



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO  
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

— CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA —

Lo spazio-tempo di Vaidya  
e dintorni

*Relatore:*

Luca Guido Molinari

*Corelatore:*

Carlo Alberto Mantica

Candidato:

Ferraro Lorenzo

matricola: 931567

---

Anno Accademico 2021/2022

# Lo spazio-tempo di Vaidya e dintorni

Lorenzo Ferraro  
Università degli Studi di Milano

Novembre 2022

## Abstract

*A partire dal tensore energia impulso di “radiazione pura”, che introdurremo brevemente in una prima parte della tesi, costruiremo lo spazio-tempo di Vaidya nella maniera in cui fu originariamente concepito. Dopo aver dato un’interpretazione fisica a tale spazio-tempo ne daremo anche una caratterizzazione geometrica invariante in base al campo vettoriale del flusso energetico. Verificheremo che tale campo vettoriale sia: nullo, geodetico, shear-free, twist-free e con  $expansion = 1/r$ . In tal modo potremo anche far rientrare lo spazio-tempo di Vaidya nella la più ampia classe di “spazi-tempi di pura radiazione di Robinson-Trautman”. Infine, generalizzeremo lo spaziotempo al caso di carica e momento angolare non nullo e discuteremo brevemente il comportamento del campo vettoriale del flusso energetico anche in questi ultimi due casi.*

Relatore: Luca Guido Molinari  
Corelatore: Carlo Alberto Mantica

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Campo di radiazione pura</b>	<b>5</b>
2.1	Costruzione di un campo di radiazione pura elettromagnetica .	5
2.2	Alcune caratteristiche generali dei campi di pura radiazione . . . . .	10
2.3	Significato e interpretazione di un campo di pura radiazione . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Spazio-tempo di Vaidya</b>	<b>15</b>
3.1	Costruzione a partire dal tensore energia impulso . . . . .	16
3.1.1	Interpretazione fisica del fenomeno . . . . .	22
3.2	Costruzione a partire da Schwarzschild . . . . .	27
3.3	Problematiche riguardanti il sistema di coordinate . . . . .	29
3.4	caratterizzazione covariante . . . . .	31
3.5	Orizzonti ed estensioni complete della metrica di Vaidya . . . . .	37
3.6	Alcune generalizzazioni . . . . .	46
3.6.1	generalizzazione a carica non nulla . . . . .	46
3.6.2	generalizzazione a rotazione non nulla . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>52</b>
	<b>Appendici</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Formalizzazione elettromagnetismo</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Coordinate nulle</b>	<b>56</b>
<b>C</b>	<b>Coordinate di Eddington-Finkelstein</b>	<b>58</b>
<b>D</b>	<b>Calcolo del tensore di Ricci in un sistema di coordinate</b>	<b>61</b>
<b>E</b>	<b>Coefficienti di connessione e tensore di Ricci per la metrica 3.2</b>	<b>62</b>
<b>F</b>	<b>Scalari ottici per congruenze nulle</b>	<b>63</b>

# 1 Introduzione

Nel 1950 P.C. Vaidya, nella sua pubblicazione "*The gravitational field of a radiating star*" [20], presenta al mondo una delle prime, se non forse la prima, soluzione delle equazioni di campo di Einstein<sup>1</sup>

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (1.1)$$

in uno spazio-tempo non vuoto

$$T_{ab} \neq 0 . \quad (1.2)$$

In questo modo veniva risolto, tra l'altro, un interrogativo che era rimasto aperto da anni, ovvero la metrica esterna ad una stella irradiante.

Il fatto che ci siano voluti così tanti anni<sup>2</sup>, prima di ottenere una soluzione delle 1.1 non nel vuoto, non stupisce chi si è approcciato alla risoluzione di tali equazioni. Infatti, a differenza delle equazioni di Maxwell per l'elettromagnetismo, non è possibile risolvere quelle di Einstein partendo da una distribuzione di energia e impulso data<sup>3</sup>.

