Le coppie di Cooper possono passare attraverso la striscia isolante per effetto tunnel quantistico. Se θ_L e θ_R sono le fasi delle funzioni d'onda dei due superconduttori, la corrente che scorre nella giunzione è proporzionale alla differenza $(\theta_L - \theta_R)$.

Consideriamo due mezzi superconduttori separati da una striscia di materiale isolante, come mostrato in figura 1.6. Nello schema della teoria BCS viene assegnata a ciascun superconduttore una funzione d'onda macroscopica: siano esse $\psi_{\text{left}}(\mathbf{R}_L)$ per il superconduttore di sinistra e $\psi_{\text{right}}(\mathbf{R}_R)$ per quello di destra.

Nel 1962 Brian David Josephson considerò la possibilità che degli elettroni potessero passare da un superconduttore all'altro per effetto tunnel. Sfruttando le funzioni d'onda sopra definite ed uno sviluppo perturbativo al secondo ordine, il fisico gallese ottenne un risultato notevole: è possibile che una corrente scorra attraverso la giunzione. Josephson ottenne per tale corrente l'espressione

$$I = I_C \sin(\Delta\theta), \quad (1.15)$$

dove I_C , detta **corrente critica**, è la massima corrente che può scorrere nella giunzione e $\Delta\theta$ è lo sfasamento tra le due funzioni d'onda $\psi_{\text{left}}(\mathbf{R}_L)$ e $\psi_{\text{right}}(\mathbf{R}_R)$.

Per $I < I_C$ la corrente Josephson scorre senza incontrare alcuna resistenza e perciò è di fatto una *supercorrente*. Se invece $I > I_C$ ai capi della giunzione si instaura una differenza di potenziale V e in tal caso le funzioni d'onda diventano dipendenti dal tempo. Josephson, utilizzando delle equazioni analoghe a quelle del moto di Heisenberg, trovò che la corrente circolante nella giunzione diventava *oscillante*. La sua espressione è

$$I = I_C \sin\left(\Delta\theta(0) + \frac{2eV}{\hbar}t\right), \quad (1.16)$$

dove $\Delta\theta(0)$ è lo sfasamento iniziale delle funzioni d'onda e $\omega_J = \frac{2eV}{\hbar}$ è la frequenza di oscillazione, detta **frequenza Josephson**. L'effetto Josephson consiste proprio nell'esistenza di questa corrente alternata passante attraverso la giunzione. L'importanza dell'effetto è notevole: la sua osservazione sperimentale conferma la validità della teoria BCS e l'esistenza delle cosiddette coppie di Cooper (nell'espressione della frequenza Josephson la carica presente è $2e$ e non e). L'effetto Josephson viene sfruttato in numerose applicazioni pratiche, tra le quali la produzione di anelli SQUID, speciali dispositivi in grado di misurare campi magnetici molto piccoli.

Un'ultimo fatto da sottolineare è l'importanza della relazione $\omega_J = \frac{2eV}{\hbar}$: questa equazione ci dà l'**esatta** espressione della frequenza di oscillazione della corrente. La grande accuratezza con cui è possibile conoscere tale ω_J ha fatto sì che l'effetto Josephson fosse incluso nell'insieme delle misure effettuate per definire il sistema internazionale di unità di misura (SI).

1.2.6 Capacità Termica

Per determinare l'espressione della capacità termica di un superconduttore si consideri una geometria particolarmente semplice: un cilindro di materiale superconduttore immerso in un campo magnetico \mathbf{H} uniforme e parallelo ad esso, la stessa configurazione scelta per determinarne le proprietà diamagnetiche.

La **densità di energia interna** $u = \frac{dU}{dV}$ (energia per unità di volume), in forma differenziale risulta essere

$$du = T ds + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}^1 \quad (1.17)$$

dove T è la temperatura, s la densità di entropia (entropia specifica) e \mathbf{B} il campo di induzione magnetica all'interno del cilindro.

¹Nell'espressione di du il primo termine è il contributo termodinamico mentre il secondo è il contributo dell'energia magnetica. Per maggiori dettagli si veda l'appendice A.

Il problema legato all'espressione (1.17) è che il campo \mathbf{B} è generato dalle correnti esterne e da quelle di magnetizzazione. Su quest'ultime non è possibile avere alcun controllo: è necessario costruire una trasformazione canonica che porti ad avere la variazione infinitesima di \mathbf{H} .

Operando con le definizioni di *energia libera di Helmholtz* e *potenziale di Gibbs* possiamo scrivere ²

$$\begin{cases} f = u - Ts & \implies df = -sdT + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \\ g = f - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} & \implies dg = -sdT - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \end{cases} \quad (1.18)$$

dove f e g sono rispettivamente il potenziale di Helmholtz e di Gibbs. In presenza di campo \mathbf{H} debole è possibile calcolare la variazione macroscopica del potenziale di Gibbs:

$$\Delta g = g(T, H) - g(T, 0) = - \int_0^H B(H) dH. \quad (1.19)$$

La relazione $B(H)$ risulta semplice solo nel caso di materiali isotropi, omogenei e non ferromagnetici. In due casi semplici la relazione (1.19) si riduce a ³

$$g(T, H) - g(T, 0) = \begin{cases} 0, & \text{nella fase S.} \\ -\frac{\mu_0}{2} H^2, & \text{nella fase N.} \end{cases} \quad (1.20)$$

A fissata temperatura T il superconduttore è caratterizzato da un certo campo critico $H_C(T)$. In corrispondenza della curva che separa la fase normale da quella superconduttiva (vedi figura 1.3) la variazione del potenziale g deve essere nulla ⁴

$$g_n(T, H_C(T)) = g_s(T, H_C(T)) = g_s(T, 0) = g_s(T, H)^5 \quad (1.21)$$

Valutiamo ora la variazione di g tra la fase normale e quella superconduttiva:

$$\begin{aligned} g_s(T, H) - g_n(T, H) &= g_n(T, H_C(T)) - g_n(T, H) \\ &= g_n(T, H_C(T)) - g_n(T, H) - g_n(T, 0) + g_n(T, 0) \\ &= -\frac{\mu_0}{2} H_C^2(T) + \frac{\mu_0}{2} H^2 \\ &= \frac{\mu_0}{2} (H^2 - H_C^2(T)). \end{aligned} \quad (1.22)$$

²Il potenziale di Gibbs si ottiene da quello di Helmholtz facendone la trasformata di Legendre.

³La fase N indica un materiale non ferromagnetico e privo di magnetizzazione, dove sussiste la banale relazione $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

⁴In una trasformazione reversibile nella quale sono costanti la pressione e la temperatura si conserva il potenziale di Gibbs.

⁵Il potenziale di Gibbs per la fase superconduttiva non dipende dal campo H , come mostrato nella relazione (1.20).

Calcoliamo l'entropia specifica $s = \frac{\partial g}{\partial T} \Big|_H$.

$$\begin{aligned} \Delta s &= -\frac{\partial}{\partial T}(g_s - g_n) = -\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\mu_0}{2} (H^2 - H_C^2(T)) \right] \\ &= \mu_0 H_C(T) \frac{\partial H_C(T)}{\partial T}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Osserviamo che al di sotto della temperatura critica, riferendosi sempre alla figura 1.3, l'espressione (1.23) risulta negativa o nulla. Per campo $H = 0$, si definisce **energia di condensazione** la quantità

$$E_{cond} = g_s(T, 0) - g_n(T, 0) = -\frac{\mu_0}{2} H_C^2(T) \quad (1.24)$$

che corrisponde al guadagno in energia libera per unità di volume nella fase superconduttiva rispetto a quella normale alla stessa temperatura T ⁶. Calcoliamo ora la variazione della capacità termica (per unità di volume) tra la fase normale e quella superconduttiva:

$$c_s - c_n = T \frac{\partial}{\partial T}(\Delta s) = \mu_0 T \left[\left(\frac{\partial H_C(T)}{\partial T} \right)^2 - H_C(T) \frac{\partial^2 H_C(T)}{\partial T^2} \right]. \quad (1.25)$$

Alla temperatura critica, $H_C(T) = 0$ e l'espressione si riduce a

$$\boxed{c_s - c_n = \mu_0 T \left(\frac{\partial H_C(T)}{\partial T} \right)^2 \geq 0} \quad (1.26)$$

L'equazione (1.26) mostra chiaramente come vi sia una discontinuità a salto nella capacità termica in corrispondenza della transizione di fase. Nella figura 1.7 è mostrato il diagramma schematico dell'andamento della capacità termica in funzione della temperatura.

1.2.7 Effetto Isotopico

Una delle ultime caratteristiche distintive dei superconduttori è il cosiddetto **effetto isotopico**. Consideriamo un campione di materiale puro in grado di transire alla fase superconduttiva. Se effettuiamo su di esso misure di cristallografia⁷ notiamo che non vi sono differenze tra la fase normale e quella superconduttiva.

⁶Nello schema BCS l'energia di condensazione rappresenta l'energia delle coppie di Cooper ad una data temperatura T .

⁷La cristallografia è quella branca della fisica che si occupa dello studio della distribuzione geometrica delle varie parti componenti un cristallo.

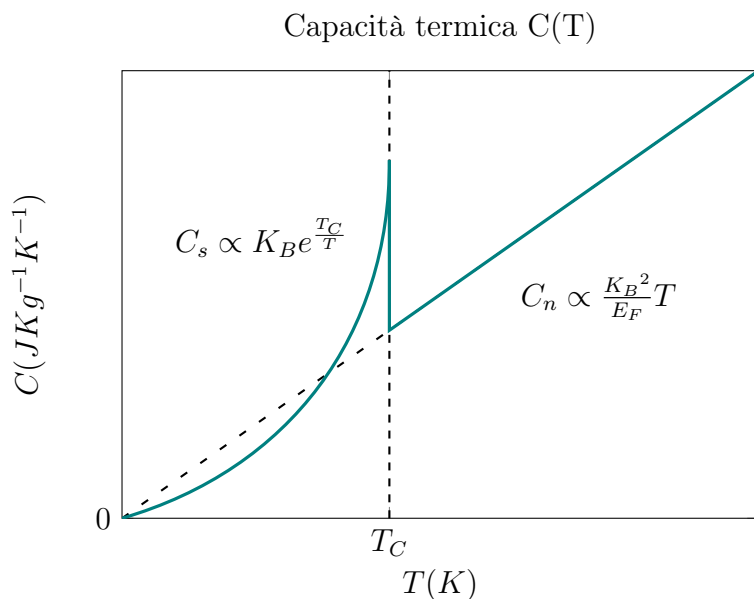


Figura 1.7: Andamento (qualitativo) del contributo elettronico alla capacità termica in funzione della temperatura T . E_F indica l'energia di Fermi. Al di sopra della transizione il comportamento di $C(T)$ è lineare. Al di sotto di T_C è approssimativamente esponenziale.

Sostituiamo ora il campione con un altro costituito da un isotopo puro dell'elemento iniziale. Studi approfonditi mostrano come il reticolo di isotopi modifichi in maniera non trascurabile la temperatura critica del materiale, secondo la relazione

$$T_C \propto M^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.27)$$

dove M è la massa dell'isotopo superconduttore. Questo risultato è molto importante perché mostra il ruolo centrale che gioca l'attrazione elettrone-fonone nella formazione di stati legati per le coppie di Cooper (per approfondire si veda [7]).

1.2.8 Materiali superconduttori

Una volta esaminate le proprietà fondamentali di un superconduttore è utile visualizzare degli esempi di suddetti materiali. In tabella 1.1 ne sono riportati alcuni con le relative temperature critiche. Tra gli elementi della tavola periodica ve ne sono molti in grado di transire alla fase superconduttiva. Alcuni di essi sono il mercurio, lo stagno, il piombo e il niobio. Quest'ultimo possiede la temperatura critica più elevata (9.2 K) tra gli elementi puri. È interessante notare anche quali siano gli elementi che non diventano superconduttori: oro, argento e rame appartengono a suddetta categoria. Emergerà subito un fatto singolare: alcuni materiali, classificati come ottimi conduttori, non mostrano alcuna evidenza di superconduttività. Al contrario, materiali noti per essere cattivi conduttori o addirittura isolanti, possiedono una ben definita fase superconduttiva.

Tabella 1.1

<i>Materiale</i>	T_C (K)	
<i>Al</i>	1.175 ± 0.002	
<i>Hg</i>	4.154 ± 0.001	Primo superconduttore, scoperto nel 1911
<i>Nb</i>	9.25 ± 0.02	T_C più alta per un elemento puro
<i>Pb</i>	7.196 ± 0.006	
<i>Zn</i>	0.85 ± 0.01	
<i>Zr</i>	0.61 ± 0.15	
<i>Fe</i>	2	Alta pressione
<i>H</i>	300	Predetto, ad alta pressione
<i>O</i>	30	T_C massima ad alta pressione
<i>S</i>	10	Alta pressione
$La_{2-x}Ba_xCuO_4$	35	Primo superconduttore ad alta temperatura
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+\delta}$	135 – 165	T_C più alta mai registrata
$YBa_2Cu_3O_7$	92	Primo superconduttore sopra i 77 K
YNi_2B_2C	17	Superconduttore al boro-carbonio
Cs_3C60	40	Superconduttore al fullerene
<i>ET – BEDT</i>	12	Superconduttore a base organica
Sr_2RuO_4	1.5	Superconduttore a "fermioni pesanti"

Un'altra categoria importante è quella dei superconduttori ad alte pressioni: molti materiali, come ossigeno e zolfo, sottoposti ad enormi pressioni, diventano metallici e superconduttivi a temperature decisamente alte. Un caso analogo è quello dei materiali magnetici. E' noto che il magnetismo previene la superconduttività. Se tali materiali sono sottoposti a grandi pressioni è possibile identificare una fase non magnetica in cui è possibile avere la superconduttività. Questo comportamento è tipico nel ferro. Teoricamente è stato supposto che l'idrogeno possa diventare superconduttivo alla temperatura di 300 K se sottoposto ad enormi pressioni.

Nel 1986 i fisici G. Bednorz e A. Müller scoprirono che uno speciale composto chiamato $La_{2-x}Ba_xCuO_4$, per $x \simeq 0.15$, diventava superconduttivo ad una temperatura critica di circa 38 K. Poco dopo venne scoperto che il composto $YBa_2Cu_3O_7$ raggiungeva la fase superconduttiva a $T_C = 92$ K. Queste scoperte aprirono la strada ad un nuovo campo di ricerca: lo studio dei cosiddetti *superconduttori ad alte temperature*. L'obiettivo sarà quello di poter ottenere materiali che diventino superconduttivi a temperatura ambiente, potendo essi essere impiegati in alcune applicazioni tecnologiche.

La lista dei superconduttori non si chiude qui: esistono materiali esotici in cui è

possibile osservare la coesistenza di una fase magnetica e di quella superconduttiva, materiali a base organica, materiali anisotropi con una struttura a strati e molti altri ancora.

1.3 Modello fenomenologico di London

Il primo tentativo di sviluppare una teoria elettrodinamica dei superconduttori venne effettuato dai fratelli H. London e F. London nel 1935. La teoria cercava di pervenire ad un'espressione in forma matematica delle principali proprietà dei superconduttori fino a quel momento osservate: l'assenza di resistività e l'effetto Meissner-Ochsenfeld. Il modello fenomenologico così sviluppato cercava di studiare le caratteristiche dei superconduttori a livello macroscopico, senza considerare quali potessero essere i meccanismi microscopici agenti nell'ambito della superconduttività.

La teoria dei fratelli London venne successivamente ampliata dal fisico britannico Brian Pippard. Ritengo sia il caso di sorvolare su questo argomento laddove il relativo approfondimento è confinato alla referenza [6].

1.3.1 Le equazioni di London

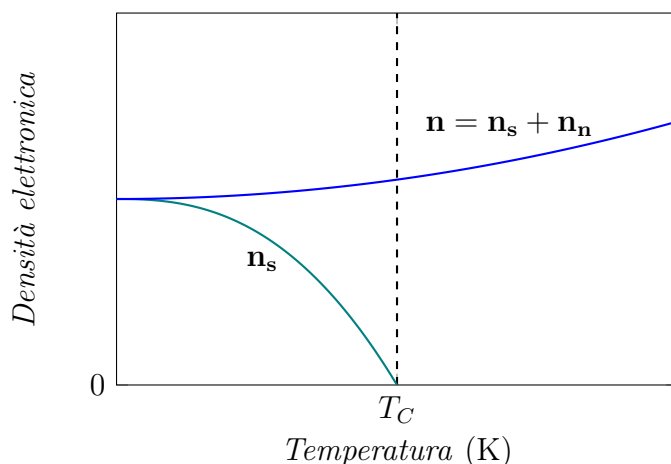
Per poter descrivere l'elettrodinamica di un superconduttore in modo approssimativo è possibile considerare il cosiddetto modello **a due fluidi**. Assumiamo che tutti gli elettroni liberi del materiale superconduttivo siano divisi in due categorie: elettroni superconduttivi di densità n_s (numero di elettroni per unità di volume) ed elettroni normali di densità n_n . La densità totale elettronica è data semplicemente da $n = n_s + n_n$. Al variare della temperatura da $T = 0$ a $T = T_C$ la densità n_s diminuisce dal valore n sino a $n_s = 0$, in accordo con la transizione alla fase normale. Quest'ultima situazione può essere meglio visualizzata in figura 1.8.

In generale la densità n_s dipende dalla posizione ed anche esplicitamente dal tempo. Chiamiamo e^* ed m^* rispettivamente il valore della carica e della massa delle particelle costituenti il superfluido che stiamo considerando. Si definisce **densità di corrente** del superfluido \mathbf{J}_s la quantità:

$$\mathbf{J}_s = n_s e^* \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1.28)$$

dove $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ è il campo di velocità degli elettroni superconduttivi. Consideriamo il superfluido come incomprimibile: tale proprietà si traduce matematicamente nella condizione $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0$. Inoltre imponiamo la conservazione della carica elettrica:

Figura 1.8: Andamento qualitativo della densità elettronica totale n e della densità di elettroni superconduttivi n_s in un superconduttore descritto mediante il modello a due fluidi. Si noti come n_s tenda a zero in modo continuo quando $T \rightarrow T_C$.



$$\frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt} \int_V e^* n_s(\mathbf{x}, t) d^3x = 0. \quad (1.29)$$

dove V è il volume del fluido superconduttore. Quest'ultima relazione implica che

$$\int_V \left(\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{v}) \right) d^3x = 0, \quad (1.30)$$

la quale porta alla ben nota **equazione di continuità** della carica elettrica:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{v}) = \frac{\partial n_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla n_s + n_s \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.31)$$

Utilizzando la relazione di incomprimibilità e l'equazione di continuità si deduce immediatamente che

$$\frac{Dn_s}{Dt} = \frac{d}{dt} n_s(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.32)$$

ovvero la derivata *sostanziale* della densità di elettroni superconduttivi risulta essere nulla. Quindi imporre la conservazione della carica elettrica e l'incompressibilità del fluido equivale in tale caso a porsi in condizione di stazionarietà, espressa dalla (1.32). Calcoliamo ora la derivata rispetto al tempo di ambo i membri della relazione (1.28):

$$\frac{d\mathbf{J}_s}{dt} = n_s e^* \frac{d\mathbf{v}}{dt} = n_s e^* \frac{\mathbf{F}}{m^*} = \frac{n_s e^{*2}}{m^*} \mathbf{E}. \quad (1.33)$$

L'equazione

$$\boxed{\frac{d\mathbf{J}_s}{dt} = \frac{n_s e^{*2}}{m^*} \mathbf{E}} \quad (1.34)$$

viene detta **prima equazione di London**. Scriviamo ora l'equazione di moto, data dalla seconda legge di Newton, per un superfluido immerso in un campo elettromagnetico:

$$\frac{d}{dt} \left[n_s(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] = \frac{e^*}{m^*} n_s(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (1.35)$$

Grazie alla regola di derivazione di un prodotto e all'equazione (1.32) il primo membro si riduce a:

$$n_s(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = n_s \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right] = n_s \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla(v^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right]^8 \quad (1.36)$$

Riarrangiando i termini è possibile riscrivere l'equazione (1.36) come

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{e^*}{m^*} \mathbf{E} + \nabla(v^2) = \mathbf{v} \times \left[\nabla \times \mathbf{v} + \frac{e^*}{m^*} \mathbf{B} \right]. \quad (1.37)$$

Calcoliamo ora il rotore di entrambi i membri dell'equazione (1.37)⁹:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\mathbf{v} \times \left(\nabla \times \mathbf{v} + \frac{e^*}{m^*} \mathbf{B} \right) \right] &= \nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{e^*}{m^*} \mathbf{E} + \nabla(v^2) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{e^*}{m^*} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \mathbf{v} + \frac{e^*}{m^*} \mathbf{B} \right). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Se definiamo $\mathbf{Q} \equiv \nabla \times \mathbf{v} + \frac{e^*}{m^*} \mathbf{B}$, allora la (1.38) può essere riscritta come

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{Q}]. \quad (1.39)$$

La (1.39) viene detta *equazione di Helmholtz* o *equazione di induzione* per un fluido immerso in campo elettromagnetico. Questa equazione ha la seguente proprietà: se all'istante di tempo $t = 0$ lo stato iniziale del fluido superconduttore è $\mathbf{Q} = 0$ (come nel caso in cui $\mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{B} = 0$) allora la (1.39) comporta anche che

⁸L'ultima eguaglianza si ricava dalla semplice relazione vettoriale $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$.