Citando Wald [23]:

Si può anche provare a risolvere le equazioni di Einstein specificando prima  $T_{ab}$  per poi trovare  $g_{ab}$ . Tuttavia, ciò non avrebbe molto senso, poiché, finché  $g_{ab}$  non è conosciuto, non possiamo sapere come interpretare fisicamente  $T_{ab}$ . [...] Dunque, in relatività generale, bisogna risolvere (le equazioni di campo) simultaneamente per la metrica e per la distribuzione di materia. Questa particolarità contribuisce alla difficoltà della risoluzione delle equazioni di Einstein in presenza di sorgente.

A questo proposito entrano in gioco i campi di "radiazione pura", che introdurremo nella sezione 2.1 a partire dal caso elettromagnetico e che, come vedremo, possono essere ben definiti anche senza prima specificare una

---

<sup>1</sup>In tutto il testo useremo la convenzione per la quale:  $c = G = 1$ .

<sup>2</sup>Circa 35 considerando che Einstein pubblicò una versione definitiva della relatività generale nel 1916.

<sup>3</sup>Come, invece, è possibile risolvere quelle dell'elettromagnetismo a partire da una distribuzione di carica  $\rho$  e corrente  $\vec{J}$  data, mediante integrazione.

metrica, mediante il principio: *massless radiation moves along null geodesic*<sup>4</sup> [23].

Nel resto del capitolo 2 presenteremo anche alcune proprietà generali dei campi di “radiazione pura” e cosa possano rappresentare fisicamente.

Mentre, nella sezione 3.1, mostreremo come la particolare forma del tensore energia impulso permise a Vaidya di risolvere le equazioni di campo di Einstein all’esterno di un corpo a simmetria sferica. Alla fine di tale sezione forniremo dunque l’elemento di linea della metrica di Vaidya come apparse per la prima volta nel 1950 [20]. Seguirà, nelle sezioni successive (3.2 e 3.3), una discussione su come l’elemento di linea di Vaidya possa essere derivato in altri sistemi di coordinate, quali quelle nulle di Eddington-Finkelstein e quelle *double-null*, e sul fatto che non esista un diffeomorfismo che, in generale, permetta di passare dall’uno all’altro di questi due sistemi per lo spazio-tempo di Vaidya. Infine, in 3.4 daremo una caratterizzazione covariante dello spazio-tempo di Vaidya mediante l’individuazione di un campo vettoriale *geodetico, nullo, shear-free, twist-free* e con *expansion*  $\propto 1/r$ . Tale campo vettoriale ci permetterà, inoltre, di collocare lo spazio-tempo di Vaidya sotto la più ampia classe degli “spazi-tempi di pura radiazione di Robinson-Trautman”. Questi ultimi sono spazi-tempi costruiti a partire da una caratterizzazione covariante dell’elemento di linea mediante una congruenza di curve<sup>5</sup> *geodetica, nulla, shear-free, twist-free* e con *expansion*  $\propto 1/r$ .

A seguire, nella sezione 3.5, intraprenderemo lo studio delle iper-superfici singolari della metrica di Vaidya ed enunceremo anche alcune estensioni massimali della metrica in questione seguendo il lavoro di W. Israel [11], Fayos, Martín-Prats e Senovilla [6].

Faremo poi vedere, nella sezione 3.6, come, mediante l’utilizzo della caratterizzazione covariante dello spazio-tempo di Vaidya, si possa generalizzare la metrica esterna di un corpo che emette radiazione pura al caso di carica non nulla ( $Q \neq 0$ ) e momento angolare non nullo ( $\Omega \neq 0$ ).

---

<sup>4</sup>ovviamente la forma delle geodetiche nulle dipende dalla metrica, ma a priori posso risolvere le equazioni di Einstein imponendo che per la metrica finale i vettori che individuano il flusso di energia siano geodetici e nulli. Questo, in realtà, corrisponde ad imporre una caratterizzazione covariante del campo per il quale sto risolvendo la metrica.

<sup>5</sup>Richiedere l’esistenza di una congruenza di curve con certi scalari ottici corrisponde al richiedere che esista un campo vettoriale (ricavabile tramite differenziazione su quelle curve) con gli stessi scalari ottici. Si faccia riferimento all’appendice F per l’introduzione degli scalari ottici di *shear, twist* e *expansion*.

## 2 Campo di radiazione pura

Per “*radiazione pura*” si intende un certo tipo di radiazione descrivibile solamente dalla sua intensità e direzione di flusso. Un osservatore immerso in uno spazio-tempo permeato da *radiazione pura* (dunque in un mezzo e non nel vuoto) individua una e una sola direzione nella quale l’energia, trasportata da particelle senza massa (e quindi alla velocità della luce), è diretta.