⁹Il rotore del gradiente di un qualsiasi campo scalare φ è sempre nullo: $\nabla \times \nabla \varphi = 0$.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = 0. \quad (1.40)$$

Siccome lo stato iniziale è $\mathbf{Q} = 0$, se integriamo la (1.40) rispetto al tempo, otteniamo

$$\mathbf{Q} = 0 \quad (1.41)$$

per ogni valore di t . Ciò significa che se l'equazione

$$\mathbf{Q} = \nabla \times \mathbf{v} + \frac{e^*}{m^*} \mathbf{B} = 0 \quad (1.42)$$

vale per un istante di tempo t generico, allora vale per ogni istante di tempo. Moltiplicando la (1.42) per $n_s e^*$ (supponendo ora che n_s sia costante) otteniamo

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{e^{*2}}{m^*} n_s \mathbf{B} \quad (1.43)$$

che rappresenta la cosiddetta **seconda equazione di London**. Questa è una delle equazioni più importanti che concernono la superconduttività. La sua validità venne confermata nel 1957 quando venne derivata dalla teoria microscopica BCS. E' possibile riscrivere tale equazione in una forma che rende evidente come il modello dei fratelli London riesca a spiegare l'esistenza dell'effetto Meissner-Ochsenfeld. Sfruttando l'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ possiamo riscrivere la (1.43) come ¹⁰

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \left(-\mu_0 \frac{e^{*2}}{m^*} n_s \mathbf{B} \right) \\ -\nabla^2 \mathbf{B} + \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} &= -\mu_0 \frac{e^{*2}}{m^*} n_s \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Ora, definendo la quantità $\lambda_L = \sqrt{\frac{m^*}{e^{*2} \mu_0 n_s}}$, detta **lunghezza di London** o **lunghezza di penetrazione**, la (1.44) diventa

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B}. \quad (1.45)$$

Per semplicità supponiamo che il sistema che stiamo considerando sia unidimensionale (o equivalentemente non sia invariante per traslazioni lungo la sola asse x). A questo punto la relazione (1.45) si riduce a

¹⁰Si indica con ∇^2 l'operatore *Laplaciano*.

$$\frac{d^2 B(x)}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} B(x). \quad (1.46)$$

Un'equazione differenziale di questo tipo ammette una soluzione nella forma:

$$B(x) = B_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}}, \quad (1.47)$$

dove B_0 rappresenta il valore del campo magnetico sulla superficie del superconduttore. Riportiamo nella figura 1.9 l'andamento del campo magnetico ottenuto.

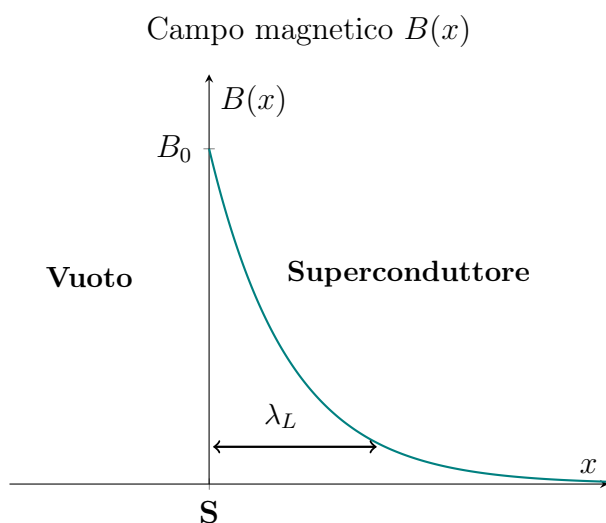


Figura 1.9: Grafico che mostra il comportamento del campo magnetico in prossimità della superficie di un superconduttore. Al di fuori di esso $B = B_0$; all'interno decade secondo la legge esponenziale data dalla relazione (1.45).

La lunghezza di London dipende dalla densità n_s degli elettroni superconduttivi. Essa sarà quindi nulla al di fuori del superconduttore e diversa da zero al suo interno. L'equazione (1.45) mostra come procedendo all'interno del materiale superconduttivo (nel bulk) il campo B decade esponenzialmente entro una scala di lunghezza uguale a λ_L . Questo è compatibile con quello che comporta l'effetto Meissner-Ochsenfeld.

Osserviamo che la densità $n_s = n_s(T)$ in generale dipende dalla temperatura del superconduttore. Di conseguenza anche la lunghezza di London ne dipenderà: $\lambda_L = \lambda_L(T)$. Inoltre per temperature $T \geq T_C$ abbiamo che $n_s = 0$: la lunghezza di London diverge in corrispondenza della temperatura critica. Empiricamente è possibile ottenere un'espressione per la densità n_s : in una regione di temperature $\frac{T_C}{2} \leq T \leq T_C$ si ha

$$\frac{n_s(T)}{n_s(0)} = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^4. \quad (1.48)$$

Nella seguente tabella è possibile visualizzare i valori di λ_L per alcuni superconduttori noti.

Tabella 1.2: Alcuni esempi di lunghezze di penetrazione per superconduttori puri e composti.

<i>Materiale</i>	Lunghezza di London λ_L (nm)
<i>YBCO</i>	26 – 90
<i>MgB₂</i>	85 – 180
<i>Nb</i>	47
<i>PbMo₆S₈</i>	230
<i>Pb</i>	39
<i>Al</i>	50
<i>Cd</i>	130
<i>Hg</i>	38 – 45

Osservazione: è possibile riscrivere l'equazione di London (1.43) in termini del potenziale vettore \mathbf{A} , definito dalla relazione $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$:

$$\mathbf{J}_s = -\frac{e^{*2}}{m^*} n_s \mathbf{A}. \quad (1.49)$$

Ovviamente l'espressione $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ non definisce in modo univoco un potenziale vettore ma una classe di potenziali nella forma $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\phi$, con ϕ un qualunque campo scalare. Questa trasformazione, detta **trasformazione di Gauge**, mantiene inalterata la forma del campo magnetico \mathbf{B} . Nella derivazione dell'equazione (1.43) abbiamo inizialmente supposto che $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ in condizioni stazionarie. Per mantenere matematicamente coerente tutta la trattazione dobbiamo scegliere una trasformazione tale che $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Una tale scelta denota la cosiddetta **Gauge di London**.

Capitolo 2

Modello di Ginzburg-Landau

Il modello della superconduttività di London sviluppato nel capitolo precedente presenta due rilevanti problemi di natura elettrodinamica: esso non è in grado di determinare l'energia di superficie di un'interfaccia che separa un materiale normale da un superconduttore; non permette inoltre di prevedere fenomeni quali la scomparsa della superconduttività dovuta a campi magnetici o correnti esterni.

Per contrastare questi problemi, nel 1950 V. Ginzburg e L. Landau svilupparono una teoria della superconduttività trattando il problema dal punto di vista termodinamico. Proprio come nell'ambito della fase liquida e di quella gassosa, i due fisici considerarono la fase normale e quella superconduttiva come due fasi termodinamiche separate, caratterizzate da diversi valori delle funzioni termodinamiche rilevanti, quale ad esempio la capacità termica (o calore specifico).

Inizialmente il modello di Ginzburg-Landau venne introdotto con un iter fenomenologico: nel 1958 L. Gor'kov mostrò che era possibile derivarlo completamente dalla teoria microscopica della superconduttività, la teoria BCS menzionata precedentemente. Ciò dimostrò la validità dell'approccio di Ginzburg e Landau. La loro teoria risulta molto generale ed applicabile a diversi settori della fisica quali il magnetismo, lo studio delle transizioni liquido-cristallo e delle transizioni che comportano rotture di simmetrie, queste ultime importanti per comprendere la natura dell'universo nei suoi primi istanti di vita. Il modello di Ginzburg-Landau è un idoneo esempio di teoria di **campo medio**.¹ Nonostante ciò, l'efficacia di questa teoria permette di includere nello studio del sistema superconduttivo il contributo delle fluttuazioni termiche, le quali perturbano il reticolo di vortici di Abrikosov con un conseguente effetto "disordinante".

¹Una teoria di campo medio permette di ridurre lo studio di un sistema di molte particelle a quello di un sistema di singola particella. Considerando un insieme di particelle che generano un campo di interazione, l'influenza che subisce una qualsiasi particella dovuta al contributo di tutte le altre è approssimata con un valore medio del campo di interazione.

In questo capitolo discuteremo il modello di Ginzburg-Landau esaminandolo dal caso più semplice di sistemi spazialmente uniformi. Dopodiché ci occuperemo di sistemi non omogenei dove il parametro d'ordine della fase superconduttiva sarà funzione della posizione \mathbf{x} . Infine valuteremo il caso generale di un materiale superconduttore in presenza di un campo magnetico, tramite l'introduzione del potenziale vettore \mathbf{A} .

2.1 Sistemi omogenei. Transizioni del bulk

Il modello della superconduttività di Ginzburg-Landau è stato sviluppato con un approccio del tutto generale basato sulla teoria delle transizioni di fase del secondo ordine, delineato da Landau stesso negli anni '30. I concetti fondamentali di questo approccio sono espressi nell'appendice B ma per una trattazione completa ed approfondita si rimanda all'articolo originale di Landau [3].

Una transizione di fase del secondo ordine comporta una modifica di simmetria del sistema: un esempio è costituito da un magnete al di sotto della sua **temperatura di Curie**, il quale mostra un momento magnetico apprezzabile.

Per descrivere una transizione di fase di questo tipo si introduce un **parametro d'ordine**: esso è identicamente nullo per temperature superiori a quella critica T_C , mentre assume valori diversi da zero al di sotto di essa. Per il magnete descritto in precedenza un buon parametro d'ordine è la magnetizzazione \mathbf{M} del mezzo.

Ginzburg e Landau postularono l'esistenza di un parametro che caratterizzasse la transizione di fase superconduttiva di un materiale e lo denotarono con $\Psi(T)$. Al tempo in cui venne formulata la teoria la natura del parametro Ψ non era sufficientemente chiara: Ψ era stato definito come una quantità complessa in grado di descrivere efficacemente la transizione di fase superconduttiva. In prima approssimazione il parametro d'ordine potrebbe essere visto come la funzione d'onda macroscopica del superconduttore in esame. Solo con lo sviluppo della teoria BCS si è compreso sino in fondo il suo significato: esso può essere considerato come la funzione d'onda del moto del centro di massa di una singola coppia di Cooper, laddove $|\Psi|^2$ rappresenta la densità di coppie di Cooper nel campione.

Si consideri ora un superconduttore omogeneo, in assenza di campo magnetico esterno. Come riportato nell'appendice B, per descrivere quantitativamente la natura della transizione di fase è necessario considerare un potenziale termodinamico. In tal caso scegliamo l'energia libera di Helmholtz per unità di volume $f_s(\Psi, T)$. E' noto che essendo f_s una grandezza fisica reale e Ψ un parametro complesso, f_s potrà dipendere solo dal modulo del parametro d'ordine $|\Psi|$. Siccome Ψ tende a zero man mano che ci si avvicini alla transizione di fase, potremo espandere l'energia libera in serie di Taylor per temperature T prossime alla temperatura critica T_C . Così facendo otteniamo

$$f_s(T) = f_n(T) + a(T)|\Psi|^2 + \frac{b(T)}{2}|\Psi|^4 + \dots \quad (2.1)$$

dove $f_s(T)$ e $f_n(T)$ sono le densità di energia libera nella fase superconduttiva e nella fase normale.

Osservazione: dal fatto che il modello di Ginzburg-Landau si basa sull'espansione di $f_s(T)$ intorno alla transizione di fase, ne consegue che esso è valido solo per temperature $T \simeq T_C$; tale condizione garantisce che $|\Psi|$ sia piccolo e l'espansione valida.

Esplicitando ora $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ e minimizzando l'energia libera con la condizione $\frac{\partial f_s}{\partial \Psi} = 0$ troviamo l'espressione del parametro d'ordine in corrispondenza della fase superconduttiva:

$$a(T)\Psi^* + b(T)|\Psi|^2\Psi^* = 0 \quad \implies \quad |\Psi|^2 = -\frac{a(T)}{b(T)} \quad (2.2)$$

(la soluzione $\Psi^* = 0$ porta a non avere la fase superconduttiva). Imponendo $b > 0$ (altrimenti non avremmo un minimo dell'energia libera) e indipendente dalla temperatura, deve essere che in corrispondenza della fase superconduttiva sia $a(T) < 0$.

Sapendo che f_s e g_s sono uguali a campo magnetico nullo (si veda l'equazione (1.18) e la (1.21)), sostituendo la soluzione (2.2) nell'espansione dell'energia libera e tenendo conto della definizione di energia di condensazione data in (1.24), possiamo scrivere

$$\frac{a^2(T)}{2b} = \frac{\mu_0}{2} H_C^2(T) = \frac{\mu_0}{2} H_C^2(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^2 \right]^2. \quad (2.3)$$

Per $T \simeq T_C$ si vede come $a(T)$ dipenda linearmente dalla temperatura: ²

$$a^2(T) = \mu_0 b H_C^2(0) \left[2 \left(\frac{T_C - T}{T_C} \right) \right]^2 \quad (2.4)$$

L'andamento del parametro d'ordine in funzione della temperatura lo si ricava dalla relazione precedente e dall'espressione di $|\Psi|^2$ in (2.2)

$$|\Psi| = \begin{cases} \alpha(T_C - T)^{1/2}, & T < T_C \\ 0 & T > T_C \end{cases} \quad (2.5)$$

dove $\alpha = \left(\frac{\mu_0}{b}\right)^{1/4} \left(\frac{2H_C(0)}{T_C}\right)^{1/2}$. In figura 2.1 è riportata la dipendenza del parametro d'ordine dalla temperatura. Questo andamento è molto simile a quello

²Per $T \simeq T_C$ si ha che $\left[1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^2\right] = \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)\left(1 + \frac{T}{T_C}\right) = 2\left(\frac{T_C - T}{T_C}\right)$.

assunto da altri parametri d'ordine caratterizzanti le transizioni di fase del secondo ordine nella teoria generale di Landau.

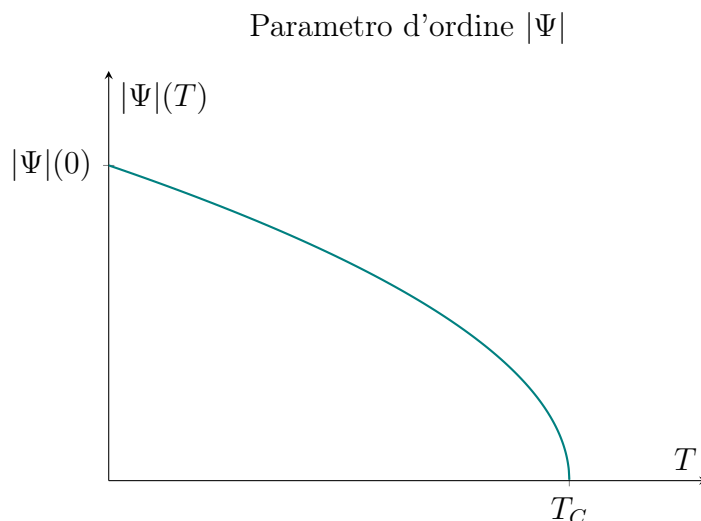


Figura 2.1: Modulo del parametro d'ordine in funzione di T . La diminuzione di $|\Psi|$ da un valore non nullo a zero in corrispondenza di T_C è caratteristica delle transizioni di fase del secondo ordine.

Essendo Ψ un parametro complesso, è possibile definirlo in funzione del proprio modulo e della propria fase reale θ : $\Psi = |\Psi|e^{i\theta}$. È possibile scegliere arbitrariamente la fase θ in quanto l'infinito numero di valori che può assumere conducono tutti allo stesso valore dell'energia libera totale. Ma ricordando che una transizione di fase del secondo ordine comporta un cambio di simmetria del sistema, il materiale che transisce alla fase superconduttiva sceglie spontaneamente una direzione preferenziale per la fase del parametro d'ordine, proprio come un ferromagnete al di sotto della temperatura di Curie sceglie spontaneamente una direzione per la magnetizzazione.

2.2 Sistemi non omogenei

Nel paragrafo precedente abbiamo studiato il caso di superconduttori omogenei, dove il parametro d'ordine è costante in tutto il volume del campione. Per rendere più generale la trattazione studiamo ora il caso di un materiale dove il parametro d'ordine Ψ può variare spazialmente con la posizione \mathbf{x} e lo facciamo introducendo nell'energia libera un termine dipendente dal gradiente di $\Psi(\mathbf{x})$:

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla \Psi(\mathbf{x})|^2 + a(T) |\Psi(\mathbf{x})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\Psi(\mathbf{x})|^4. \quad (2.6)$$

Per valori costanti del parametro d'ordine si ricade nel caso precedente. Il termine m^* , che ha le dimensioni di una massa, è detto **massa effettiva** e rappre-

senta la massa delle coppie di Cooper responsabili della superconduttività secondo la teoria BCS.³

Per ricavare l'espressione di $\Psi(\mathbf{x})$ dobbiamo minimizzare l'energia libera totale del sistema

$$F_s(T) = F_n(T) + \int_V \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\Psi(\mathbf{x})|^2 + a(T)|\Psi(\mathbf{x})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\Psi(\mathbf{x})|^4 d^3x. \quad (2.7)$$

Essendo l'energia libera una funzionale $F_s[\Psi(\mathbf{x})]$ del parametro d'ordine, il minimo lo si ottiene con un calcolo variazionale considerando una variazione $\Psi(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi(\mathbf{x}) + \delta\Psi(\mathbf{x})$:⁴

$$\begin{aligned} \delta F_s[\Psi] = F_s[\Psi + \delta\Psi] - F_s[\Psi] = & \int_V \left[\frac{\hbar^2}{2m^*} (\nabla\delta\Psi^*) \cdot (\nabla\Psi) + \delta\Psi^* (a\Psi + b\Psi|\Psi|^2) \right] d^3x \\ & + \int_V \left[\frac{\hbar^2}{2m^*} (\nabla\delta\Psi) \cdot (\nabla\Psi^*) + \delta\Psi^* (a\Psi^* + b\Psi^*|\Psi|^2) \right] d^3x. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sono stati trascurati tutti i termini di ordine superiore a primo nella variazione $\delta\Psi$. Integrando per parti i termini contenenti il gradiente si arriva all'espressione

$$\begin{aligned} \delta F_s[\Psi] = & \int_V \delta\Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\Psi + a\Psi + b\Psi|\Psi|^2 \right) d^3x \\ & + \int_V \delta\Psi \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\Psi^* + a\Psi^* + b\Psi^*|\Psi|^2 \right)^* d^3x. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La condizione da imporre affinché si abbia un minimo dell'energia libera è che la variazione $\delta F_s[\Psi] = 0$ per un'arbitraria variazione $\delta\Psi$. Per soddisfare questa richiesta, dall'equazione (2.9) segue necessariamente che

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\Psi + a\Psi + b\Psi|\Psi|^2 = 0. \quad (2.10)$$

Questa equazione differenziale⁵, diversamente da quella di Schrödinger, non è lineare a causa del termine $b\Psi|\Psi|^2$. Segue da questo fatto che non è possibile applicare il principio di sovrapposizione a tale equazione e la normalizzazione di Ψ risulta diversa da quella usuale usata in meccanica quantistica.

³Essendo la coppia di Cooper uno stato legato di due elettroni, è chiaro che $m^* = 2m_e$, dove m_e è la massa dell'elettrone.

⁴Una variazione di $\Psi(\mathbf{x})$ comporta necessariamente anche una variazione di $\Psi^*(\mathbf{x})$.

⁵Questa equazione è valida solo se soddisfa la seguente condizione al contorno: $\nabla\Psi \cdot \mathbf{n} = 0$, dove \mathbf{n} è il versore normale alla superficie del superconduttore.

Risolviamo questa equazione in una geometria particolare: consideriamo una superficie di separazione tra un metallo normale e un materiale superconduttore. Supponiamo che tale superficie giaccia sul piano yz (in cui ho invarianza per traslazione); per $x < 0$ siamo in presenza del metallo normale, mentre per $x > 0$ abbiamo il superconduttore. Nella zona del metallo normale il parametro d'ordine è identicamente nullo. Supponiamo inoltre che Ψ vari con continuità fino ad un valore diverso da zero e non costante nel superconduttore. Assumendo infine che il parametro d'ordine sia approssimativamente costante nel *bulk* del materiale, possiamo scrivere

$$\Psi(x) = \Psi_\infty f(x) \quad (2.11)$$

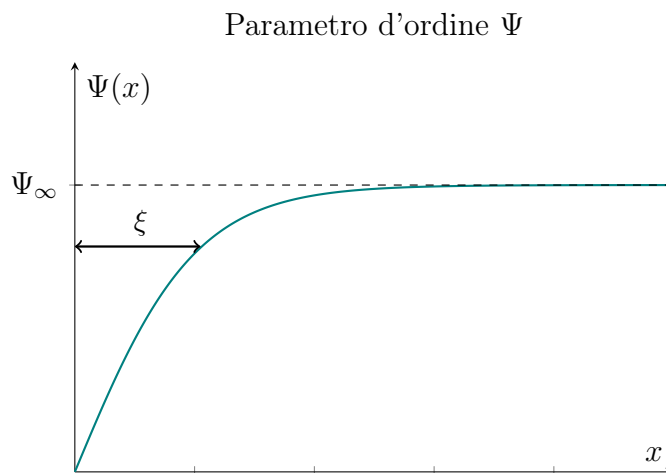
dove Ψ_∞ è il valore del parametro d'ordine nel bulk. Sostituendo tale espressione nell'equazione (2.10) e ricordando che $\Psi_\infty^2 = \frac{|a|}{b}$ otteniamo

$$-\xi^2 f''(x) - f(x) + f^3(x) = 0 \quad (2.12)$$

dove è stata definita la **lunghezza di coerenza** $\xi = \left(\frac{\hbar^2}{2m^*|a(T)|}\right)^{1/2}$. L'equazione (2.12) è risolvibile esattamente. Imponendo le condizioni al contorno $f(x) = 1$ e $f'(x) = 0$ quando siamo nel bulk del superconduttore, si arriva alla soluzione

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{\xi\sqrt{2}}\right). \quad (2.13)$$

Figura 2.2: Variazione del parametro d'ordine dalla superficie di separazione superconduttore-metallo fino al bulk. La lunghezza di coerenza, parametro specifico di ogni superconduttore, ci quantifica la regione ove il parametro d'ordine varia significativamente con la posizione.



Come mostrato in figura 2.2, ξ rappresenta la scala di lunghezza caratteristica entro la quale il parametro d'ordine assume il suo valore di bulk. A causa della dipendenza da $|a(T)|$, la lunghezza di coerenza dipende dalla temperatura secondo la relazione

$$\xi(T) = \xi(0) \left(\frac{T_C}{T - T_C} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

La divergenza di ξ con esponente $\alpha = -1/2$, in prossimità della temperatura critica, è tipica delle teorie di campo medio. Lo sviluppo della teoria BCS ha permesso di dare un significato più importante alla lunghezza di coerenza, come già verificatosi per gli altri parametri: essa rappresenta la dimensione di una singola coppia di Cooper.

La soluzione dell'equazione (2.12) in questa particolare configurazione non ha solo un valore accademico: permette di descrivere **l'effetto di prossimità** tra due materiali superconduttori. In corrispondenza di un'interfaccia fra quest'ultimi con temperature critiche $T_{C_1} > T_{C_2}$, al diminuire della temperatura, passerà alla fase superconduttiva il materiale con la più alta temperatura critica, innescando sulla superficie del secondo materiale la superconduttività ad una temperatura maggiore di T_{C_2} . Se per il materiale a temperatura critica minore consideriamo un film sottile, con uno spessore paragonabile alla sua lunghezza di coerenza, allora si innescherà la superconduttività in tutto il suo volume, forzando il parametro d'ordine Ψ_2 ad assumere un valore diverso da zero per temperature maggiori di T_{C_2} .

2.3 Modello di Ginzburg-Landau in campo magnetico

La teoria di Ginzburg-Landau fin qui descritta non comprende gli effetti di un campo magnetico esterno. Essa sarebbe appropriata per descrivere sistemi di particelle neutre, come i superfluidi. Nel caso di superconduttori, il fatto che vi sia un flusso di elettroni nel materiale genera delle supercorrenti che necessariamente interagiranno con i campi magnetici. Nell'espressione dell'energia libera del campione superconduttore dobbiamo includere un termine, dipendente dal potenziale vettore \mathbf{A} , che regoli l'interazione del superconduttore con i campi esterni. Seguendo la sostituzione che si utilizza in meccanica quantistica,⁶ $-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A}$, il risultato è il seguente

⁶In meccanica quantistica, quando una particella carica interagisce con un campo elettromagnetico la sua Hamiltoniana viene modificata nel modo seguente: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A}$, dove \mathbf{p} è il momento della particella e \mathbf{A} il potenziale vettore che definisce il campo elettromagnetico.

$$F_s(T) = F_n(T) + \int_V \left[\frac{1}{2m^*} \left| (i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})\Psi \right|^2 + a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 \right] d^3x + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} B^2(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.15)$$

Ricordiamo che i responsabili della superconduttività sono le coppie di Cooper, di conseguenza $e^* = -2e$ ⁷. Il primo integrale rappresenta l'energia libera del campione ed è esteso a tutto il suo volume V . Il secondo integrale è esteso a tutto lo spazio e rappresenta la densità di energia del campo elettromagnetico esterno. Per trovare l'espressione analitica del parametro d'ordine dobbiamo imporre la condizione $\delta F_s[\Psi(\mathbf{x})] = 0$; attraverso un calcolo variazionale analogo a quello del paragrafo precedente, si arriva all'espressione

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \Psi(\mathbf{x}) + a\Psi(\mathbf{x}) + b\Psi(\mathbf{x})|\Psi(\mathbf{x})|^2 = 0.} \quad (2.16)$$

Questa equazione differenziale non lineare differisce dalla (2.10) per il termine dovuto all'interazione con il campo magnetico esterno. La (2.16) viene detta **prima equazione di Ginzburg-Landau**. È possibile ricavare un'altra equazione dall'energia libera (2.15), stavolta calcolando la variazione δF rispetto ad una variazione infinitesima del potenziale vettore: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$. Ricordando la definizione di potenziale vettore, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, possiamo scrivere

$$\delta F_s[\mathbf{A}] = \int_V \frac{1}{2m^*} \left(i\hbar\nabla + e^*(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) \right)^* \Psi^* \left(i\hbar\nabla + e^*(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) \right) \Psi d^3x + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \delta\mathbf{A} \right|^2 d^3x - F_s[\mathbf{A}]. \quad (2.17)$$

Come al solito sono stati trascurati i termini di ordine superiore al primo in $\delta\mathbf{A}$. Semplificando il primo termine e sottraendogli l'energia libera invariata, dopo una serie di passaggi otteniamo ⁸

⁷Si noti che la teoria G-L funziona ugualmente nel caso si consideri una "particella" di carica netta $+2e$. Possiamo pensare che i responsabili della superconduttività siano in questo caso coppie di Cooper di *lacune* di carica positiva.

⁸ $|\nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \delta\mathbf{A}|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 = 2(\nabla \times \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A})) = 2\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A})$. Sfruttando il simbolo di Levi-Civita possiamo scrivere: $2\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A}) = 2\partial_j(\epsilon_{ijk} B_i \delta A_k) - 2\delta A_k \epsilon_{ijk} \partial_j B_i = -2\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \delta\mathbf{A}) + 2\delta\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$.

$$\begin{aligned} \delta F_s[\mathbf{A}] = & \int_V \delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) \left[\frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{e^{*2}}{m^*} \mathbf{A} |\Psi|^2 \right] d^3x \\ & + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} \left[-2\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \delta \mathbf{A}) + 2\delta \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \right] d^3x. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Per il primo termine del secondo integrale possiamo sfruttare il teorema della divergenza ed ottenere $\int d\sigma \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} \times \delta \mathbf{A} - \mathbf{H} \times \delta \mathbf{A})$. Qui si è tenuto conto anche del campo \mathbf{H} , generato dalle correnti esterne al superconduttore. Ponendo $\delta F_s[\mathbf{A}] = 0$ per una arbitraria variazione $\delta \mathbf{A}$ e definendo la **densità di supercorrente** $\mathbf{J}_s = -\frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*} \mathbf{A} |\Psi|^2$ otteniamo la seguente equazione⁹

$$\boxed{\mathbf{J}_s = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B},} \quad (2.19)$$

detta **seconda equazione di Ginzburg-Landau**. Il sistema di due equazioni G-L sono seguite dalle opportune condizioni al contorno da soddisfare affinché si possa annullare la variazione dell'energia libera del superconduttore:

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar} \mathbf{A} \right) \Psi = 0, & (2.20) \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{B} - \mathbf{H}) = 0. & (2.21) \end{cases}$$

La prima condizione al contorno impone che il prodotto $\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}$ sia nullo sulla superficie del superconduttore. La seconda condizione implica la continuità della componente tangente del campo magnetico attraverso la superficie del campione. Finalmente abbiamo ottenuto il sistema completo di equazioni di Ginzburg-Landau con le relative condizioni al contorno. Esse rappresentano delle equazioni di validità generale per la descrizione dei superconduttori: come caso limite è possibile ricavare le equazioni di London e mostrare l'esistenza dell'effetto Meissner-Ochsenfeld.

Osservazione: La seconda equazione di Ginzburg-Landau (2.19) è stata ottenuta calcolando la variazione dell'energia libera rispetto al potenziale vettore \mathbf{A} e ponendola uguale a zero per ogni variazione $\delta \mathbf{A}$. Questa procedura potrebbe sembrare scorretta dal punto di vista matematico in quanto, a differenza di Ψ , \mathbf{A} non è una variabile interna del superconduttore che può essere variata arbitrariamente. Il potenziale vettore è soggetto al vincolo rappresentato dalla sua stessa definizione: $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Per capire il motivo per il quale Ginzburg e Landau

⁹Questa equazione soddisfa la condizione $\nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0$.

hanno calcolato la variazione dell'energia libera rispetto al potenziale vettore si rimanda all'appendice C.

Consideriamo ora il parametro d'ordine nella forma $\Psi(\mathbf{x}) = |\Psi(\mathbf{x})|e^{i\theta(\mathbf{x})}$. Supponendo che $\theta(\mathbf{x})$ sia una funzione a valore singolo, possiamo riscrivere l'espressione della supercorrente come segue:

$$\mathbf{J}_s = \frac{e^{*2}}{m^*} |\Psi|^2 \left(\frac{\hbar}{e^*} \nabla \theta(\mathbf{x}) - \mathbf{A} \right). \quad (2.22)$$

Scegliamo una regione del superconduttore dove il parametro d'ordine è costante e non dipende dalla posizione: $|\Psi|^2 = n_s = \text{cost}$. Calcolando il rotore di ambo i membri della (2.22) otteniamo

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{e^{*2}}{m^*} |\Psi|^2 (\nabla \times \mathbf{A}) \quad \Longrightarrow \quad -\nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \frac{e^{*2}}{m^*} n_s (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (2.23)$$

Infine, con la solita sostituzione della definizione del potenziale vettore otteniamo

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \frac{e^{*2}}{m^*} n_s \mathbf{B}. \quad (2.24)$$

Questa equazione è identica alla (1.45). Anche in tal caso si definisce la lunghezza di penetrazione $\lambda_L = \sqrt{\frac{m^*}{e^{*2} \mu_0 n_s}}$. Siccome $|\Psi|^2 = n_s = \frac{|a|}{b}$ e $|a| \propto (T_C - T)$, si vede che la lunghezza di penetrazione di un superconduttore diverge alla temperatura critica con con il medesimo esponente della lunghezza di coerenza. Da ciò segue che il rapporto tra le due lunghezze caratteristiche di un superconduttore

$$\kappa = \frac{\lambda_L(T)}{\xi(T)} \quad (2.25)$$

è indipendente dalla temperatura T . κ è detto **parametro di Ginzburg-Landau**. Esso può essere utilizzato per riscrivere in forma adimensionale le equazioni di Ginzburg-Landau:

$$\begin{cases} \frac{1}{\kappa^2} \left(-i\nabla' + \kappa \mathbf{A}' \right)^2 f - f + |f|^2 f = 0, & (2.26) \\ \nabla' \times \mathbf{B}' = \frac{i}{2\hbar} \left(f^* \nabla' f - f \nabla' f^* \right) - |f|^2 \mathbf{A}'. & (2.27) \end{cases}$$

dove si sono definiti: $\mathbf{B} = \mathbf{B}' H_C \sqrt{2}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}' H_C \sqrt{2} \lambda_L$ e $\mathbf{x} = \mathbf{x}' \lambda_L$. L'importanza del parametro κ va ben oltre la semplice riscrittura delle equazioni G-L. Come vedremo nel prossimo capitolo esso gioca un ruolo fondamentale nel discriminare i superconduttori di tipo I da quelli di tipo II.

2.3.1 Quantizzazione del flusso

L'espressione (2.22) della supercorrente ci permette di dimostrare il fenomeno della **quantizzazione del flusso** in un superconduttore. Consideriamo per semplicità il sistema raffigurato in figura 2.3.

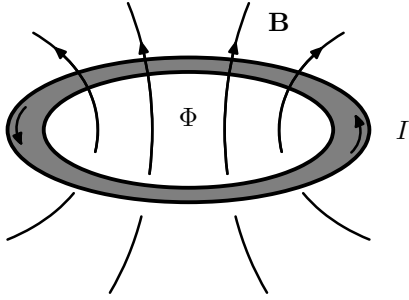


Figura 2.3: Anello di materiale superconduttore. Calcolando il flusso Φ del campo di induzione magnetica \mathbf{B} si dimostra che esso è quantizzato in unità di φ_0 , detto **flusso elementare**. Sperimentalmente la quantizzazione del flusso si osserva nel reticolo di vortici di Abrikosov.

Modificando la definizione (2.22) perveniamo all'espressione

$$\frac{m^*}{e^{*2}} \frac{\mathbf{J}_s}{|\Psi|^2} + \mathbf{A} = \frac{\hbar}{e^*} \nabla \theta(\mathbf{x}). \quad (2.28)$$

Integriamo ora tutti i membri di quest'ultima equazione lungo un cammino chiuso C all'interno dell'anello superconduttore:

$$\frac{m^*}{e^{*2}} \oint_C \frac{\mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{l}}{|\Psi|^2} + \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{e^*} \oint_C \nabla \theta(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.29)$$

Utilizzando il teorema di Stokes possiamo scrivere

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (2.30)$$

che rappresenta il flusso del campo di induzione magnetica \mathbf{B} attraverso la superficie S dell'anello. Assumendo che θ sia a valore singolo, l'integrale del termine di destra dell'equazione (2.29) deve essere un multiplo intero (positivo o negativo) di 2π :

$$\frac{m^*}{e^{*2}} \oint_C \frac{\mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{l}}{|\Psi|^2} + \int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\hbar}{2\pi e^*} 2\pi n = \pm n \varphi_0. \quad (2.31)$$

dove φ_0 rappresenta il flusso elementare o **flussoide**: $\varphi_0 = \frac{\hbar}{e^*}$. L'equazione (2.31) mostra che la parte di sinistra, cioè il flusso del campo \mathbf{B} generalizzato a sistemi non uniformi, deve essere quantizzato in unità del flusso elementare. Nonostante il modello di Ginzburg-Landau valga solo per temperature prossime

a quella critica, la quantizzazione del flusso si osserva a qualsiasi temperatura temperature $T < T_C$.

Capitolo 3

Reticolo di vortici di Abrikosov

3.1 Esistenza di due classi di superconduttori

Nella sezione 1.2.3 abbiamo accennato all'esistenza di due tipi di superconduttori, chiamati semplicemente di tipo I e tipo II. Ciò che contraddistingue queste due classi di materiali è il loro diverso comportamento in presenza di un campo magnetico esterno. In questo capitolo ritengo opportuno valutare nel dettaglio il criterio con il quale è possibile distinguere una classe dall'altra e le diverse proprietà che le caratterizzano, con particolare attenzione ai superconduttori di tipo II. Al termine del paragrafo 2.3 è stato introdotto il parametro di Ginzburg-Landau κ con lo scopo di rendere adimensionali le equazioni dell'omonimo modello in campo magnetico. In realtà l'importanza di tale parametro va ben oltre la semplice riscrittura delle equazioni: esso gioca un ruolo centrale nel discriminare superconduttori di tipo I da quelli di tipo II.

3.2 L'energia di superficie σ_{ns}

Il modo più immediato di valutare l'importanza del parametro κ è quello di studiare l'energia di superficie σ_{ns} associata ad un'interfaccia che separa una regione "normale" da una regione dove è presente un superconduttore. Per semplicità prenderemo in esame solamente il caso unidimensionale ma il risultato vale anche nel caso tridimensionale. Come visto nella sezione 1.2.6 il confine tra queste due regioni è meccanicamente stabile solo se nella regione normale è applicato un campo magnetico H parallelo alla superficie. Questo perché l'energia libera di Gibbs nel bulk della regione normale deve essere uguale a quella del bulk della regione superconduttiva. Fissato un'asse z di riferimento per il nostro sistema unidimensionale, se consideriamo la regione $z < 0$ come quella normale e $z > 0$ come quella

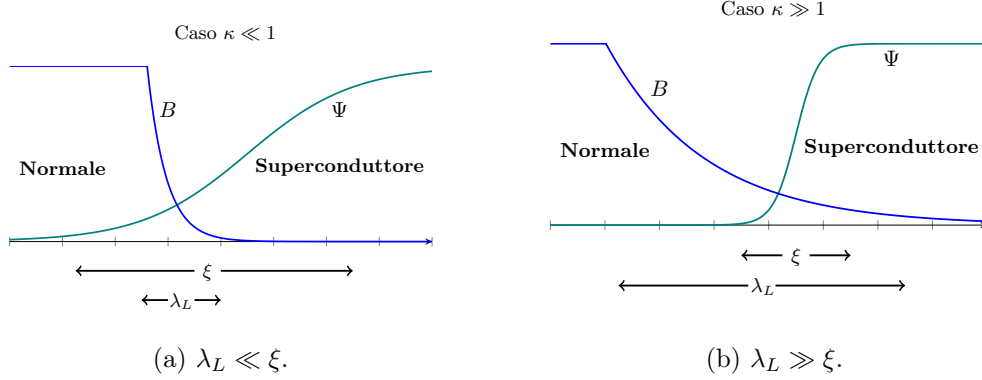


Figura 3.1: Regione di superficie tra un materiale normale e uno superconduttore.

superconduttiva, il concetto appena menzionato si traduce matematicamente nella condizione

$$g(z \rightarrow -\infty) = g(z \rightarrow \infty) \quad \Longrightarrow \quad g_s(T, 0) = g_n(T, 0) - \frac{\mu_0}{2} H_c^2. \quad (3.1)$$

Il fatto che esista un'energia associata alla superficie di separazione tra le due fasi è una conseguenza dell'esistenza di due lunghezze caratteristiche nei superconduttori: la lunghezza di penetrazione λ_L e la lunghezza di coerenza ξ ¹. Nella regione d'interfaccia succede che il campo magnetico inizia ad essere espulso dal materiale per $z \gtrsim \lambda_L$ e il parametro d'ordine Ψ aumenta significativamente di valore per $z \gtrsim \xi$. Si veda la figura 3.1 per i dettagli del problema.

Conseguentemente il valore dell'energie libera di Gibbs (per unità di superficie) dell'intero materiale (considerato l'intero dominio $(-\infty, +\infty)$) risulta essere

$$g \simeq \int_{-\infty}^{\lambda_L} dz \frac{\mu_0}{2} H_c^2 + \int_{\xi}^{\infty} dz \frac{\mu_0}{2} H_c^2. \quad (3.2)$$

Rispetto all'energia di Gibbs calcolata per un materiale costituito da un'unica fase (interamente normale o superconduttore) la (3.2) ne differisce per una quantità che è per definizione **l'energia di superficie** σ_{ns} :

$$\sigma_{ns} := \int_{\lambda_L}^{\xi} dz \frac{\mu_0}{2} H_c^2 = (\xi - \lambda_L) \frac{\mu_0}{2} H_c^2. \quad (3.3)$$

¹Se il campione fosse interamente normale o interamente superconduttore, l'energia di Gibbs per unità di superficie sarebbe semplicemente $\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\mu_0}{2} H_c^2$. Non vi sarebbe quindi nessuna energia di superficie.

Notiamo che per $\kappa \ll 1$ $\sigma_{ns} > 0$ mentre per $\kappa \gg 1$ $\sigma_{ns} < 0$. Quindi grazie a questo calcolo approssimativo abbiamo visto come il parametro κ intervenga nel definire i diversi valori dell'energia di superficie. Un calcolo più dettagliato di σ_{ns} , basato sul modello di Ginzburg-Landau ², porta alla seguente espressione:

$$\begin{aligned}\sigma_{ns} &:= \int_{-\infty}^{\infty} dz [g(z) - g_s] = \int_{-\infty}^{\infty} dz [g(z) - g_n + \frac{\mu_0}{2} H_C^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz [f(z) - f_n + \frac{\mu_0}{2} H_C^2 - \mu_0 H(z) H_C] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\frac{1}{2m^*} \left| \left(i\hbar \nabla + e^* \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + a |\Psi|^2 + \frac{b}{2} |\Psi|^4 + \frac{\mu_0 (H_C - H)^2}{2} \right].\end{aligned}\quad (3.4)$$

Moltiplicando per Ψ^* l'equazione di Ginzburg-Landau di questo sistema unidimensionale e successivamente integrando su tutto il dominio $(-\infty, \infty)$ otteniamo la condizione:³

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\frac{1}{2m^*} \left| \left(i\hbar \nabla + e^* \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + a |\Psi|^2 + b |\Psi|^4 \right] = 0, \quad (3.5)$$

la quale sostituita nella definizione di σ_{ns} porta alla seguente espressione

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[-\frac{b}{2} |\Psi|^4 + \frac{\mu_0 (H_C - H)^2}{2} \right]. \quad (3.6)$$

Quest'ultima formulazione dell'energia di superficie può essere riscritta in termini della lunghezza caratteristica δ : ⁴

$$\sigma_{ns} = \frac{\mu_0 H_C^2}{2} \delta \quad \text{dove} \quad \delta = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[-\left| \frac{\Psi}{\Psi_\infty} \right|^4 + \left(1 - \frac{H}{H_C} \right)^2 \right]. \quad (3.7)$$

Se si vuole trovare il valore di δ al variare del parametro κ bisogna risolvere numericamente l'equazione (3.7); nonostante ciò è possibile calcolare analiticamente per quali valore di κ la lunghezza δ assume dei valori limite. I risultati sono i seguenti:

²In tal caso l'energia di superficie si definisce come la differenza tra l'energia di Gibbs $g(z)$ che si ha nel caso di un'interfaccia normale-superconduttore e l'energia di Gibbs g_s che si avrebbe se il materiale fosse interamente normale o superconduttore.

³Il calcolo dettagliato, per non appesantire troppo la trattazione, è svolto in appendice A.

⁴L'espressione di δ si ricava facendo uso delle relazioni (2.3) e (2.11). Per il conto dettagliato che porta all'espressione di δ si veda [2].

$$\delta = \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}}{3}\xi \simeq 1.89\xi & \kappa \ll 1 \\ 0 & \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)\lambda_L \simeq -1.10\lambda_L & \kappa \gg 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

In accordo con l'equazione (3.8), l'energia di superficie è negativa per $\kappa \gg 1$ ed è positiva per $\kappa \ll 1$, mentre si annulla per $\kappa = 1/\sqrt{2}$. La tendenza generale è quella di classificare i superconduttori a seconda del segno dell'energia di superficie: per $\sigma_{ns} > 0$ abbiamo superconduttori di tipo I, per $\sigma_{ns} < 0$ abbiamo invece superconduttori di tipo II. L'equazione (3.8) ci dice per quale valore di κ l'energia di superficie si annulla: risulta quindi naturale prendere in considerazione il parametro κ per discriminare le due classi di superconduttori.

$$\begin{aligned} \text{Superconduttori di I tipo: } & \kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \text{Superconduttori di II tipo: } & \kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'energia di superficie positiva mantiene i superconduttori di tipo I spazialmente omogenei impedendo al campo magnetico di penetrare nel campione: il materiale esibisce l'effetto di Meissner-Ochsenfeld completo per ogni $H < H_C$. Nel caso σ_{ns} sia negativa, si distinguono due diversi campi critici H_{C1} e H_{C2} e la superconduttività è estesa a tutto il campione fintanto che il campo esterno H è inferiore al campo critico H_{C1} . Quando ci troviamo nella condizione $H_{C1} < H < H_{C2}$ il campo magnetico esterno inizia a penetrare nel campione, formando il cosiddetto stato misto o stato di **Shubnikov**. Esso è caratterizzato dalla presenza di vortici di supercorrente all'interno dei quali il campione si trova nella fase normale.