In letteratura questo tipo di mezzo viene anche indicato con i nomi: “*null fields*”, “*null fluids*”, “*null dust*”. Tensori energia impulso descriventi tali sistemi erano già noti molto tempo prima della scoperta dello spazio-tempo di Vaidya<sup>6</sup>. Corrispondentemente, le soluzioni delle equazioni di Einstein 1.1 con tale tensore energetico vengono dette “*null dust solution*”. Lo spazio-tempo di Vaidya è una di queste.

Per costruire un tensore energia impulso di pura radiazione partiremo dal caso più semplice: quello elettromagnetico<sup>7</sup> (adopteremo il formalismo e le nozioni fondamentali per trattare i campi elettromagnetici riportati nell’appendice A). In 2.1 costruiremo, dunque, un campo di pura radiazione dove la radiazione è solamente elettromagnetica. Mentre, nelle sezioni 2.2 e 2.3, faremo delle considerazioni sulle proprietà generali delle “soluzioni di pura radiazione”: cosa rappresentano fisicamente e cosa implica, per uno spaziotempo, avere un tensore energia impulso di pura radiazione.

### 2.1 Costruzione di un campo di radiazione pura elettromagnetica

Poniamoci in un sistema di coordinate cartesiane su uno spazio-tempo piatto<sup>8</sup> e partiamo dal caso semplicistico di un’onda elettromagnetica monocromatica piana con campo elettrico nella direzione  $y$  e campo magnetico nella direzione  $z$  (vedi figura 1).

La direzione di propagazione dell’onda è, dunque, quella individuata dal

---

<sup>6</sup>Possiamo trovare una prima definizione dei tensori energia impulso di *radiazione pura* nella prima edizione del libro di testo di Tolman [19] del 1934.

<sup>7</sup>Ovvero il caso nel quale tutta la radiazione è del tipo elettromagnetico.

<sup>8</sup>dunque con tensore metrico  $\eta := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

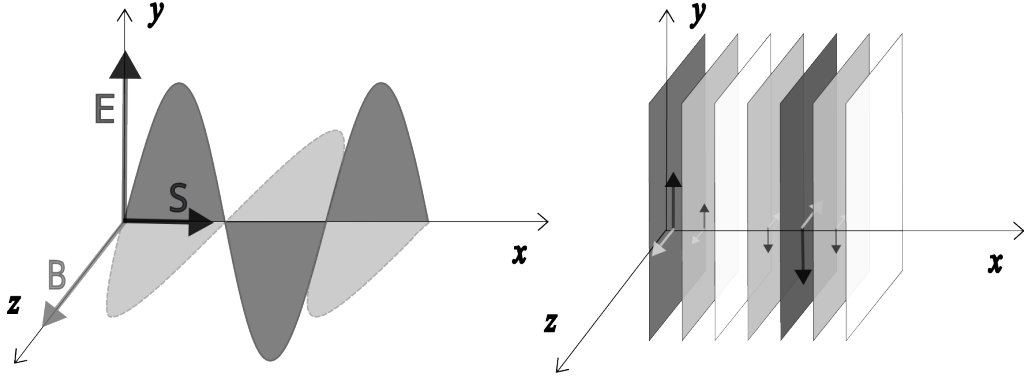


Figure 1: **Onda elettromagnetica piana che propaga nella direzione x**: Rappresentazione schematica di un'onda elettromagnetica piana che si propaga nella direzione  $x$  mantenendo campo elettrico e magnetico paralleli agli assi  $y$  e  $z$ . A sinistra l'andamento del valore di campo elettrico e magnetico sulla sezione di piano  $xy$  e  $xz$ , a destra la rappresentazione dell'intensità di campo elettrico e magnetico su piani perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda.

vettore di Pointing  $\vec{s}$  (A.11) che, in questo caso, assume la forma<sup>9</sup>:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} E B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

dove, nel secondo passaggio, abbiamo considerato che per un'onda elettromagnetica  $|\vec{B}| = |\vec{E}|$  nel sistema CGS ( $c = G = 1$ ).