La notevole importanza che assume la distinzione tra superconduttori di tipo I da quelli di tipo II non si limita al solo settore tecnologico: ci riferiamo in particolare al caso delle stelle di neutroni, corpi celesti estremamente compatti che, a causa delle alte densità della materia dell'ordine di $10^{14} - 10^{15} \text{ g/cm}^3$ (dell'ordine o superiore alla densità di saturazione nucleare), costituiscono sistemi fortemente degeneri. La materia all'interno di una tipica stella di neutroni è costituita da almeno tre diversi liquidi degeneri tra loro interagenti: elettroni, protoni e neutroni. Per quanto riguarda i primi è altamente improbabile che costituiscano un fluido superconduttore a causa delle loro deboli interazioni coulombiane. Si ritiene che essi formino un plasma ultra-relativistico. Per quanto riguarda invece i protoni, le enormi forze di natura nucleare alla base delle loro mutue interazioni fanno sì che la fase superconduttiva risulti possibile. Resta da chiarire se quest'ultima è di tipo I o di tipo II. Il dibattito riguardante suddetta questione è ancora aperto (nonostante il problema sia stato sollevato nel 1969) e di notevole importanza

al fine di comprendere come la superconduttività nelle stelle di neutroni si possa correlare con le loro caratteristiche magnetiche. Storicamente la questione della superfluidità nelle stelle di neutroni nasce da un articolo del 1959 di A. B. Migdal ([41]): in questo lavoro l'autore parla della possibilità di avere superfluidità all'interno dei nuclei atomici, basando i suoi ragionamenti sull'esistenza di forze di attrazione e di un'energia di "pairing" associata ai fermioni che formano il nucleo. Migdal poi prosegue affermando che nel caso dovessero esistere stelle con dei nuclei formati da neutroni, allora esse dovrebbero trovarsi in stati superfluidi (all'epoca della pubblicazione dell'articolo di Migdal le stelle di neutroni non erano ancora state osservate).

Attualmente l'argomentazione più solida riguardante il tipo di superconduttività dei protoni è quella elaborata da G. Baym ([40]) il quale afferma, seguendo un ragionamento semi-quantitativo basato sulla stima della lunghezza di coerenza protonica, che la superconduttività sia di II tipo.

3.3 Il reticolo di vortici

Come già asserito nella sezione precedente, la differenza tra superconduttori di tipo I e tipo II consta nel fatto che questi ultimi, quando viene applicato un campo magnetico esterno $H > H_C$, non tornano alla fase normale, bensì formano uno stato misto in cui il campo penetra nel campione formando un reticolo di vortici di supercorrente. Questo fatto, teorizzato da Abrikosov in un articolo del 1957 ([28]), è una diretta conseguenza del modello di Ginzburg-Landau. Tale modello è essenzialmente una teoria fenomenologica fondata su considerazioni termodinamiche di base. In un certo senso si potrebbe considerare il modello di cui sopra più generale della sua controparte microscopica, cioè la teoria BCS ⁵.

3.3.1 La transizione di fase ad H_{C2}

Discutiamo brevemente la natura della transizione di fase in corrispondenza di H_C in superconduttori di tipo I ed in corrispondenza di H_{C2} per superconduttori

⁵La teoria BCS è la teoria microscopica della superconduttività. Da questa teoria si evince una spiegazione concettuale in relazione allo stato superconduttivo di molti materiali puri. Quando invece si considerano materiali più eterogenei come i moderni superconduttori ad alte temperature (costituiti da leghe di rame per esempio), la teoria BCS non è in grado di spiegare il meccanismo secondo il quale si innesca la transizione di fase superconduttiva. L'efficacia del modello di Ginzburg-Landau sta proprio nella sua generalità: essa è estremamente esplicativa nel renderci consapevoli in relazione alla superconduttività in una vasta gamma di materiali. E' molto semplice acquisirne consapevolezza in relazione alla propria semplicità matematica. Inoltre induce, senza troppe difficoltà, a teorizzare il reticolo di Abrikosov, poi sperimentalmente osservato.

di tipo II. Per quanto riguarda il primo caso la figura 3.2 mostra la curva $H_C(T)$ che separa la fase normale da quella superconduttiva nel diagramma di fase H-T.

Diagramma di fase H-T

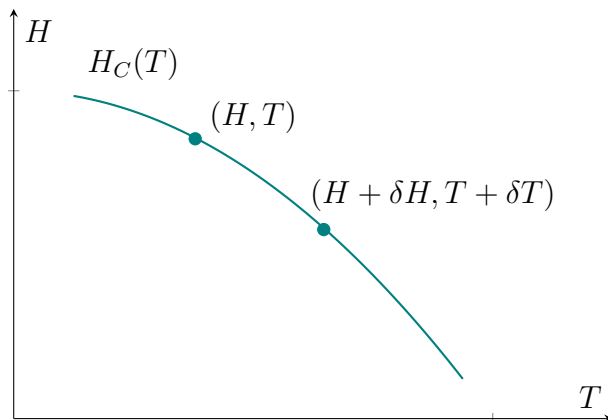


Figura 3.2: Curva di separazione della fase normale da quella superconduttiva in superconduttori di tipo I. Qui sono evidenziati due punti del diagramma di fase appartenenti alla curva $H_C(T)$. Le variazioni di campo e temperatura δH e δT sono da considerarsi infinitesime.

Consideriamo i punti (H, T) e $(H + \delta H, T + \delta T)$ evidenziati in figura: per soddisfare la condizione di equilibrio tra la fase normale e quella superconduttiva è necessario che le energie di Gibbs in tali punti risultino uguali, perciò

$$\begin{aligned} G_n(T, H) &= G_s(T, H) \\ G_n(T + \delta T, H + \delta H) &= G_s(T + \delta T, H + \delta H). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Differenziando entrambi i membri della (3.10) otteniamo

$$\frac{\partial G_n}{\partial H} \delta H + \frac{\partial G_n}{\partial T} \delta T = \frac{\partial G_s}{\partial H} \delta H + \frac{\partial G_s}{\partial T} \delta T, \quad (3.11)$$

e ricordando che il differenziale dell'energia di Gibbs per un materiale superconduttore si esprime come $dG = -SdT - \mu_0 VMdH$ possiamo concludere che

$$-S_s \delta T - \mu_0 V M_s \delta H = -S_n \delta T - \mu_0 V M_n \delta H, \quad (3.12)$$

dove $M_{n/s}$ e $S_{n/s}$ sono rispettivamente l'entropia e la magnetizzazione del campione nella fase normale e superconduttiva. Riordinando i termini otteniamo

$$\frac{dH}{dT} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{S_s - S_n}{M_s - M_n}. \quad (3.13)$$

L'equazione (3.13) può essere riscritta in maniera più compatta introducendo il calore latente per unità di volume $L = T(S_s - S_n)$ rilasciato durante la transizione.

Se poi consideriamo che $M_s \simeq -H$ e $M_n \simeq 0$ per un superconduttore di tipo I, il risultato è il seguente

$$\frac{dH}{dT} = -\frac{L}{\mu_0 HT}. \quad (3.14)$$

Quest'ultima equazione è analoga all'equazione di Clausius-Clapeyron per una transizione di fase gas-liquido, eccetto per aver sostituito la pressione P con H e il volume V con $-\mu_0 M$. Tale relazione indica per definizione che la transizione di fase in corrispondenza di H_C è del primo ordine. Di conseguenza la variazione del parametro d'ordine Ψ da zero al valore assunto in corrispondenza di H_C sarà discontinua.

In contrasto, la transizione di fase in corrispondenza di H_{C2} in superconduttori di tipo II è del secondo ordine. Ci possiamo quindi aspettare che il parametro d'ordine Ψ vari con continuità attraverso la transizione e che sia piccolo per valori del campo esterno $H \lesssim H_{C2}$. Lo stesso discorso fatto per il parametro d'ordine è possibile farlo per la magnetizzazione del campione: essendo infatti Ψ prossimo a zero, lo è anche la densità di elettroni superconduttivi n_s definita nella sezione 1.3.1. Di conseguenza le correnti che generano la magnetizzazione sono molto piccole (vedi figura 1.5 per maggiori dettagli).

3.3.2 La soluzione di Abrikosov

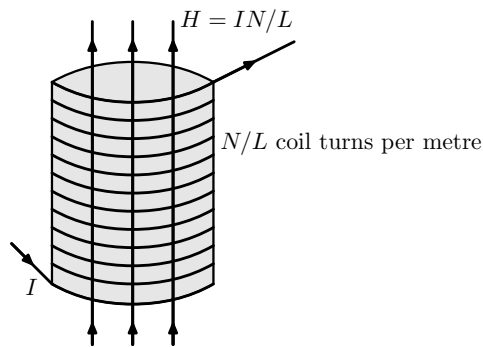


Figura 3.3: L'apparato consiste in un cilindro uniforme e omogeneo di materiale superconduttore di tipo II, avvolto da un filo in modo che formi un solenoide di $\frac{N}{L}$ avvolgimenti per metro. Questo garantisce la produzione di un campo magnetico esterno $H = I\frac{N}{L}$ uniforme all'interno del solenoide.

Consideriamo l'apparato sperimentale rappresentato in figura 3.3. Con ottima approssimazione la magnetizzazione del campione è nulla se ci mettiamo nella condizione di campo esterno $H \lesssim H_{C2}$. Conseguentemente è ragionevole assumere che il campo di induzione magnetica B all'interno del campione sia uniforme. Trascurando ogni variazione spaziale di B , possiamo scrivere

$$B = \mu_0 H = (0, 0, B). \quad (3.15)$$

Per quanto riguarda il potenziale vettore $\mathbf{A}(x, y, z)$ scegliamo di rappresentarlo tramite la **gauge di Landau**:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (0, xB, 0) = xB\hat{\mathbf{y}}. \quad (3.16)$$

Con questa scelta del potenziale vettore la prima equazione di Ginzburg-Landau (2.16) prende la forma ⁶

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{2iBe}{\hbar} x\hat{\mathbf{y}} \right)^2 \Psi(\mathbf{x}) + a\Psi(\mathbf{x}) + b\Psi(\mathbf{x})|\Psi(\mathbf{x})|^2 = 0. \quad (3.17)$$

Questa equazione mantiene le stesse difficoltà matematiche della (2.16): una possibile semplificazione che poi si rivelerà essere fondamentale per ottenere il reticolo di vortici è quella di eliminare il termine cubico $b\Psi(\mathbf{x})|\Psi(\mathbf{x})|^2$. Ciò è lecito perché nella condizione sperimentale in cui ci siamo messi ($H \lesssim H_{C2}$) il parametro d'ordine $\Psi(\mathbf{x})$ è praticamente nullo e di conseguenza il termine cubico è trascurabile rispetto agli altri termini dell'equazione. Questo procedimento va sotto il nome di **linearizzazione** delle equazioni di Ginzburg-Landau:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{2iBe}{\hbar} x\hat{\mathbf{y}} \right)^2 \Psi(\mathbf{x}) + a\Psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.18)$$

Sviluppiamo il quadrato del primo membro e otteniamo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla^2 - \frac{4e^2 B^2}{\hbar^2} x^2 + \left[\nabla, \frac{2ieB}{\hbar} x\hat{\mathbf{y}} \right] + \frac{4ieB}{\hbar} x \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi(\mathbf{x}) + a\Psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.19)$$

Notiamo innanzitutto che i termini ∇ e $x\hat{\mathbf{y}}$ commutano tra di loro, perciò possiamo eliminare il commutatore nella relazione precedente. Inoltre dalla relazione (2.2) sappiamo che $a(T)$ è negativo in corrispondenza della fase superconduttiva. Indichiamo per brevità il parametro d'ordine con ψ . Riordinando i termini otteniamo

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + \frac{1}{2} m^* \omega^2 x^2 - i\hbar\omega x \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi = |a|\psi, \quad (3.20)$$

dove è stata definita la frequenza $\omega = \frac{2eB}{m^*}$. Conviene ora riscrivere l'equazione precedente in termini degli operatori d'impulso p_x, p_y, p_z : $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla \Rightarrow -\hbar^2\nabla^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ e quindi

$$\left(\frac{1}{2m^*} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} m^* \omega^2 x^2 - i\hbar\omega x \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi = |a|\psi. \quad (3.21)$$

⁶Nel seguito della trattazione si considera $e^* = -2e$ in quanto, secondo la teoria BCS, il meccanismo della superconduttività è realizzato dalle coppie di Cooper.

Gli operatori p_y e x commutano tra di loro; raccogliendo in un quadrato l'impulso p_y e i termini non cinetici otteniamo:

$$\frac{1}{2m^*} \left[p_x^2 + p_z^2 + (p_y + m^* \omega x)^2 \right] \psi = |a| \psi. \quad (3.22)$$

Concentriamoci ora sul termine di sinistra: l'Hamiltoniana $H = \frac{1}{2m^*} [p_x^2 + p_z^2 + (p_y + m^* \omega x)^2]$ può essere espressa come la somma di due Hamiltoniane $H_1 = \frac{p_z^2}{2m^*}$ e $H_2 = \frac{1}{2} m^* \omega^2 (\frac{p_y}{m^* \omega} + x)^2$ tra di loro commutanti ⁷. Riscriviamo l'equazione (3.22) in modo più compatto: $H\psi = E\psi$. In virtù della proprietà $[H_1, H_2] = 0$ possiamo separare la (3.22) in due equazioni distinte per H_1 e H_2 :

$$\begin{aligned} H_1 \phi(z) &= E_1 \phi(z) \\ H_2 \theta(x, y) &= E_2 \theta(x, y), \end{aligned} \quad (3.23)$$

con

$$\psi(x, y, z) = \phi(z) \theta(x, y) \quad \text{e} \quad E = E_1 + E_2. \quad (3.24)$$

Essendo H_1 solo cinetica, la prima equazione della (3.23) ha come soluzione generale

$$\phi(z) = A e^{ik_z z} + B e^{-ik_z z}, \quad \text{dove} \quad k_z = \sqrt{\frac{2E_1 m^*}{\hbar^2}}. \quad (3.25)$$

Per quanto riguarda la seconda equazione, siccome p_y e H_2 commutano possiamo scegliere come autofunzione simultanea dei due operatori la funzione

$$\theta(x, y) = e^{ik_y y} f(x). \quad (3.26)$$

A seguito dei risultati ottenuti, la soluzione dell'equazione (3.20) sarà una combinazione tra onde piane lungo z e y e di una funzione $f(x)$:

$$\psi(x, y, z) = e^{i(k_y y + k_z z)} f(x). \quad (3.27)$$

Per ottenere l'espressione di $f(x)$ sostituiamo la (3.27) all'interno dell'equazione (3.20):

⁷Il termine H_1 corrisponde al moto di una particella libera lungo l'asse z . Il termine H_2 descrive il moto nel piano xy . Risulta che p_x è una costante del moto perché commuta con H_2 (che non dipende da x). Ciò però non significa che il moto lungo l'asse x sia un moto libero. In realtà nel caso classico il moto lungo x è legato a quello lungo y . Inoltre il commutatore $[\frac{p_y}{m^* \omega} + x, p_x] = i\hbar$ quindi H_2 è effettivamente l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico traslato, lungo l'asse x , con origine in $x_0 = -\frac{p_y}{m^* \omega}$ e con frequenza pari a ω . Il moto sul piano xy è quindi quantizzato con uno spettro di livelli energetici di un oscillatore armonico, detti **Livelli di Landau**.

$$\frac{\hbar^2}{2m^*}(k_z^2 + k_y^2) - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 f}{dx^2} + \hbar\omega x k_y f(x) + \frac{1}{2} m^* \omega^2 x^2 f(x) = |a| f(x). \quad (3.28)$$

Riordiniamo i termini e otteniamo

$$\left(|a| - \frac{\hbar^2(k_z^2 + k_y^2)}{2m^*} \right) f(x) = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} m^* \omega^2 x^2 + \hbar\omega x k_y \right) f(x). \quad (3.29)$$

Definiamo con $x_0 = \frac{\hbar k_y}{m^* \omega}$ l'origine del nostro oscillatore armonico traslato. Completando il quadrato nella (3.29) ⁸ otteniamo la seguente equazione:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} f''(x) + \frac{1}{2} m^* \omega^2 (x - x_0)^2 f(x) = \left(|a| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} \right) f(x) \quad (3.30)$$

Quest'ultima relazione è analoga all'equazione di Schrödinger per un oscillatore armonico con l'origine traslata in x_0 . Il termine di destra rappresenta quindi le autoenergie dell'oscillatore⁹:

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega = |a| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}. \quad (3.31)$$

Per definizione $|a(T)| = \alpha(T_C - T)$. Possiamo perciò riscrivere la (3.31) come segue:

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} = \alpha(T_C - T). \quad (3.32)$$

Supponiamo ora di raffreddare il nostro campione di materiale superconduttore applicando nel contempo un campo magnetico esterno H . Se ci interessiamo solamente alla soluzione ad energia minore ($n = 0$ e $k_z = 0$), in corrispondenza della temperatura critica risulterà impossibile soddisfare la (3.32) a causa della presenza dell'energia di punto zero $\hbar\omega/2$. L'unico modo per ottenere una soluzione è quello di raffreddare il campione ad una temperatura inferiore a quella critica, in modo tale che $\frac{1}{2}\hbar\omega = \alpha(T_C - T)$. In questo modo possiamo ricavare la dipendenza della temperatura critica dal campo magnetico esterno:

$$T_C(H) = T_C(0) - \frac{e\hbar\mu_0}{\alpha m^*} H. \quad (3.33)$$

⁸ $(\hbar\omega x k_y + \frac{1}{2} m^* \omega^2 x^2) = \frac{1}{2} m^* \omega^2 (x - x_0)^2 - \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m^*}$.

⁹Le funzioni $f_n(x)$ saranno le autofunzioni caratteristiche di un oscillatore armonico, ovvero gaussiane moltiplicate per il polinomio di Hermite $H_n(x)$ corrisponde al livello energetico n -esimo considerato.

In alternativa, invece di raffreddare il campione possiamo mantenerlo ad una temperatura fissata e, partendo da un campo esterno $H > H_{C2}$, diminuirlo progressivamente finché

$$\frac{\hbar 2eB}{2 m^*} = \alpha(T_C - T). \quad (3.34)$$

Se definiamo $B_{C2} = \mu_0 H_{C2}$ e riordiniamo i termini otteniamo

$$B_{C2} = \frac{2m^* \alpha(T_C - T) \hbar}{\hbar^2} \frac{\hbar}{2e} = \frac{\varphi_0}{2\pi \xi(T)^2}, \quad (3.35)$$

dove abbiamo sfruttato le definizioni di *flusso elementare* $\varphi_0 = \frac{h}{2e}$ e della lunghezza di coerenza $\xi = \frac{\hbar^2}{2m^* |a(T)|}$.

Cerchiamo ora la relazione che lega il campo H_{C2} all'espressione del campo critico H_C caratteristico della transizione di un superconduttore di tipo I. Richiamando la definizione di lunghezza di penetrazione $\lambda_L = \left(\frac{m^*}{e^* \mu_0 n_s}\right)^{1/2}$, calcoliamo il prodotto $\lambda_L \xi$:

$$\lambda_L \xi = \left(\frac{m^*}{e^* \mu_0 n_s} \frac{\hbar^2}{2m^* |a(T)|}\right)^{1/2} = \frac{h}{e^*} \frac{1}{2\pi |a|} \sqrt{\frac{b}{2\mu_0}}. \quad (3.36)$$

Riarrangiando i termini possiamo scrivere che

$$\frac{\varphi_0}{2\pi \sqrt{2\mu_0} \lambda_L \xi} = \frac{|a|}{\sqrt{\mu_0 b}} = H_C, \quad (3.37)$$

dove l'ultima uguaglianza sussiste grazie alla relazione (2.3). Sfruttando infine la relazione (3.35) si perviene all'espressione

$$H_C = \frac{\varphi_0 \xi}{2\pi \sqrt{2\mu_0} \lambda_L \xi^2} = \frac{H_{C2}}{\sqrt{2\kappa}}. \quad (3.38)$$

Quest'ultima relazione risulta coerente con il criterio enunciato in (3.9) per la distinzione tra superconduttori di tipo I e tipo II.

La relazione (3.35) implica che in corrispondenza del campo critico B_{C2} vi è esattamente un quanto di flusso magnetico φ_0 per unità di area $2\pi \xi(T)^2$.¹⁰

Fino ad ora ci siamo occupati di risolvere l'equazione di Ginzburg-Landau linearizzata. Questa semplificazione ci permette di trovare l'espressione del parametro

¹⁰Ciò equivale a dire che ogni vortice che si forma nello stato misto porta con sé un quanto di flusso φ_0 . Inoltre l'incremento del campo H esterno non modifica né la dimensione dei vortici né la quantità di flusso trasportato da ciascuno di essi. L'effetto del campo esterno è quello di variare il numero di vortici, modificando di conseguenza la distanza fra di essi.

d'ordine Ψ in corrispondenza di H_{C2} (o per valori $H \lesssim H_{C2}$). Purtroppo la soluzione trovata non è utile a descrivere Ψ per campi $H < H_{C2}$, cioè quando ci troviamo all'interno dello stato misto, lontani da H_{C2} .

Per aggirare questo problema dovremmo risolvere l'equazione completa (3.17). In generale tale compito risulta essere estremamente complicato. La genialità del lavoro di Abrikosov del 1957 sta proprio nell'aver compreso, trattando esclusivamente con la soluzione dell'equazione linearizzata, che solo la soluzione dell'oscillatore di energia minima ($n = 0$ e $k_z = 0$) era significativa¹¹. Di conseguenza la soluzione che prendiamo in considerazione è la seguente:

$$\Psi(\mathbf{r}) = C e^{i(k_y y)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\xi(T)^2}}, \quad (3.39)$$

dove C è una costante di normalizzazione e Ψ è espresso come il prodotto tra onde piane lungo y e una funzione Gaussiana di larghezza pari alla lunghezza di coerenza ξ .

Tabella 3.1: Valori della lunghezza di coerenza in materiali superconduttori di tipo I e tipo II. L'ultimo dato si riferisce alla lunghezza di coerenza protonica nel caso di superfluidità in stelle di neutroni.

<i>Superconduttore</i>	<i>Lunghezza di coerenza ξ (nm)</i>
<i>Pb</i>	39
<i>Al</i>	45
<i>Nb</i>	52
<i>K₃C₆₀</i>	240
<i>YBa₂Cu₃O_{7-δ}</i>	156
<i>YNi₂B₂C</i>	103
Protoni in SN	$6 \cdot 10^{-6}$

Il passaggio cruciale che permette di arrivare alla soluzione della (3.17) è quello di considerare una combinazione lineare del parametro d'ordine definito in (3.39). Infatti, siccome le condizioni lungo tutto il superconduttore in figura 3.3 sono supposte essere uniformi, è naturale considerare una combinazione lineare delle soluzioni distanziate da eguali intervalli. La soluzione sarà quindi la seguente:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i(k_y y)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\xi(T)^2}}. \quad (3.40)$$

La natura uniforme ed omogenea del campione porta inoltre a supporre che tali soluzioni si dispongano su un **reticolo periodico**¹². Tale periodicità viene

¹¹Rimangono comunque un numero infinito di stati degeneri corrispondenti ai diversi valori di k_y .

¹²Notiamo che prima di imporre la condizione di periodicità la Gaussiana che rappresenta il parametro d'ordine è invariante per traslazione continua lungo tutto il piano. Con l'imposizione

implementata lungo la direzione y semplicemente restringendo i valori permessi di k_y ad un insieme discreto:

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y}n, \quad (3.41)$$

dove L_y è il periodo e n un qualsiasi numero intero positivo o negativo¹³. Il parametro C_n della combinazione lineare viene considerato un parametro variazionale che deve essere scelto in modo da minimizzare l'energia libera di Ginzburg-Landau del sistema. Il reticolo così costruito risulta essere periodico se tale condizione persiste su tutto il piano xy . La periodicità in y viene implementata come fatto precedentemente; quella in x la si ottiene imponendo la seguente condizione al parametro C_n :

$$C_{n+\nu} = C_n \quad (3.42)$$

per qualche intero ν . Il periodo lungo x vale di conseguenza

$$L_x = \nu \frac{\varphi_0}{BL_y}. \quad (3.43)$$

A seconda del valore scelto di ν i vortici dello stato misto si dispongono in diverse configurazioni geometriche, caratterizzate da diversi passi reticolari e da un diverso valore dell'energia libera totale del sistema.

Consideriamo il caso $\nu = 1$. Questo corrisponde ad un reticolo di vortici *quadrato*¹⁴, schematizzato nella figura 3.4. Per capire se il quadrato è il reticolo energeticamente favorito valutiamo l'energia libera F_s ¹⁵ del sistema:

$$F_s = F_n(0) + \frac{H_C^2}{4\pi} \left(B^2 - \frac{\kappa - B}{1 + (2\kappa^2 - 1)\beta} \right), \quad (3.44)$$

dove $F_n(0)$ è l'energia libera dello stato normale a campo magnetico nullo, H_C è il campo magnetico critico della transizione del primo ordine in superconduttori

della periodicità questa invarianza diventa discreta. Ciò significa che il ground state del sistema possiede "una simmetria in meno". Tale comportamento, molto frequente in fisica, è chiamato **rottura spontanea della simmetria**.

¹³Conseguentemente il centro delle soluzioni diventa: $x_0 = \frac{2\pi\hbar}{\omega m^* L_y} = -\frac{\varphi_0}{BL_y}n$.

¹⁴Per dimostrare che il caso $\nu = 1$ rappresenta un reticolo quadrato è sufficiente mostrare che il parametro Ψ può essere espresso tramite la funzione speciale θ_3 di Jacobi: $\Psi = C e^{\frac{1}{2}\kappa^2 x^2} \theta_3[1; \sqrt{2\pi}\kappa i(x + iy)]$. Sotto rotazione del sistema di coordinate di un angolo $\pi/2$ il parametro d'ordine viene moltiplicato solo per un fattore di fase $e^{i\kappa^2 xy}$. Di conseguenza $|\Psi|^2$ ha la simmetria di un quadrato.

¹⁵Per i passaggi dettagliati che portano a tale formulazione dell'energia libera si veda [28].

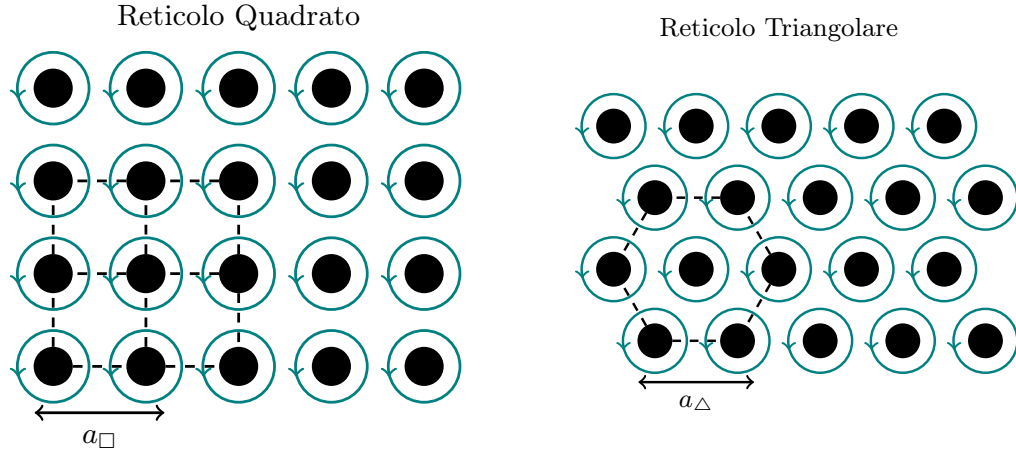


Figura 3.4: Schematizzazione del reticolo di vortici per geometrie quadrata e triangolare. Per un dato campione superconduttivo e una fissata densità di flusso di campo magnetico, abbiamo che $a_{\square} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\kappa} = \left(\frac{\varphi_0}{B}\right)^{1/2}$ e $a_{\Delta} = \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{\varphi_0}{B}\right)^{1/2}$. Perciò vale che $a_{\Delta} > a_{\square}$.

di tipo I, B è il valore medio del campo esterno H ($B = \bar{H}$) e β , detto *parametro di Abrikosov*¹⁶, è definito dal seguente rapporto¹⁷

$$\beta = \frac{\langle |\Psi|^4 \rangle_{\Omega}}{(\langle |\Psi|^2 \rangle_{\Omega})^2} = \frac{\int_{\Omega} |\Psi|^4 d^2x}{\left(\int_{\Omega} |\Psi|^2 d^2x\right)^2}. \quad (3.45)$$

Per minimizzare il valore dell'energia libera è necessario che sia minimo il valore del parametro β . Per un reticolo quadrato tale parametro assume il valore di 1.18, mentre si dimostra che per un reticolo triangolare (rappresentato dal valore $\nu = 2$) vale che $\beta = 1.16$. Di conseguenza i vortici si disporranno secondo la configurazione favorita energeticamente, ovvero quella di un reticolo triangolare, anch'esso rappresentato in figura 3.4.

Riportiamo inoltre nella figura 3.5 il grafico rappresentante l'andamento di $|\Psi|^2$ per un reticolo di vortici quadrato e triangolare. Riassumendo, la teorizzazione dell'esistenza del reticolo di vortici venne fatta da Abrikosov in un articolo del 1957 ([28]). Da allora furono ideati diversi metodi sperimentali mirati ad osservare il reticolo in superconduttori di tipo II. Uno dei metodi più immediati è la cosiddetta *"flux decoration"*, la quale consiste nel depositare piccole particelle paramagneti-

¹⁶Questo parametro risulta indipendente dal campo esterno H . Dipende invece dalla simmetria dei vortici e dalla distanza tra di essi.

¹⁷ Ω è definito come una qualsiasi cella primitiva del reticolo contenente un vortice.

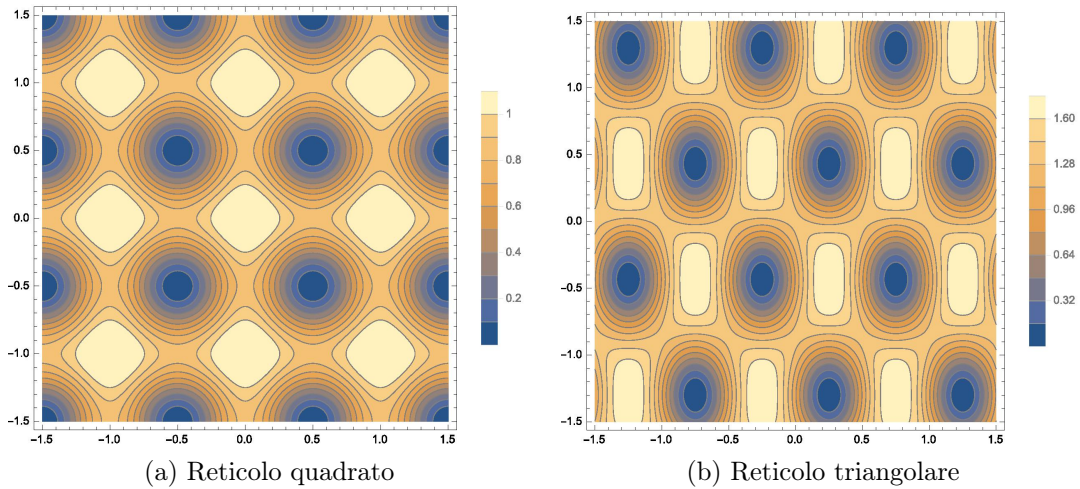


Figura 3.5: Linee di livello del modulo quadro $|\Psi|^2$ del parametro d'ordine per un reticolo quadrato e un reticolo triangolare.

che sulla superficie del superconduttore. E' possibile osservare che le particelle si concentreranno nelle zone a maggior campo magnetico, ovvero i vortici¹⁸.

In figura 3.6 riportiamo alcune immagini del reticolo di vortici di Abrikosov, osservate in superconduttori di natura differente e ottenute con diverse tecniche sperimentali.

Desidero ora accennare brevemente ad una rilevante problematica nell'ambito dei vortici di Abrikosov, ovvero la stabilità del reticolo. Come vedremo nella prossima sezione, tra i vortici dello stato misto agiscono delle forze che ne alterano necessariamente lo stato di moto. La dinamica di quest'ultimi dipende da numerosi fattori con diversi gradi di importanza: a temperatura finita agiscono le fluttuazioni termiche; in materiali non ideali sono presenti difetti e impurezze a livello cristallino. Questi effetti sono poco rilevanti in quanto possono essere resi trascurabili lavorando a basse temperature e con materiali con un alto grado di purezza. Un effetto invece che può cambiare drasticamente la dinamica dei vortici è quello delle forze di attrito agenti all'interno del reticolo.

Spesso si ricorre a modelli matematici basati su ragionevoli approssimazioni per descrivere la dinamica e la stabilità del reticolo. Una delle assunzioni più frequenti è quella di considerare il raggio ξ del nucleo normale trascurabile rispetto alla lunghezza di penetrazione λ_L del materiale in esame. In laboratorio però si lavora con materiali superconduttori caratterizzati da un parametro di Ginzburg-

¹⁸Altri metodi consistono nel misurare la variazione del flusso di campo magnetico attraverso la superficie del campione, osservare le figure di diffrazione prodotte dallo scattering di neutroni con i vortici magnetici, ecc.

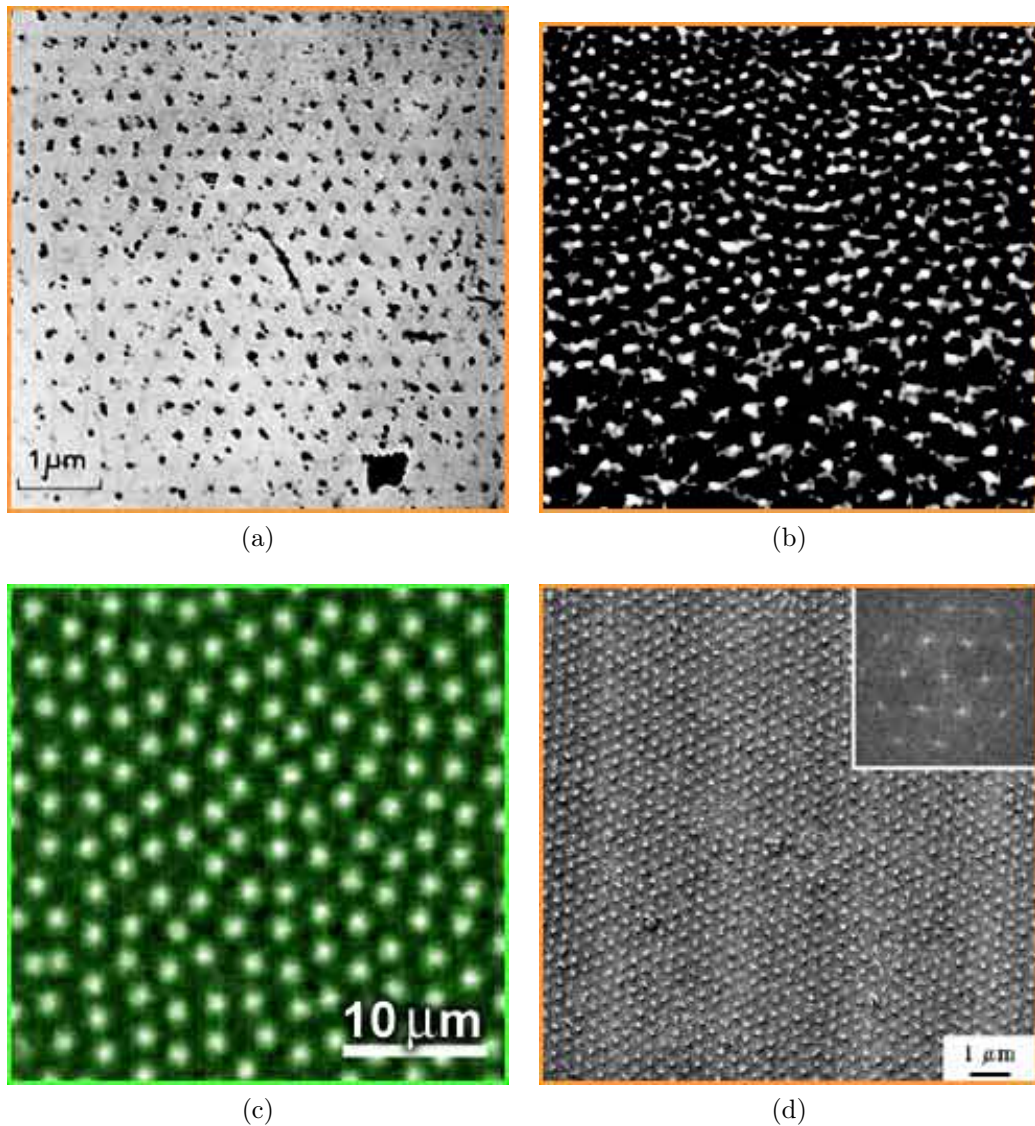


Figura 3.6: osservazioni sperimentali del reticolo di Abrikosov. **(a)**: First image of Vortex lattice, 1967. Bitter Decoration, Pb-4at %In rod, 1.1K, $B = 195$ G. **(b)**: Gradient of Vortex density, 1995. Bitter Decoration, NbSe2 crystal, $B = 30$ G, 1.2K, area near the edge. **(c)**: Magneto-optical image of Vortex lattice, 2001. Magneto-Optical Imaging, NbSe2 crystal, 4.3K, $B = 3$ G. **(d)**: Abrikosov lattice in MgB2, 2003. Bitter Decoration, MgB2 crystal, $B = 200$ G.

Landau κ finito (50 è un valore comune). Di conseguenza i vortici possiedono delle dimensioni non trascurabili. Come già menzionato il materiale all'interno di essi è normale e quindi lo spettro di energie degli elettroni è quello tipico di un metallo, diverso dallo spettro BCS. Tale approssimazione spesso porta a forti incongruenze tra predizioni teoriche e risultati sperimentali. Nonostante ciò, la maggior parte dei modelli teorici converge verso l'ipotesi che il reticolo quadrato sia instabile, mentre quello triangolare sia stabile.

Concludiamo accennando ad un argomento strettamente connesso alla stabilità ma che non trattiamo per la sua eccessiva complessità: la cosiddetta **Vortex Matter**. Nei superconduttori ad alte temperature i vortici non formano mai un reticolo perfettamente periodico: spesso si muovono per ragioni riconducibili alle fluttuazioni termiche e il risultato è quello di avere una varietà di stati della materia diversi, includendone di liquidi (in cui i vortici si muovono e interagiscono tra loro) e di vetrosi (in cui i vortici sono fissi ma senza un preciso ordine). Questi effetti causano una perdita di regolarità nel reticolo e soprattutto la comparsa di una componente resistiva, alterando così una delle caratteristiche fondamentali della superconduttività.

3.4 Struttura e dinamica dei vortici

Il modo più corretto di studiare i vortici dello stato misto e le loro mutue interazioni sarebbe quello di sfruttare la teoria di Ginzburg-Landau e la relativa soluzione di Abrikosov. Noi seguiremo invece un approccio più semplice, basato sulle equazioni di London. Esso porta comunque a risultati importanti per quanto riguarda la struttura e la dinamica dei vortici.

3.4.1 Vortice isolato

Come abbiamo mostrato nel paragrafo 2.3, in particolare con le equazioni (2.23) e (2.24), la teoria di London non è altro che un caso limite del modello più generale di Ginzburg-Landau. Noi studieremo i vortici che si formano in superconduttori di tipo II ($\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$) in cui sia valida la condizione $\kappa \gg 1$, ovvero $\lambda_L \gg \xi$. Tale condizione viene identificata come **limite di London** e il campione superconduttivo viene detto *superconduttore di London*. In questa situazione, un vortice è raffigurato come una struttura cilindrica di raggio $\sim \xi$ dove il materiale è nella fase normale, circondato da supercorrente circolante in un'area $\sim \lambda_L^2$. Ad una distanza $r \gg \xi$ vale che $|\Psi|^2 \approx 1$ e inoltre, essendo $\lambda_L \gg \xi$, le correzioni all'energia dovute a $\nabla\Psi$ sono trascurabili. Grazie a queste semplificazioni, possiamo fornire una nuova espressione per l'energia libera di una superconduttore:

$$F_s = F_n + \int_V d^3x \left(\frac{e^{*2} n_s}{2m^*} |\mathbf{A}|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right). \quad (3.46)$$

Qui si è fatto uso della densità n_s definita nella sezione 1.3.1. Questa espressione dell'energia libera, detta **funzionale di London**, è formalmente identica all'energia libera di un fluido superconduttore. Per dimostrarlo è sufficiente sfruttare la relazione (1.49) e la definizione di \mathbf{J}_s data dalla (1.28). Il risultato è il seguente

$$\frac{e^{*2} n_s}{2m^*} |\mathbf{A}|^2 = \frac{1}{2} m^* n_s v_s^2. \quad (3.47)$$

Il secondo termine rappresenta proprio l'energia cinetica di un fluido superconduttore. Per quanto riguarda il termine magnetico dell'energia libera, esso rimane invariato. Sfruttiamo ora l'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s$:

$$\begin{aligned} F_s[B] &= F_n + \int_V \frac{d^3x}{2\mu_0} \left(\frac{m^*}{\mu_0 n_s e^{*2}} |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + B^2 \right) \\ &= F_n + \int_V \frac{d^3x}{2\mu_0} \left(\lambda_L^2 |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + B^2 \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Per come viene definito il potenziale $F_s[B]$, un sistema termodinamico a volume e temperatura costanti evolve verso stati di energia libera decrescenti; per esso dunque gli stati di energia libera minima rappresentano configurazioni di equilibrio stabile.

Essendo F un funzionale, per trovarne il minimo dobbiamo calcolare la variazione $\delta F[B] = F[B + \delta B] - F[B]$ e porla uguale a zero. Questi sono concettualmente gli stessi passaggi matematici che abbiamo seguito per ottenere le equazioni di Ginzburg-Landau. Per non appesantire troppo il discorso i calcoli esatti per questa e altre situazioni vengono svolti nell'appendice A.

$$\begin{aligned} \delta F_s[B] &= \int_V \frac{d^3x}{2\mu_0} \left[\lambda_L^2 \left(|\nabla \times \mathbf{B}|^2 + 2\nabla \cdot (\delta \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) + 2\delta \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) \right) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{B} + \delta \mathbf{B})^2 - \lambda_L^2 |\nabla \times \mathbf{B}|^2 - B^2 \right] = 0 \quad \forall \quad \delta \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Semplificando l'espressione otteniamo¹⁹

¹⁹Vedi appendice A.

$$- \int_S \frac{d^2x}{\mu_0} \delta \mathbf{B} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{B})) + \int_V \frac{d^3x}{\mu_0} \delta \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} - \lambda_L^2 \nabla^2 \mathbf{B}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{B}. \quad (3.50)$$

Tale condizione deve valere per ogni variazione $\delta \mathbf{B}$ perciò entrambi i membri dell'equazione (3.50) devono essere separatamente nulli:

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \\ \mathbf{B} - \lambda_L^2 \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

La prima equazione è una condizione al contorno che interessa la superficie S del superconduttore. La seconda è esattamente analoga alla (1.45). L'aver ottenuto le stesse equazioni con due approcci totalmente diversi dimostra la validità del ragionamento seguito. Mostriamo ora come ricavare l'espressione dei vortici dall'equazione (3.51)b. Cerchiamo una soluzione a simmetria cilindrica dove il campo magnetico \mathbf{B} è diretto lungo l'asse z e dipende dalla sola coordinata radiale: $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{k}$. L'espressione (3.51)b diventa:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{\lambda_L^2} \right) B(r) = 0. \quad (3.52)$$

La (3.52) rappresenta un'equazione differenziale del secondo ordine particolare, chiamata *equazione di Bessel*. Essa ammette come soluzioni le cosiddette *funzioni di Bessel modificate* I_0 e K_0 . Vediamo velocemente le principali proprietà di queste funzioni.

Limiti asintotici:

$$K_0(z) \sim \begin{cases} -\log z, & z \rightarrow 0. \\ \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, & z \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.53)$$

$$I_0(z) \sim \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1)}, & z \rightarrow 0. \\ \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, & z \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.54)$$

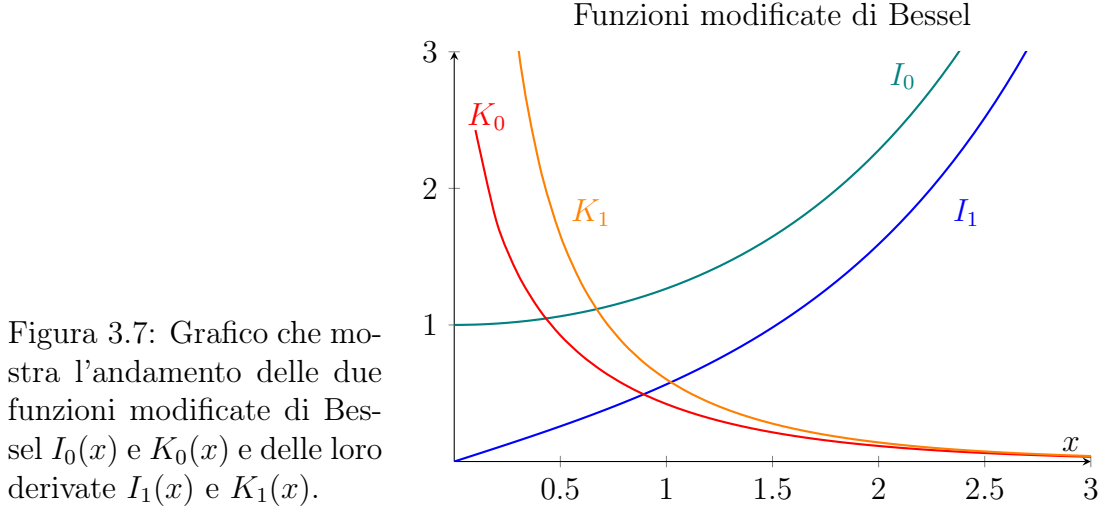
Relazioni di derivazione:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} I_0(z) = I_1(z). \\ \frac{d}{dz} K_0(z) = -K_1(z). \end{cases} \quad (3.55)$$

La figura 3.7 mostra gli andamenti delle funzioni K_0 , K_1 , I_0 e I_1 .

Notiamo subito che una delle due soluzioni, $I_0(r)$, diverge esponenzialmente per z grande. Tale soluzione non è fisicamente accettabile per il campo magnetico.

²⁰L'operatore Laplaciano in coordinate cilindriche vale $\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.



L'unica soluzione ammessa per il nostro problema è quindi K_0 . L'espressione del campo magnetico, fissata la costante B_0 corrispondente al campo nel core di fase normale, risulta:

$$\mathbf{B}(r) = B_0 K_0\left(\frac{r}{\lambda_L}\right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.56)$$

Tramite l'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s$ calcoliamo la supercorrente:

$$\mathbf{J}_s = -\frac{d}{dr} \frac{1}{\mu_0} B_0 K_0\left(\frac{r}{\lambda_L}\right) \hat{\mathbf{k}} = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda_L} K_1\left(\frac{r}{\lambda_L}\right) \hat{\theta},^{21} \quad (3.57)$$

dove $\hat{\theta}$ rappresenta la direzione tangenziale, ortogonale a quella radiale. L'espressione (3.57) ci dice che intorno ad un nucleo di raggio ξ scorre una supercorrente \mathbf{J}_s . \mathbf{J}_s diverge per $r \rightarrow 0$: per correnti troppo grandi la superconduttività è distrutta e quindi otteniamo un core nella fase normale. Fuori dal core, la supercorrente impedisce al campo magnetico esterno \mathbf{B} di penetrare e otteniamo un materiale nella fase superconduttiva. Calcoliamo ora il flusso del campo \mathbf{B} attraverso la superficie del vortice:

$$\varphi_0 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty B(r) r dr = 2\pi B_0 \int_0^\infty r dr K_0\left(\frac{r}{\lambda_L}\right). \quad (3.58)$$

Con un cambio di variabile rendiamo il problema adimensionale: $x = \frac{r}{\lambda_L}$;

$$\varphi_0 = 2\pi \lambda_L^2 B_0 \int_0^\infty x dx K_0(x). \quad (3.59)$$

²¹Il rotore in coordinate cilindriche: $\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) \hat{\mathbf{z}}$.

Riscriviamo quest'ultimo integrale sfruttando il fatto che K_0 deve soddisfare l'equazione differenziale: $K_0'' + \frac{1}{x}K_0' = K_0$:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 2\pi\lambda_L^2 B_0 \int_0^\infty x dx \left(K_0''(x) + \frac{1}{x}K_0'(x) \right) \\ &= 2\pi\lambda_L^2 B_0 \int_0^\infty dx \underbrace{\left(xK_0''(x) + K_0'(x) \right)}_{=\frac{d}{dx}(xK_0')} \\ &= 2\pi B_0 \lambda_L^2 x K_0' \Big|_0^\infty.\end{aligned}\quad (3.60)$$

Osservando l'andamento asintotico di $K_0(x)$ in figura 3.7 e sfruttando le regole di derivazione (3.55) possiamo concludere che $\varphi_0 = 2\pi B_0 \lambda_L^2$.

Osservazione. Il campo magnetico B espresso dalla relazione (3.56) soddisfa un'equazione più generale della (3.51)b. Essa può essere espressa nel modo seguente:

$$\mathbf{B} - \lambda_L^2 \nabla^2 \mathbf{B} = \varphi_0 \sum_{k=1}^N \oint d\mathbf{x}_k \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k),^{22} \quad (3.61)$$

dove l'integrale di linea è calcolato attorno al k -esimo vortice. L'aggiunta del secondo termine si giustifica con il fatto che il flusso di un vortice risulta essere quantizzato. E' interessante calcolare l'energia per unità di lunghezza posseduta da un vortice:²³

$$\begin{aligned}\frac{F_s - F_n}{L} &= \frac{E^{(vortice)}}{L} = \frac{1}{2\mu_0} \int_S d^2\mathbf{x} \left[\lambda_L^2 |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + B^2 \right] \\ &= \frac{\lambda_L^2}{4\mu_0} \int_S d^2\mathbf{x} \nabla^2 (B^2).\end{aligned}\quad (3.62)$$

Esprimendo il Laplaciano in coordinate cilindriche e integrando dal valore $r = \xi$ fino all'infinito per la coordinata radiale, otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{E^{(vortice)}}{L} &= \frac{\lambda_L^2}{4\mu_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_\xi^\infty r dr \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) B_0^2 K_0^2 \left(\frac{r}{\lambda_L} \right) \\ &= \frac{\lambda_L^2}{4\mu_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_\xi^\infty dr \underbrace{\left(r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} \right)}_{=\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)} B_0^2 K_0^2 \left(\frac{r}{\lambda_L} \right).\end{aligned}\quad (3.63)$$

²²Per la dimostrazione si veda l'appendice A.

²³Per il calcolo completo si veda l'appendice A.

Con il solito cambio di variabile $x = \frac{r}{\lambda_L}$ l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \frac{E^{(vortice)}}{L} &= \frac{\lambda_L^2 B_0^2 2\pi}{4\mu_0} \int_{\frac{\xi}{\lambda_L}}^{\infty} dx \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) K_0^2(x) \\ &= \frac{\lambda_L^2 B_0^2 2\pi}{4\mu_0} x \frac{d}{dx} K_0^2(x) \Big|_{\frac{\xi}{\lambda_L}}^{\infty} = \frac{\lambda_L^2 B_0^2 2\pi}{2\mu_0} x K_0(x) K_1(x) \Big|_{\frac{\xi}{\lambda_L}}^{\infty}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Nell'ipotesi che $\xi \ll \lambda_L$ possiamo sviluppare al primo ordine le funzioni di Bessel: $K_0\left(\frac{\xi}{\lambda_L}\right) \sim -\log\left(\frac{\xi}{\lambda_L}\right) = \log\left(\frac{\lambda_L}{\xi}\right)$, $K_1\left(\frac{\xi}{\lambda_L}\right) \sim -\frac{\lambda_L}{\xi}$. Sostituendo otteniamo

$$\boxed{\epsilon = \frac{E^{(vortice)}}{L} = \frac{\lambda_L^2 B_0^2 2\pi}{2\mu_0} \log\left(\frac{\lambda_L}{\xi}\right) = \frac{\varphi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda_L^2} \log\left(\frac{\lambda_L}{\xi}\right)}. \quad (3.65)$$

Osservazioni sull'equazione (3.65):

1. L'energia per unità di lunghezza posseduta da un vortice dipende in modo logaritmico dalla lunghezza di coerenza ξ , la quale denota il raggio del core normale del vortice.
2. ϵ è una funzione quadratica del flusso φ_0 . Se consideriamo un vortice che possiede un flusso pari a $2\varphi_0$, l'energia per unità di lunghezza sarà pari a 4ϵ . Questo significa che l'energia posseduta da un vortice con un flusso $2\varphi_0$ sarà doppia rispetto all'energia posseduta da due vortici distinti. E' quindi energeticamente favorita la formazione di due vortici di flusso φ_0 rispetto che ad un singolo vortice con flusso pari a $2\varphi_0$. Questa è la dimostrazione che i vortici dello stato misto hanno un flusso pari al flusso elementare.
3. Un calcolo più dettagliato dell'energia per unità di lunghezza di un vortice porta alla seguente espressione:

$$\epsilon = \frac{\varphi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda_L^2} \left[\log\left(\frac{\lambda_L}{\xi}\right) + \Delta \right]. \quad (3.66)$$

La costante numerica Δ , che è dell'ordine di 0.1, include gli effetti all'energia dovuti al core normale del vortice.

4. Dall'equazione (3.65) segue che l'energia di un vortice isolato è positiva: ciò significa che senza la presenza di un campo magnetico esterno il vortice non può esistere all'interno di un superconduttore. La formazione dei vortici non è energeticamente favorita. Se applichiamo un debole campo esterno H ad un

superconduttore, esso rimarrà nella fase superconduttiva e mostrerà l'effetto di Meissner-Ochsenfeld. Calcoliamo il valore minimo H_{C1} del campo esterno necessario a far emergere lo stato misto e i vortici. L'energia libera di Gibbs (per unità di lunghezza) di un vortice in campo magnetico esterno H risulta essere

$$G = \epsilon - \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\sigma, \quad (3.67)$$

dove S è la superficie del vortice. Il campo H è applicato dall'esterno e quindi è possibile portarlo fuori dall'integrale: $G = \epsilon - H \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{d}\sigma$. Il termine integrale rappresenta il flusso di \mathbf{B} attraverso la superficie del vortice e per il discorso fatto al punto 2, esso è uguale a φ_0 . Di conseguenza abbiamo che

$$G = \epsilon - \varphi_0 H. \quad (3.68)$$

Per un campo H_0 sufficientemente piccolo, $G > 0$ e lo stato misto è sfavorito energeticamente. Nonostante ciò esiste un valore di H , denominato H_{C1} , per il quale $G = 0$. Per valori maggiori di H_{C1} G risulta essere negativa, rendendo favorevole la formazione dei vortici. Tale valore del campo critico è

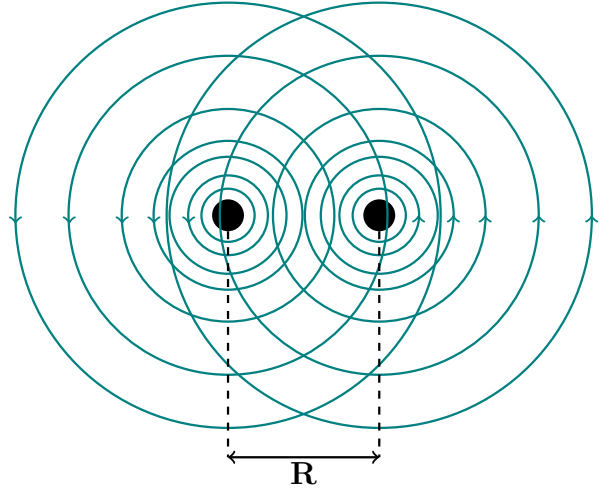
$$H_{C1} = \frac{\epsilon}{\varphi_0} = \frac{\varphi_0}{4\pi\mu_0\lambda_L^2} \left[\log\left(\frac{\lambda_L}{\xi}\right) + \Delta \right]. \quad (3.69)$$

La seguente tabella mostra i valori dei campi critici H_{C1} e H_{C2} per alcuni superconduttori di tipo II.

<i>Materiale</i>	H_{C1} (kOe)	H_{C2} (kOe)
$Hg_{0.05}Pb_{0.95}$	0.235	2.3
Al_2CMo_3	0.091	156
Nb	0.4 – 1.1	3 – 5.5
CNb	0.12	16.9
GaV_3	0.4	350
V	0.8	3.4
$Ti_{0.75}V_{0.25}$	0.029	199
$In_{0.316}Pb_{0.684}$	0.155	3.7
$Mo_{0.16}Ti_{0.84}$	0.028	98.7

Tabella 3.2: Valori dei campi critici H_{C1} e H_{C2} per alcuni materiali superconduttori, molti dei quali sono composti non stechiometrici. Ricordiamo che $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$ e $1 \text{ Oe} = 79.577 \text{ A/m}$.

Figura 3.8: Interazione tra due vortici paralleli in cui la supercorrente scorre nella stessa direzione. In generale, a seconda che le correnti nei due vortici siano concordi o discordi nella rotazione, la forza di interazione sarà repulsiva o attrattiva.



3.4.2 Interazione tra due vortici

Studiare la dinamica dei vortici in un superconduttore nello stato misto è molto complicato. Uno in principio dovrebbe tenere conto delle fluttuazioni termiche, della struttura non perfettamente cilindrica dei vortici ed di altri effetti che sono stati trascurati in questa semplice trattazione.

Noi ci mettiamo nella situazione in cui i due vortici si trovano nel bulk di un superconduttore di London ($\kappa \gg 1$). Finché la distanza tra i due vortici è molto più grande di λ_L possiamo trascurare ogni loro interazione. Ciò non è più vero quando i due vortici si avvicinano ed il core di uno dei due entra all'interno della regione ove scorre la supercorrente dell'altro vortice, come illustrato in figura 3.8.

Pensiamo al superconduttore come un fluido (teoria di London): le componenti superfluide delle velocità degli elettroni nella regione compresa tra i due vortici si eliminano, mentre le componenti delle velocità degli elettroni nelle regioni esterne si sommano tra loro. Ciò comporta, in accordo con il principio di Bernoulli, la formazione di un gradiente di pressione tra la regione esterna e quella interna. Tale differenza di pressione si traduce in una forza repulsiva tra i due vortici. Nel caso in cui le correnti dei vortici circolassero in direzioni opposte la forza sarebbe attrattiva. Cerchiamo di calcolare esplicitamente l'espressione di questa forza f . Nel caso di due vortici l'equazione (3.61) si riduce a

$$\mathbf{B} - \lambda_L^2 \nabla^2 \mathbf{B} = \varphi_0 \oint d\mathbf{x}_1 \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \varphi_0 \oint d\mathbf{x}_2 \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2), \quad (3.70)$$

dove \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 sono le posizioni dei due vortici.

La soluzione di questa equazione è la sovrapposizione delle due soluzioni ottenute per i singoli vortici:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\varphi_0}{2\pi\lambda_L^2} \left[K_0 \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|}{\lambda_L} \right) + K_0 \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|}{\lambda_L} \right) \right]. \quad (3.71)$$

L'energia per unità di lunghezza per la coppia di vortici risulta:

$$\begin{aligned} \frac{E^{(coppia)}}{L} &= \frac{\lambda_L^2}{4\mu_0} \int_S d^2\mathbf{x} \nabla^2 (B_1 + B_2)^2 \\ &= \frac{\lambda_L^2}{4\mu_0} \int_S d^2\mathbf{x} \nabla^2 (B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2) = 2 \frac{E^{(vortice)}}{L} + \frac{E^{(int)}}{L} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Per linearità del Laplaciano l'energia si ripartisce in tre termini: i primi due corrispondono all'energia del singolo vortice e sono uguali tra loro, mentre il terzo termine rappresenta una sorta di energia di interazione tra due vortici. Calcoliamo esplicitamente quest'ultimo termine:

$$\frac{E^{(int)}}{L} = \frac{\lambda_L^2}{2\mu_0} B_0^2 \int d^2\mathbf{x} \nabla^2 \left[K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\lambda_L} \right) K_0 \left(\frac{|\mathbf{x} - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||}{\lambda_L} \right) \right], \quad (3.73)$$

dove, essendo il problema invariante per traslazioni, abbiamo centrato il primo vortice nell'origine e il secondo in $|\mathbf{x} - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||$. L'integrale è esteso a tutto il piano esclusi i due dischi centrati in 0 e $|\mathbf{x} - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||$ di raggio ξ . Per il teorema della divergenza possiamo scrivere: ²⁴

$$\frac{E^{(int)}}{L} = \frac{\lambda_L^2}{2\mu_0} B_0^2 \oint_{C_1, C_2} \mathbf{n} \cdot \nabla \left[K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\lambda_L} \right) K_0 \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{R}|}{\lambda_L} \right) \right] dl. \quad (3.74)$$

dove $\mathbf{R} = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ e l'integrale è esteso ai contorni C_1 e C_2 dei due vortici. Dalla regola di derivazione di un prodotto ottengo due integrali che danno lo stesso contributo all'energia di interazione. Ricordando che $dl = \xi d\theta$ e ponendo $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{E^{(int)}}{L} &= 2 \frac{\lambda_L^2 B_0^2}{2\mu_0} \xi \int_0^{2\pi} d\theta K_0 \left(\frac{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}}{\lambda_L} \right) \underbrace{\left(-\frac{d}{dr} K_0 \left(\frac{r}{\lambda_L} \right) \right) \Big|_{r=\xi}}_{\sim \frac{1}{\xi}} \\ &= 2\pi \frac{\lambda_L^2 B_0^2}{\mu_0} K_0 \left(\frac{R}{\lambda_L} \right) = \frac{\varphi_0^2}{2\pi\mu_0\lambda_L^2} K_0 \left(\frac{R}{\lambda_L} \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

²⁴Teorema della divergenza nel piano: se D è un dominio regolare tale che $D \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{F} = (F_1, F_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $F \in C^1(D)$ allora: $\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

Quest'ultima uguaglianza sussiste solo se è soddisfatta la seguente condizione: $r = \xi \ll R$, ovvero i due core dei vortici non si toccano. Calcoliamo ora la forza (per unità di lunghezza) f_{2x} che il secondo vortice risente a causa dell'energia di interazione $\frac{E^{(int)}}{L} = \epsilon_{int}$:

$$f_{2x} = -\frac{\partial \epsilon_{int}}{\partial x_2} = -\frac{\varphi_0^2}{2\pi\mu_0\lambda_L^2} \frac{\partial}{\partial x_2} K_0\left(\frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}{\lambda_L}\right) = \frac{\varphi_0^2}{2\pi\mu_0\lambda_L^3} K_1\left(\frac{R}{\lambda_L}\right). \quad (3.76)$$

In generale l'espressione (3.76) si può riscrivere in modo tale da esplicitare la dipendenza della forza f_{2x} dalla supercorrente \mathbf{J}_s del vortice 1:

$$f_{2x} = -\frac{\varphi_0}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\varphi_0}{2\pi\lambda_L^2} K_0\left(\frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}{\lambda_L}\right) \right]. \quad (3.77)$$

Richiamando la definizione di $\varphi_0 = 2\pi B_0 \lambda_L^2$ e sfruttando l'equazione (3.56) per il campo di induzione magnetica di un vortice, possiamo concludere che

$$f_{2x} = -\frac{\varphi_0}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{B}_{12}(\mathbf{R}). \quad (3.78)$$

La quantità $\mathbf{B}_{12}(\mathbf{R})$ rappresenta l'induzione magnetica generata dal primo vortice e valutata nella posizione corrispondente al secondo vortice (del tutto analogo è il caso speculare). Per giungere alla relazione che lega la forza alla supercorrente sfruttiamo la relazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s$: considerato che in questo specifico esempio il campo \mathbf{B} è diretto lungo l'asse z , il rotore di tale quantità espresso in coordinate cartesiane risulta essere

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \mathbf{j} \right) = \mathbf{J}_x \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_y \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.79)$$

Da quest'ultima equazione risulta ora chiara la relazione cercata:

$$f_{2x} = -\frac{\varphi_0}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{B}_{12}(\mathbf{R}) = \varphi_0 \mathbf{J}_y = \varphi_0 e^* n_s \mathbf{v}_y = h n_s \mathbf{v}_y, \quad (3.80)$$

dove nell'ultima eguaglianza si è sfruttata la definizione $\mathbf{J}_s = n_s e^* \mathbf{v}$. Possiamo concludere che generalmente la forza dipende dalle componenti superfluide della velocità \mathbf{v} ; le linee di flusso intrappolate nel vortice saranno quindi in equilibrio statico solo se tutte le componenti di \mathbf{v} saranno nulle.

Appendice A

Dimostriamo le relazioni lasciate in sospeso nel corso dell'elaborato.

Equazione (3.50)

$$\delta F_s[B] = \int_V \frac{d^3x}{2\mu_0} \left(\lambda_L^2 |\nabla \times (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})|^2 + (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})^2 \right) - \int_V \frac{d^3x}{2\mu_0} \left(\lambda_L^2 |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + B^2 \right). \quad (\text{A.1})$$

Calcoliamo esplicitamente la variazione $|\nabla \times (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})|^2$:

$$|\nabla \times (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})|^2 = |\nabla \times \mathbf{B} + \nabla \times \delta\mathbf{B}|^2 = |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + |\nabla \times \delta\mathbf{B}|^2 + 2(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{B}). \quad (\text{A.2})$$

Trascuriamo il termine del secondo ordine $|\nabla \times \delta\mathbf{B}|^2$. Passando al simbolo di Levi-Civita possiamo scrivere

$$|\nabla \times (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})|^2 = |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + 2\epsilon_{ijk} (\nabla \times \mathbf{B})_i \partial_j \delta B_k \quad (\text{A.3})$$

$$= 2\epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times \mathbf{B})_i \delta B_k - 2\epsilon_{ijk} \delta B_k \partial_j (\nabla \times \mathbf{B})_i \quad (\text{A.4})$$

$$= -2\partial_j \epsilon_{jik} (\nabla \times \mathbf{B})_i \delta B_k + 2\epsilon_{kji} \delta B_k \partial_j (\nabla \times \mathbf{B})_i \quad (\text{A.5})$$

$$= -2\nabla \cdot ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \delta\mathbf{B}) + 2\delta\mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) \quad (\text{A.6})$$

$$= 2\nabla \cdot (\delta\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) + 2\delta\mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})). \quad (\text{A.7})$$

Sostituendo ora quest'ultima espressione in (A.1) ottengo:

$$\delta F_s[B] = \int_V \frac{d^3x}{2\mu_0} \left[\lambda_L^2 \left(|\nabla \times \mathbf{B}|^2 + 2\nabla \cdot (\delta\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) + 2\delta\mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) \right) + (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})^2 - \lambda_L^2 |\nabla \times \mathbf{B}|^2 - B^2 \right] = 0 \quad \forall \delta\mathbf{B}. \quad (\text{A.8})$$

Semplifichiamo questa relazione:

$$\delta F_s[B] = \int_V \frac{d^3x}{2\mu_0} \left[2\lambda_L^2 \left(\nabla \cdot (\delta \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) - \delta \mathbf{B} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} \right) + 2\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{B}. \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \delta F_s[B] &= \int_V d^3x \frac{\lambda_L^2}{\mu_0} \nabla \cdot (\delta \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) - \int_V d^3x \frac{\lambda_L^2}{\mu_0} \delta \mathbf{B} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} + \\ &+ \int_V \frac{d^3x}{\mu_0} \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\delta F_s[B] = \int_S d^2x \frac{\lambda_L^2}{\mu_0} \mathbf{n} \cdot (\delta \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) + \int_V \frac{d^3x}{\mu_0} \delta \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} - \lambda_L^2 \nabla^2 \mathbf{B}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{B}. \quad (\text{A.11})$$

$$- \int_S \frac{d^2x}{\mu_0} \delta \mathbf{B} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{B})) + \int_V \frac{d^3x}{\mu_0} \delta \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} - \lambda_L^2 \nabla^2 \mathbf{B}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{B}. \quad (\text{A.12})$$

Quest'ultima rappresenta esattamente l'equazione (3.50).

Equazione (3.61)

Partiamo dalla definizione di supercorrente data dall'equazione (2.22):

$$\mathbf{J}_s = \frac{e^{*2}}{m^*} |\Psi|^2 \left(\frac{\hbar}{e^*} \nabla \theta(\mathbf{x}) - \mathbf{A} \right). \quad (\text{A.13})$$

Se ci mettiamo nel limite $\kappa \gg 1$ allora $|\Psi|^2 = n_s \simeq 1$. Possiamo quindi riscrivere la supercorrente come segue

$$\mathbf{J}_s = \frac{e^{*2} n_s}{m^*} \left(\frac{\hbar}{e^*} \nabla \theta(\mathbf{x}) - \mathbf{A} \right). \quad (\text{A.14})$$

Calcoliamo ora il rotore di entrambi i membri della relazione precedente:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{J}_s &= \frac{e^{*2} n_s \varphi_0}{m^* 2\pi} \nabla \times \nabla \theta - \frac{e^{*2} n_s}{m^*} \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{B} + \lambda_L^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \frac{\varphi_0}{2\pi} (\nabla \times \nabla \theta), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

dove abbiamo sfruttato l'equazione $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s$. In ogni punto del vortice, a parte il suo centro, abbiamo che $\nabla \times \nabla \theta = 0$. Il centro del vortice rappresenta

una singolarità per la supercorrente: infatti $|\nabla\theta| \rightarrow +\infty$ in prossimità del centro. Calcoliamo ora l'integrale di superficie della funzione $\nabla \times \nabla\theta(\mathbf{x})$ su un'area pari ad una circonferenza centrata nel vortice:

$$\int_S \nabla \times \nabla\theta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_C \nabla\theta \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{A.16})$$

dove l'ultima eguaglianza è valida per il teorema di Stokes. Il secondo termine è un integrale di linea calcolato lungo la circonferenza C del cerchio di area S . Siccome ad ogni giro completo intorno al vortice la fase θ cambia di 2π , risulta che l'integrale vale

$$\int_S \nabla \times \nabla\theta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 2\pi. \quad (\text{A.17})$$

Abbiamo quindi che la funzione $\nabla \times \nabla\theta(\mathbf{x})$ è nulla ovunque tranne che al centro del vortice, dove è infinita ma il suo integrale di superficie vale 2π . Queste proprietà sono quelle che definiscono la funzione **delta di Dirac** $\delta(\mathbf{r})$:

$$\nabla \times \nabla\theta(\mathbf{x}) = 2\pi\delta(\mathbf{r})\hat{\mathbf{k}}, \quad (\text{A.18})$$

dove $\hat{\mathbf{k}}$ è il versore diretto lungo l'asse del vortice. Sostituendo l'ultima relazione all'interno della (A.15) otteniamo, per un singolo vortice:

$$\mathbf{B} + \lambda_L^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \varphi_0 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{k}. \quad (\text{A.19})$$

Se generalizziamo l'analisi al caso di N vortici otteniamo come risultato esattamente l'equazione (3.61).

Equazione (3.62)

Partiamo dalla prima parte della relazione (3.62):

$$\begin{aligned} \frac{F_s - F_n}{L} &= \frac{E^{(vortice)}}{L} = \frac{1}{2\mu_0} \int_S d^2\mathbf{x} \left[\lambda_L^2 |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + B^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_S d^2\mathbf{x} \lambda_L^2 \left[|\nabla \times \mathbf{B}|^2 + \frac{B^2}{\lambda_L^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Ora riscriviamo $|\nabla \times \mathbf{B}|^2$ in modo diverso utilizzando il simbolo di Levi-Civita:

$$\begin{aligned}
|\nabla \times \mathbf{B}|^2 &= (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \epsilon_{ijk} \partial_j B_k \epsilon_{irs} \partial_r B_s \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{irs} \partial_j B_k \partial_r B_s \\
&= (\delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr}) \partial_j B_k \partial_r B_s \\
&= \partial_j (B_k \partial_j B_k) - \partial_j (B_k \partial_k B_j) \\
&= \partial_j \left(\frac{1}{2} \partial_j (B^2) \right) - \partial_j (B_k \partial_k B_j) \\
&= \frac{1}{2} \nabla^2 (B^2) - (\partial_j B_k) (\partial_k B_j) - B_k (\partial_j \partial_k B_j).
\end{aligned} \tag{A.21}$$

L'espressione finale risulta essere

$$\begin{aligned}
|\nabla \times \mathbf{B}|^2 &= \frac{1}{2} \nabla^2 (B^2) - (\nabla \cdot \mathbf{B})^2 - \mathbf{B}(\nabla^2 \mathbf{B}) \\
&= \frac{1}{2} \nabla^2 (B^2) - \mathbf{B}(\nabla^2 \mathbf{B}).
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Sappiamo che il campo magnetico \mathbf{B} deve soddisfare l'equazione

$$\mathbf{B} = \lambda_L^2 \nabla^2 \mathbf{B}, \tag{A.23}$$

quindi possiamo riscrivere il termine B^2 come:

$$B^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \lambda_L^2 \mathbf{B}(\nabla^2 \mathbf{B}). \tag{A.24}$$

L'integrale in (A.20) si può riscrivere come segue:

$$\frac{E^{(vortice)}}{L} = \frac{1}{2\mu_0} \int_S d^2 \mathbf{x} \lambda_L^2 \left[|\nabla \times \mathbf{B}|^2 + \mathbf{B}(\nabla^2 \mathbf{B}) \right]. \tag{A.25}$$

Sostituendo infine l'espressione ottenuta per $|\nabla \times \mathbf{B}|^2$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{E^{(vortice)}}{L} &= \frac{1}{2\mu_0} \int_S d^2 \mathbf{x} \lambda_L^2 \left[\frac{1}{2} \nabla^2 (B^2) - \mathbf{B}(\nabla^2 \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla^2 \mathbf{B}) \right] \\
&= \frac{\lambda_L^2}{4\mu_0} \int_S d^2 \mathbf{x} \nabla^2 (B^2),
\end{aligned} \tag{A.26}$$

la quale rappresenta proprio la seconda parte della relazione (3.62).

La condizione (3.5)

Consideriamo la geometria rappresentata in figura A.1. Sia S l'interfaccia di separazione tra una regione normale ($z < 0$) ed una regione superconduttiva ($z > 0$). Per semplicità consideriamo il campo magnetico esterno H diretto parallelamente alla superficie. Di conseguenza avremo che $\mathbf{H} = H(z)\hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{A} = A(z)\hat{\mathbf{y}}$. Inoltre, in questo specifico caso è sempre possibile scegliere una trasformazione di Gauge tale per cui il parametro d'ordine ψ è reale.

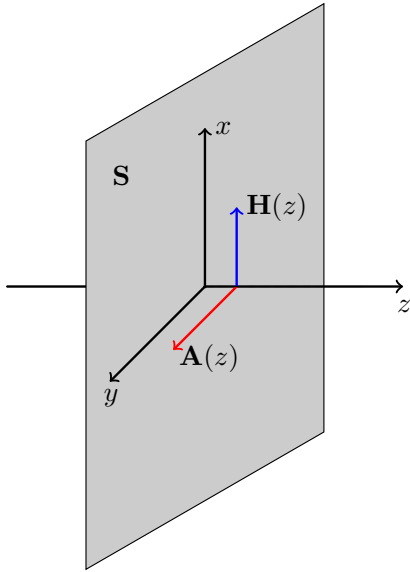


Figura A.1: Interfaccia di separazione tra una regione normale ed una regione superconduttiva. Il campo magnetico esterno è applicato parallelamente alla superficie e il potenziale vettore è perpendicolare ad esso.

Detto ciò, la prima equazione di Ginzburg-Landau si riduce a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\hat{z} \frac{d}{dz} - \frac{ie^*}{\hbar} A(z) \hat{y} \right)^2 \psi + a\psi + b\psi^3 = 0. \quad (\text{A.27})$$

Sviluppiamo il quadrato del primo membro:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\hat{z} \frac{d}{dz} - \frac{ie^*}{\hbar} A(z) \hat{y} \right)^2 \psi &= -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{e^{*2}}{2m^*} A^2\psi \\ &+ \frac{ie^*\hbar}{2m^*} \left(\frac{d}{dz} \cdot (A(z)\psi\hat{y}) + A(z) \frac{d\psi}{dz} \hat{z} \cdot \hat{y} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Notiamo subito che $\hat{z} \cdot \hat{y} = 0$ e il termine $\frac{d}{dz} \cdot (A(z)\psi\hat{y}) = 0$ per il seguente motivo: in tre dimensioni esso equivale all'espressione

$$\nabla \cdot (A(z)\psi\hat{y}) = \psi \nabla \cdot A(z)\hat{y} + A(z)\hat{y} \cdot \nabla\psi. \quad (\text{A.29})$$

Dalla definizione di divergenza: $\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$. Essendo poi $\psi = \psi(z)$, allora $\nabla \psi = \frac{d\psi}{dz} \hat{z}$. Da tutte queste informazioni deduciamo che la (A.29) risulta essere nulla. Perciò, in questa particolare situazione, l'equazione (A.27) assume la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{e^{*2}}{2m^*} A^2 \psi + a\psi + b\psi^3 = 0, \quad (\text{A.30})$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$\left. \begin{array}{l} \psi = 0 \\ H = H_C \end{array} \right\} z \rightarrow -\infty \quad \left. \begin{array}{l} \psi = \psi_\infty \\ H = 0 \end{array} \right\} z \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.31})$$

Moltiplichiamo ora l'equazione (A.30) per ψ^* e integriamo su tutta l'asse z :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \psi'' \psi^* + \frac{e^{*2}}{2m^*} A^2 |\psi|^2 + a|\psi|^2 + b|\psi|^4 \right] = 0. \quad (\text{A.32})$$

Integriamo per parti il primo membro della (A.32):

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \int_{-\infty}^{\infty} \psi''(z) \psi^*(z) dz = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m^*} \psi'(z) \psi^*(z)}_{=0} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\hbar^2}{2m^*} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(z) \psi^{*'}(z) dz. \quad (\text{A.33})$$

Il termine $\psi'(z) \psi^{*'}(z) = \psi'(z) (\psi'(z))^* = |\psi'(z)|^2$. Riscriviamo quindi l'equazione (A.32) come segue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla \psi|^2 + \frac{e^{*2}}{2m^*} A^2 |\psi|^2 + a|\psi|^2 + b|\psi|^4 \right] = 0, \quad (\text{A.34})$$

la quale rappresenta proprio la condizione (3.5).

Appendice B

Teoria di Landau inerente le transizioni di fase del secondo ordine

B.1 Generalità relative alle transizioni di fase

Lo studio delle transizioni di fase costituisce un argomento molto importante con applicazioni in molti settori della fisica, soprattutto quello relativo allo stato condensato, del quale fa parte lo studio dei materiali superconduttivi. Esiste un'infinità di transizioni di fase differenti: considerando la più semplice transizione gas-liquido si perviene a quelle più complicate, come ad esempio quelle ferromagnetiche, ferro-elettriche, quelle superfluide e superconduttive le quali coinvolgono la materia al duplice livello molecolare ed atomico.

Classificare le transizioni di fase presuppone la risoluzione di un problema tutt'altro che banale. Alcune di esse presentano caratteristiche uniche che non possono essere raggruppate in nessuna specifica categoria. Tuttavia esistono alcuni criteri che, in virtù di ragionamenti di carattere molto generale, ne permettono la classificazione. Uno dei primi fu sviluppato da Paul Ehrenfest. Egli classificò le transizioni di fase compatibilmente con la continuità delle derivate dell'*energia libera di Gibbs* G calcolate rispetto ad un parametro termodinamico estensivo (per esempio la temperatura) e valutate in corrispondenza della temperatura di transizione (detta anche temperatura *Critica* T_c).

Criterio di Ehrenfest. *Si definisce transizione di fase di ordine n quella transizione in cui le derivate dell'energia libera di Gibbs G rispetto alla temperatura sono tutte continue fino all'ordine $n - 1$ e la derivata n -esima $\left. \frac{\partial^n G}{\partial T^n} \right|_{T_c}$, calcolata alla temperatura critica, risulta discontinua.*

Normalmente risultano importanti le transizioni di fase del primo ordine e quelle del secondo ordine, perciò le transizioni per cui $n > 2$ vengono dette ge-

nericamente *transizioni di ordine superiore*. Un altro importante criterio di classificazione emerge in modo naturale dalla teoria relativa alle transizioni di fase sviluppata da L. Landau nel 1937. In tale schema, il fisico russo attribuisce un ruolo fondamentale alle **simmetrie** in cui si trovano gli stati della materia prima e dopo la transizione di fase.

Nel momento in cui Landau formulò la teoria di cui sopra, solo la transizione di fase liquido-gas era stata studiata nel dettaglio: era noto che la relativa curva di equilibrio nel piano P - T avrebbe potuto terminare in un punto, denominato *punto critico* e la transizione avrebbe potuto essere effettuata in maniera **continua** semplicemente muovendosi intorno a tale punto.

Considerando la transizione liquido-cristallo, oppure altre transizioni tra vari configurazioni del medesimo materiale cristallino, la questione si fa maggiormente complicate: le trasformazioni devono essere associate alla comparsa di nuovi elementi di simmetria negli stati della materia prima e dopo la transizione. Tali elementi possono essere o presenti od assenti: nessun caso intermedio è possibile. Ciò significa che transizioni continue (nello stesso senso in cui sono continue le transizioni liquido-gas) connesse con cambi di simmetria nel sistema sono del tutto **impossibili**.

Con cambio di simmetria si intende, ad esempio, una riconfigurazione della struttura reticolare del sistema che va incontro ad una transizione di fase: in ogni stato il sistema possiede una simmetria o l'altra e perciò possiamo sempre assegnarla ad una delle due fasi. Ne consegue necessariamente che un tale cambio di simmetria dovrà avvenire in modo discontinuo. Ritenendo di aver chiarito il ruolo determinante che detengono le simmetrie nelle transizioni di fase, è possibile enunciare il

Criterio di Landau. *Si definiscono transizioni di fase di **secondo tipo** quelle in cui lo stato del sistema (in particolare la propria energia) cambiano in modo **continua**, nonostante il cambio di simmetria sia discontinuo. D'altra parte si definiscono di **primo tipo** le transizioni di fase ordinarie che coinvolgono il rilascio di calore latente.*

Per ulteriormente chiarire la distinzione sarebbe utile fare degli esempi: la transizione liquido-gas è, secondo Landau, di primo tipo. La transizione che coinvolge diverse configurazioni di un sistema cristallino è invece del secondo tipo poiché anche piccoli assestamenti della configurazione atomica del cristallo (che approdano a cambiamenti continui dello stato) sono sufficienti a far emergere nuove simmetrie in modo discontinuo.

Landau definisce le transizioni di fase di secondo tipo quelle **continue**: ovviamente esse non sono continue nello stesso senso in cui lo sono le transizioni del tipo liquido-gas, ma lo sono per il fatto che lo stato del sistema cambia in modo

continuo, a fronte di un cambio di simmetria discontinuo. La differenza fondamentale tra i due tipi di transizioni è la seguente: in corrispondenza di un punto di transizione del primo tipo gli stati del sistema coesistono in equilibrio. In un punto di transizione del secondo tipo, invece, gli stati delle due diverse fasi sono i medesimi. Tale circostanza dovrà quindi contenere tutti gli elementi di simmetria attribuite ad entrambe le fasi.

Da ciò consegue un'importante proprietà dei cambi di simmetria durante transizioni del secondo tipo: *la simmetria di una fase è necessariamente "maggiore" della simmetria dell'altra*. Con il termine maggiore si intenda una simmetria in grado di contenere tutti gli elementi della simmetria "minore", in aggiunta agli altri. Tale proprietà non è valida per le transizioni di primo tipo, per le quali le simmetrie delle due fasi possono anche essere completamente non correlate.¹

Fino ad ora la descrizione delle transizioni di fase è stata di carattere puramente qualitativo. Per descrivere nel modo quantitativo i cambi di struttura del sistema nel momento in cui attraversano un punto di transizione, si può definire, seguendo il ragionamento di Landau, una quantità η , chiamata **parametro d'ordine**, in modo che esso possa assumere valori diversi da zero in corrispondenza della simmetria minore e zero in corrispondenza di quella maggiore.

E' importante sottolineare che la simmetria del sistema cambia quando η è diventata esattamente zero: ogni valore $\eta \neq 0$, quanto più piccolo possa essere, porta con sé un "abbassamento" della simmetria. Il passaggio attraverso un punto di transizione del secondo tipo comporta un cambiamento **continuo** del parametro d'ordine η il quale, a sua volta, implica la continuità delle funzioni termodinamiche di stato del corpo quali ad esempio energia, entropia, volume ecc.

Prima di procedere ad uno studio quantitativo delle transizioni di fase, andrebbe fatta una precisazione di carattere matematico: a differenza delle transizioni di fase di primo tipo, in quelle di secondo tipo le quantità termodinamiche (in particolare il *Potenziale* Φ) presentano una singolarità nel punto di transizione. Tuttavia è possibile dimostrare che tale singolarità si riduce, per quanto concerne la fase maggiormente simmetrica, in un massimo del potenziale Φ .

¹Nella maggior parte delle transizioni di secondo tipo la fase maggiormente simmetrica (o semplicemente simmetrica) corrisponde a quella a temperatura più elevata, mentre la fase meno simmetrica (o non simmetrica) corrisponde alla temperatura più bassa. Landau nella propria trattazione identifica nella fase *ordinata* quella meno simmetrica e *disordinata* quella maggiormente simmetrica. Una transizione di secondo tipo da una fase ordinata ad una disordinata implica sempre un aumento di temperatura.

B.2 Il potenziale $\Phi(\eta)$

La teoria quantitativa delle transizioni di fase del secondo tipo si basa su considerazioni concernenti il potenziale termodinamico Φ del corpo per determinate deviazioni dalla condizione maggiormente simmetrica, per esempio per determinati valori del parametro d'ordine; possiamo rappresentare il potenziale come funzione delle variabili di stato T (temperatura), P (pressione) e η . Va ricordato che nella funzione $\Phi(P, T, \eta)$ la variabile η non è sullo stesso piano delle variabili T e P ; per determinati valori arbitrari di pressione e temperatura, il valore di η va determinato dalle condizioni di equilibrio imposte per Φ (ovvero per le quali Φ presenta un minimo).

La continuità del parametro d'ordine durante una transizione di fase di secondo tipo ci permette di concludere che esso possa assumere valori arbitrariamente piccoli in corrispondenza del punto di transizione. Quindi in prossimità di tale punto possiamo espandere in serie di potenze di η il potenziale Φ :

$$\Phi(P, T, \eta) = \Phi_0 + \alpha\eta + A\eta^2 + B\eta^3 + C\eta^4 + \dots, \quad (\text{B.1})$$

dove i coefficienti A , B , C e α sono funzioni di P e T .

E' possibile mostrare che, in assenza di un campo esterno, se gli stati corrispondenti a $\eta = 0$ e $\eta \neq 0$ sono differenti, allora il termine lineare deve per forza annullarsi ($\alpha = 0$). Infatti è noto che sopra la temperatura di transizione η si annulla mentre sotto di essa ha un valore finito; il minimo del potenziale deve corrispondere quindi ad $\eta \neq 0$ sotto T_c e ad $\eta = 0$ sopra la T_c .

Il coefficiente del termine del secondo ordine $A(P, T)$ deve essere *positivo* per $T > T_c$ e *negativo* per $T < T_c$. Per valori di T vicini alla transizione possiamo esprimerlo come

$$A(P, T) = a(T - T_c) \quad (\text{B.2})$$

sempre assumendo che $A(P, T)$ non sia singolare alla transizione di fase.

Se si considera lo stato alla transizione di fase come uno stato stabile (per esempio Φ ha un minimo a $\eta = 0$) allora il terzo ordine dell'espansione deve essere identicamente nullo ($B(P, T) = 0$) e il quarto termine necessariamente positivo ($C(P, T) > 0$).

A fronte di queste considerazioni possiamo riscrivere l'espansione del potenziale Φ :

$$\Phi(P, T) = \Phi_0(P, T) + a(P)(T - T_c)\eta^2 + C(P)\eta^4. \quad (\text{B.3})$$

La dipendenza di η dalla temperatura vicino al punto di transizione si ricava imponendo che la funzione Φ abbia un minimo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 \implies 2a(T - T_c)\eta = -4C\eta^3 \implies \eta^2 = \frac{a(T - T_c)}{2C} \quad (\text{B.4})$$

Il minimo del potenziale, a meno di costanti, vale

$$\Phi_{min} = -\frac{a^2}{4C}(T_c - T)^2 \quad (\text{B.5})$$

B.2.1 Osservazioni sui termini dell'espansione

1. **termine lineare:** Le proprietà delle transizioni di fase cambiano quando il corpo è soggetto ad un campo esterno che dipende dal parametro d'ordine η . In maniera del tutto generale, senza specificare la natura del campo, è possibile asserire che la sua applicazione produce la comparsa nell'Hamiltoniana del corpo di un termine *perturbativo* nella forma

$$\hat{\mathbf{H}}_h = -\hat{\eta}hV \quad (\text{B.6})$$

il quale è lineare nel volume V del corpo, nell'operatore $\hat{\eta}$ associato al parametro d'ordine e nell'intensità del campo h . Per rendere coerente la teoria di Landau sulle transizioni di fase è necessario aggiungere questo termine all'espansione del potenziale definito in (B.3).

2. **termine quadratico:** Il coefficiente $A(P,T)$ nell'espansione (B.1) si verifica facilmente essere nullo al punto di transizione; Infatti nella fase maggiormente simmetrica il valore $\eta = 0$ corrisponde ad un punto di minimo e perciò deve necessariamente essere che $A > 0$. D'altra parte, per la fase meno simmetrica, valori diversi da zero di η devono corrispondere a stati stabili e ciò può succedere solo se $A < 0$. A risulta quindi positivo da una parte della transizione e negativo dall'altra, di conseguenza deve annullarsi in corrispondenza di essa.

Nel caso in cui $B(P,T) \equiv 0$ in corrispondenza della transizioni sussiste l'unica condizione $A(P,T) = 0$, la quale determina nel piano $P - T$ una curva continua di punti di transizione del secondo tipo.

Qualora, invece, B non sia identicamente nullo, alla transizione vi è l'ulteriore condizione $B(P,T) = 0$ che determina, insieme alla condizione su $A(P,T)$, una serie di punti di transizione isolati.

3. **termine cubico:** vi sono situazioni in cui il termine cubico non è identicamente nullo e quindi va considerato all'interno dell'espansione del potenziale Φ . Per semplicità assumiamo che esso sia negativo: $C < 0$. Di seguito rappresentiamo l'andamento di $\Phi(\eta)$ al variare della temperatura T .

Per temperature maggiori di quella critica vi è solo un minimo di Φ in $\eta = 0$. Alla temperatura critica si presentano due minimi, separati da una gobba,

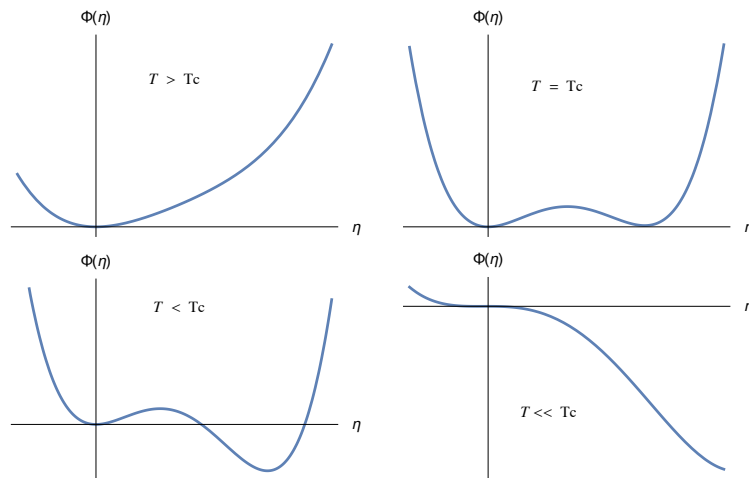


Figura B.1: Andamento del potenziale $\Phi(\eta)$ al variare della temperatura T del sistema intesa come parametro.

ma con uguale valore del potenziale. A temperature inferiori il minimo che corrisponde a $\eta \neq 0$ diventa assoluto. Come risultato esiste una transizione di fase del primo ordine (a salto) da $\eta = 0$ a qualche valore finito $\eta = \eta_c$ dipendente dalla temperatura critica secondo la relazione (B.4). Quindi, in conclusione, la presenza del termine del terzo ordine forza la transizione ad essere del *primo ordine*.

4. **termine quartico:** La condizione $C(P, T) > 0$ è necessaria per produrre transizioni di fase di secondo tipo; se il coefficiente C fosse negativo, allora il potenziale Φ permetterebbe transizioni di fase del primo tipo.

Appare evidente che la teoria delle transizioni di fase vada ben aldilà della semplice trattazione che è stata esposta in queste note. Desideravo solo richiamare i concetti fondamentali utili per far comprendere anche ai non addetti ai lavori la teoria di Ginzburg-Landau in relazione alla superconduttività. Per una trattazione più completa e formale che contenga al proprio interno strumenti matematici come la teoria dei gruppi atta a dimostrare le asserzioni che noi abbiamo considerato vere a priori, potrà risultare utile ricorrere a testi specialistici in particolare al testo scritto dallo stesso Landau [1] ed a quello di Hoffman-Tang [2].

Appendice C

Proprietà termodinamiche in campo magnetico

Scrivo questa appendice con l'intento di richiamare le principali proprietà termodinamiche di un campione superconduttore immerso in un campo magnetico esterno.

E' conveniente assumere che tale campo venga prodotto da elettromagneti connessi ad una sorgente esterna. Se vogliamo calcolare l'energia libera del campione superconduttore dobbiamo necessariamente tenere conto del contributo magnetico dato dal campo esterno. Questo contributo risulta essere il lavoro δR fatto dalla sorgente esterna per variare il campo magnetico di una quantità infinitesima $\delta \mathbf{B}(\mathbf{r})$ (mantenendo costanti temperatura e volume del campione).

Osservazione: La sorgente esterna alimenta gli elettromagneti e compie lavoro sia sul materiale che sul campo magnetico. Entrambi danno un contributo all'energia e dato che interagiscono tra di loro non posso considerarli separatamente. Il sistema in questione è quindi costituito dal superconduttore e dal campo magnetico.

Per calcolare il lavoro infinitesimo δR possiamo prima calcolare una quantità strettamente legata ad esso: Il lavoro δL fatto dal campo magnetico che varia sulla sorgente esterna delle correnti che producono il campo stesso. In accordo con l'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, possiamo dire che il lavoro δL fatto dal campo sulle correnti in un intervallo di tempo δt vale

$$\delta L = \delta t \int d^3x \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{C.1})$$

Una volta definito δL , la quantità di nostro interesse δR non è altro che $-\delta L$:

$$\delta R = -\delta t \int d^3x \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{C.2})$$

Quest'ultima espressione ci fornisce direttamente il differenziale dell'energia libera F del nostro sistema:

$$\delta F = -\delta t \int d^3x (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{C.3})$$

Qui si è fatto uso dell'equazione di Maxwell $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$, dove \mathbf{j} sono le correnti macroscopiche che alimentano il magnete. E' conveniente considerare l'integrazione in (C.3) non estesa al solo volume V del superconduttore ma a tutto lo spazio. Questa modifica non comporta variazione dell'energia libera in quanto $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ all'esterno del superconduttore. Con una semplice identità vettoriale riduciamo la (C.3) a

$$\delta F = \delta t \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \nabla \cdot \mathbf{S} - \delta t \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}), \quad (\text{C.4})$$

dove è stato definito il vettore di Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Grazie al teorema della divergenza possiamo riscrivere il primo termine della (C.4) come un integrale esteso alla superficie esterna del nostro spazio di integrazione. Siccome calcoliamo l'integrale su tutto \mathbb{R}^3 e i campi elettromagnetici in questione si annullano all'infinito, possiamo concludere che

$$\delta t \int_S d^2x \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Per quanto riguarda il secondo termine della (C.4), sfruttando la relazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ possiamo riscriverlo come

$$\delta F = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \delta t = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}. \quad (\text{C.6})$$

Si vede dalla relazione appena ottenuta che la variazione dell'energia libera (per unità di volume) rispetto ad una variazione del campo \mathbf{B} risulta essere

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}} = \mathbf{H}. \quad (\text{C.7})$$

Se ora sfruttiamo la definizione del potenziale vettore $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, è possibile riscrivere la (C.6) come segue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}) + \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \delta \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Otteniamo quindi un'equazione analoga alla (C.7) per il potenziale vettore:

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} = \mathbf{j}. \quad (\text{C.9})$$

Osservazione: Le equazioni (C.7) e (C.9) valgono solo in condizioni di equilibrio termodinamico. In particolare, la (C.9) ci permette di dimostrare perché calcolare la variazione dell'energia libera rispetto ad \mathbf{A} nella teoria di Ginzburg-Landau è un'operazione lecita. Infatti la variazione $\frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}}$ risulta proporzionale alla densità di correnti che producono il campo magnetico. Tali correnti scorrono nell'elettromagnete che produce il campo ma non nel superconduttore, nel quale quindi abbiamo che $\mathbf{j} = 0$. Quindi nel caso in cui il materiale non sia collegato ad un circuito elettrico la densità di correnti macroscopiche è nulla e possiamo scrivere:

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} = 0. \quad (\text{C.10})$$

Questa è proprio la condizione usata da Ginzburg e Landau per ottenere la seconda equazione del loro modello. Essa è di validità generale e non specifica dei superconduttori in quanto derivata da considerazioni termodinamiche all'equilibrio. Il modello di Ginzburg-Landau, alla luce di ciò che abbiamo visto in questa appendice, è valido solo nel caso in cui il campione non sia collegato ad una sorgente elettrica. Le correnti presenti nel superconduttore dovranno quindi essere esclusivamente *Amperiane* (microscopiche), cioè responsabili della magnetizzazione del mezzo.

Ringraziamenti

Doverosi ringraziamenti vanno al professor Luca Guido Molinari, il quale ha accettato di seguirmi come relatore lungo il percorso che ha portato alla realizzazione di questa tesi. Sono inoltre molto grato al dottor Marco Antonelli per i preziosi consigli e le numerosissime correzioni suggeritemi, sempre mantenendo un elevato spirito critico. Infine, ultimi ma non per importanza, dei ringraziamenti speciali vanno ai miei familiari, alla mia fidanzata ed alle persone che nel loro piccolo hanno contribuito alla realizzazione di questo lavoro. Esso rappresenta il culmine di un percorso di studi impegnativo ma, al tempo stesso, gratificante, che non avrei mai potuto affrontare senza il sostegno delle persone sopra citate.

Grazie

Giorgio.

Elenco delle figure

1.1	Grafico che evidenzia i valori di resistenza assunti dal campione di mercurio per vari valori della temperatura T . Si noti come in un intervallo di soli 0.01 K nei pressi della transizione la temperatura crolli da $0.1\ \Omega$ a circa $10^{-5}\ \Omega$	8
1.2	Il comportamento di $\rho(T)$ è approssimativamente lineare per temperature $T > T_C$ (trascurando correzioni del 2° ordine). Avvicinandosi alla temperatura critica si nota una leggera curvatura dovuta essenzialmente a fluttuazioni associate alla transizione superconduttiva.	10
1.3	14
1.4	Vortici in un superconduttore di tipo II. Il campo magnetico esterno \mathbf{H} penetra all'interno del materiale attraverso dei <i>tubi di flusso</i> , all'interno dei quali il metallo è nella fase normale. I <i>core</i> dei tubi si formano dove sono presenti delle impurità e si dispongono formando un reticolo (<i>reticolo di Abrikosov</i>).	15
1.5	16
1.6	Schema di una giunzione Josephson. Le coppie di Cooper possono passare attraverso la striscia isolante per effetto tunnel quantistico. Se θ_L e θ_R sono le fasi delle funzioni d'onda dei due superconduttori, la corrente che scorre nella giunzione è proporzionale alla differenza $(\theta_L - \theta_R)$	17
1.7	Andamento (qualitativo) del contributo elettronico alla capacità termica in funzione della temperatura T . E_F indica l'energia di Fermi. Al di sopra della transizione il comportamento di $C(T)$ è lineare. Al di sotto di T_C è approssimativamente esponenziale.	21
1.8	Andamento qualitativo della densità elettronica totale n e della densità di elettroni superconduttivi n_s in un superconduttore descritto mediante il modello a due fluidi. Si noti come n_s tenda a zero in modo continuo quando $T \rightarrow T_C$	24

- 1.9 Grafico che mostra il comportamento del campo magnetico in prossimità della superficie di un superconduttore. Al di fuori di esso $B = B_0$; all'interno decade secondo la legge esponenziale data dalla relazione (1.45). 27
- 2.1 Modulo del parametro d'ordine in funzione di T. La diminuzione di $|\Psi|$ da un valore non nullo a zero in corrispondenza di T_C è caratteristica delle transizioni di fase del secondo ordine. 32
- 2.2 Variazione del parametro d'ordine dalla superficie di separazione superconduttore-metallo fino al bulk. La lunghezza di coerenza, parametro specifico di ogni superconduttore, ci quantifica la regione ove il parametro d'ordine varia significativamente con la posizione. 34
- 2.3 Anello di materiale superconduttore. Calcolando il flusso Φ del campo di induzione magnetica \mathbf{B} si dimostra che esso è quantizzato in unità di φ_0 , detto **flusso elementare**. Sperimentalmente la quantizzazione del flusso si osserva nel reticolo di vortici di Abrikosov. 39
- 3.1 Regione di superficie tra un materiale normale e uno superconduttore. 42
- 3.2 Curva di separazione della fase normale da quella superconduttiva in superconduttori di tipo I. Qui sono evidenziati due punti del diagramma di fase appartenenti alla curva $H_C(T)$. Le variazioni di campo e temperatura δH e δT sono da considerarsi infinitesime. 46
- 3.3 L'apparato consiste in un cilindro uniforme e omogeneo di materiale superconduttore di tipo II, avvolto da un filo in modo che formi un solenoide di $\frac{N}{L}$ avvolgimenti per metro. Questo garantisce la produzione di un campo magnetico esterno $H = I \frac{N}{L}$ uniforme all'interno del solenoide. 47
- 3.4 Schematizzazione del reticolo di vortici per geometrie quadrata e triangolare. Per un dato campione superconduttivo e una fissata densità di flusso di campo magnetico, abbiamo che $a_{\square} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\kappa} = \left(\frac{\varphi_0}{B}\right)^{1/2}$ e $a_{\triangle} = \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{\varphi_0}{B}\right)^{1/2}$. Perciò vale che $a_{\triangle} > a_{\square}$. 54
- 3.5 Linee di livello del modulo quadro $|\Psi|^2$ del parametro d'ordine per un reticolo quadrato e un reticolo triangolare. 55
- 3.6 osservazioni sperimentali del reticolo di Abrikosov. **(a)**: First image of Vortex lattice, 1967. Bitter Decoration, Pb-4at %In rod, 1.1K, $B = 195$ G. **(b)**: Gradient of Vortex density, 1995. Bitter Decoration, NbSe2 crystal, $B = 30$ G, 1.2K, area near the edge. **(c)**: Magneto-optical image of Vortex lattice, 2001. Magneto-Optical Imaging, NbSe2 crystal, 4.3K, $B = 3$ G. **(d)**: Abrikosov lattice in MgB2, 2003. Bitter Decoration, MgB2 crystal, $B = 200$ G. 56

3.7	Grafico che mostra l'andamento delle due funzioni modificate di Bessel $I_0(x)$ e $K_0(x)$ e delle loro derivate $I_1(x)$ e $K_1(x)$	60
3.8	Interazione tra due vortici paralleli in cui la supercorrente scorre nella stessa direzione. In generale, a seconda che le correnti nei due vortici siano concordi o discordi nella rotazione, la forza di interazione sarà repulsiva o attrattiva.	64
A.1	Interfaccia di separazione tra una regione normale ed una regione superconduttiva. Il campo magnetico esterno è applicato parallelamente alla superficie e il potenziale vettore è perpendicolare ad esso.	71
B.1	Andamento del potenziale $\Phi(\eta)$ al variare della temperatura T del sistema intesa come parametro.	78

Elenco delle tabelle

1.1	22
1.2	Alcuni esempi di lunghezze di penetrazione per superconduttori puri e composti.	28
3.1	Valori della lunghezza di coerenza in materiali superconduttori di tipo I e tipo II. L'ultimo dato si riferisce alla lunghezza di coerenza protonica nel caso di superfluidità in stelle di neutroni.	52
3.2	Valori dei campi critici H_{C1} e H_{C2} per alcuni materiali superconduttori, molti dei quali sono composti non stechiometrici. Ricordiamo che $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$ e $1 \text{ Oe} = 79.577 \text{ A/m}$	63

Bibliografia

- [1] Lev D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics, Volume 5 - Statistical Physics*, institute of physical problems U.S.S.R. Academy of sciences, Moscow, 1959.
- [2] K.-H. Hoffmann, Q. Tang, *Ginzburg-Landau phase transition theory and superconductivity*, Springer, Basel, 2001.
- [3] Lev D. Landau, *On the theory of phase transitions*, Zh. Eksp. teor. Fiz. **7**, (1937), pp. 19-32.
- [4] *Lecture notes on phase transitions*, Oxford University, <http://www2.physics.ox.ac.uk>.
- [5] *Lecture notes on Landau theory of phase transitions*, Leiden University, <http://wwwhome.lorentz.leidenuniv.nl>.
- [6] Alexander L. Fetter, John Dirk Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGRAW-HILL international edition, New York, 1971.
- [7] J. Robert Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Westview Press, Tallahassee, Florida, 1971.
- [8] Dirk van Delft, Peter Kes, *The discovery of superconductivity*, Physics Today, 2010.
- [9] James F. Annett, *Superconductivity, Superfluids and Condensates*, Oxford University Press, 2004.
- [10] Luca G. Molinari, *Lecture notes on superconductivity*, Milan University, 2015.
- [11] F. London, *Superfluids Volume I: Macroscopic theory of Superconductivity*, Dover Publications, Inc, new York, 1961.
- [12] David A Cardwell, David S Ginley, *Handbook of Superconducting Materials*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2003.

- [13] C. Mencuccini, V. Silvestrini, *Fisica II - Elettromagnetismo e Ottica*, Liguori Editore, Napoli, 1999.
- [14] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Westview Press, 1999.
- [15] V. V. Schmidt, *The Physics of Superconductors*, Springer, New York, 1997.
- [16] A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals*, Elsevier Science Publisher, Amsterdam, 1988.
- [17] Alexey Ustinov, *Lecture notes on superconductivity*, Karlsruhe University, 2008-2009.
- [18] David R. Lide, *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, Florida, 2010.
- [19] Carsten Timm, *Theory of Superconductivity*, Institute of Theoretical Physics, Dresden, 2011/2012.
- [20] C. Mencuccini, V. Silvestrini, *Fisica - Termodinamica*, Liguori Editore, Napoli, 1985.
- [21] Milton Abramowitz, Irene Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Washington, 1972.
- [22] Li-Da Zhang, Yi-Shi Duan, Yu-Xiao Liu, *Modified London Equation, Abrikosov-Like Vortices and Knot Solitons in Two-Gap Superconductors*, Institute of Theoretical Physics, Lanzhou University, 2008.
- [23] James P. Sethna, *Entropy, Order Parameters, and Complexity*, Laboratory of Atomic and Solid State Physics, Cornell University, Ithaca, NY.
- [24] D. ter Haar, *Men of Physics: Lev Landau, vol 1: Low temperature and solid state physics*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [25] Luigi E. Picasso, *Lectures in Quantum Mechanics*, Springer, 2015.
- [26] A. V. Dmitriev, W. Nolting, *On details of the thermodynamical derivation of the Ginsburg-Landau equations*, 2011.
- [27] Alexei A. Abrikosov, *Type II superconductors and the vortex lattice*, Nobel Lecture, December 8, 2003.
- [28] Tim Tzaneteas, *Abrikosov Lattice Solutions of the Ginzburg-Landau Equations of Superconductivity*, Ph.D. Thesis, University of Toronto, 2010.

- [29] Alexei A. Abrikosov, *On the magnetic properties of superconductors of the second group*, JETP 32, 1442-1452, 1957.
- [30] F. Mandl, *Statistical physics*, John Wiley, Chicester, 1987.
- [31] Superconductors.org.
- [32] Marco Ademollo, *Lecture notes on Quantum Mechanics*, Florence University.
- [33] Vitaly Ginzburg, E. A. Andryushin, *Superconductivity*, World Scientific, Lebedev Physics institute, Russia, 2004.
- [34] Michael Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill, Harvard University, 1996.
- [35] U. Essmann and H. Trauble, *The direct observation of individual flux lines in type II superconductors*, Physics Letters, v. 24A, p. 526, 1967.
- [36] M. Marchevsky, L. A. Gurevich, P. H. Kes, and J. Aarts, *Flux Droplet Formation in NbSe₂ Single Crystals Observed by Decoration*, Phys. Rev. Lett. 75, 2400.
- [37] P.E. Goa et al., *Real-time magneto-optical imaging of vortices in superconducting NbSe₂*, Supercond. Sci. Technol. 14, 729 (2001).
- [38] L. Ya. Vinnikov et al., *Vortex structure in MgB₂ single crystals observed by the Bitter decoration technique*, Phys. Rev. B 67, 092512 (2003).
- [39] G. Baym, C. Pethick, D. Pines, *Superfluidity in Neutron Stars*, Nature 224, 673 - 674 (15 November 1969).
- [40] A. L. Fetter, P. C. Hohenberg, and P. Pincus, *Stability of a Lattice of Superfluid Vortices*, Phys. Rev. 147, 140 (1966).
- [41] A. B. Migdal, *Superfluidity and the moments of inertia of nuclei*, J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) 37, 249-263, (1959).