Il tensore degli stress di Maxwell (A.12) per questo sistema assume la forma esplicita<sup>9</sup>:

$$\sigma = \begin{pmatrix} -E^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ed ovviamente la densità di energia (A.10) sarà<sup>9</sup>:

$$\rho = \frac{E^2 + B^2}{2} = E^2 . \quad (2.3)$$

<sup>9</sup> Si faccia riferimento all'appendice A per il formalismo adottato.

Trovo dunque le condizioni:

$$\begin{aligned} |\vec{s}| &= E^2 \\ \rho &= E^2 \\ \sigma_{xx} &= -E^2 . \end{aligned} \tag{2.4}$$

E siccome le direzioni da me scelte sono completamente arbitrarie, ho che in ciascun sistema nel quale un'onda elettromagnetica si propaga si ha:

$$\rho = |\vec{s}| = -\sigma_{xx} \tag{2.5}$$

poiché, per qualsiasi onda, posso mettermi nel sistema di riferimento nel quale istantaneamente le direzioni del campo elettrico e magnetico combaciano con quelle dell'asse  $y$  e  $z$  di un sistema di coordinate Galileiane così da ottenere  $\vec{s}$  nella direzione  $x$ .

Riprendendo ora il caso particolare che ha portato alle condizioni 2.4. Possiamo notare di essere in possesso di tutti gli strumenti per definire il tensore energia impulso nel caso relativistico (A.9). Esso assume la forma<sup>10</sup>:

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & \rho & 0 & 0 \\ \rho & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{2.7}$$

Più in generale, in qualsiasi situazione nella quale vale la condizione 2.5 si configura un tensore energia impulso che, mediante una rotazione spaziale e riscaldamento dei vettori di base, è possibile riportare nella forma 2.7.

La condizione 2.5 è la condizione che caratterizza un campo di pura radiazione elettromagnetico. Ovvero un campo nel quale localmente tutta l'energia elettromagnetica fluisce alla velocità della luce ( $\rho = |\vec{s}|$ ) in una sola direzione ( $|\vec{s}| = \sigma_{xx}$ ). È possibile vedere come, se non avessimo richiesto

---

<sup>10</sup>Per un campo elettromagnetico di questo tipo, in questo sistema di coordinate, il tensore di Faraday (si veda la definizione A.8) è:

$$F^{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -E_y & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & 0 \\ E_y & B_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

da cui, il tensore energia impulso 2.7.



che la radiazione fluisse in un'unica direzione, avrei potuto, per esempio, ottenere il caso di un fluido perfetto di fotoni, dove  $\sigma = \text{diag}(p, p, p)$  e non si ha nessuna direzione preferenziale.

Possiamo ulteriormente semplificare la forma del tensore energia impulso ponendoci in un sistema di coordinate nulle, ovvero che "sondi" lo spazio mediante le geodetiche nulle della metrica.

Consideriamo, sempre restando legati al nostro esempio, il nuovo sistema di coordinate  $(u, v, y, z)$  con due coordinate nulle  $u, v$  e due coordinate cartesiane  $y, z$  (si veda appendice B per un'introduzione sulle coordinate nulle). In questo caso la metrica piatta assume la forma:

$$ds^2 = -4dudv + dy^2 + dz^2 . \quad (2.8)$$

Possiamo verificare che nel nuovo sistema di riferimento solamente la componente  $T^{00}$  del mio tensore energia impulso è non-nulla, mentre le altre sono zero<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{\partial x^0}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^0}{\partial y^\beta} T^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x^0}{\partial y^0} \frac{\partial x^0}{\partial y^0} T^{00} + \frac{\partial x^0}{\partial y^1} \frac{\partial x^0}{\partial y^0} T^{10} + \frac{\partial x^0}{\partial y^0} \frac{\partial x^0}{\partial y^1} T^{01} + \frac{\partial x^0}{\partial y^1} \frac{\partial x^0}{\partial y^1} T^{11} \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \rho \\ &= 2\rho \\ T^{10} &= T^{01} = T^{11} = \dots = 0 . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ed in questo sistema di coordinate il tensore energia impulso 2.7 acquisisce la forma esplicita:

---

<sup>11</sup>In questo caso stiamo usando, per semplicità, un sistema di coordinate misto  $(u, v, y, z)$  nelle quali le prime due coordinate sono nulle e le ultime due sono ortonormali in modo che, oltre alle condizioni già riportate sopra, si abbia:

$$u \cdot y = u \cdot z = v \cdot y = v \cdot z = 0 . \quad (2.9)$$

Dunque ho che solamente i seguenti termini della matrice di trasformazione delle coordinate sono non nulli:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \quad (2.10)$$

$$T^{ab} = \begin{bmatrix} 2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Ovvero:

$$T^{ab} = \Psi k^a k^b \quad (2.13)$$

con<sup>12</sup>:

$$k^a = -\frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.14)$$

Tale formula vale per ogni sistema di pura radiazione nel quale si prende un sistema di coordinate con una coordinata allineata alla direzione di radiazione. Infine, se teniamo in conto che la radiazione elettromagnetica viaggia lungo geodetiche nulle possiamo slegare le relazioni 2.13 e 2.14 da ogni sistema di coordinate ponendo:

$$\boxed{\begin{array}{lll} (Tensore\ energia-impulso) & (nullità) & (geodeticità) \\ T^{ab} = \Psi k^a k^b & k^a k_a = 0 & k^a \nabla_a k^b \end{array}} \quad (2.15)$$

dove la condizione geodetica si riferisce al fatto che le curve integrali aventi come tangenti il campo vettoriale  $k^a$  sono geodetiche.

---

<sup>12</sup>Il segno meno di 2.14 deriva dal fatto che la coordinata nulla  $u := t - x$  fosse stata definita in modo che crescesse all'aumentare di  $t$ . Ma in tal modo la parte spaziale di  $u$  è diretta in  $-x$ . Dunque, per allineare il flusso della radiazione alla direzione del sistema di coordinate devo introdurre un segno meno.

## 2.2 Alcune caratteristiche generali dei campi di pura radiazione

Nella sezione precedente (2.1) abbiamo visto come un campo elettromagnetico nullo<sup>13</sup> possa essere usato per definire un tensore energia impulso di pura radiazione. Inoltre, dalla proiezione del campo vettoriale  $k^a$  (eq 2.14) (usato per definire il tensore energia impulso 2.13) sulla parte spaziale della metrica<sup>14</sup>, possiamo vedere come la direzione spaziale del campo coincida con la direzione di propagazione della radiazione elettromagnetica (definita dal tensore di Maxwell 2.6), ovvero: l'asse  $x$ . Ciò è tutt'altro che una coincidenza, come può essere intuito dalla forma generale del tensore energia impulso di pura radiazione 2.15.

Uno dei primi risultati fu ottenuto da Ivor Robinson [17] che, nel 1960, mostrò come un campo vettoriale nullo geodetico e shear-free, su una varietà Lorentziana, è associato ad una famiglia di bivettori nulli, tra i quali possiamo sempre trovare una soluzione non banale di tipo nulla delle equazioni di Maxwell. Questo risultato lega strettamente i campi di pura radiazione ai campi elettromagnetici: ogni volta che abbiamo un campo di pura radiazione possiamo associarlo ad un campo elettromagnetico nullo e viceversa un campo elettromagnetico nullo possiamo, alle volte, assimilarlo come un

---

<sup>13</sup>I campi elettromagnetici vengono classificati in base a due invarianti fondamentali così definite:

$$P := \frac{1}{2} F_{ab} F^{ab} = \|\vec{B}\|^2 - \frac{\|\vec{E}\|^2}{c^2} \quad (2.16)$$

$$Q := \frac{1}{4} F_{ab} * F^{ab} = \frac{1}{8} \epsilon^{abcd} F_{ab} F_{cd} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c} \quad (2.17)$$

e la classificazione e significato fisico sono i seguenti:

- **campi nulli** ( $S = P = 0$ ): in questo caso il campo elettrico e magnetico sono perpendicolari e dello stessa intensità (in unità geometriche)
- **campi non nulli** ( $P^2 + Q^2 \neq 0$ ): e si ha l'ulteriore distinzione:
  - $P = 0 \quad Q \neq 0$  : in questo caso ci si può mettere in un sistema di riferimento dove tutto il campo è elettrico (elettrostatica) o magnetico (magnetostatica).
  - $P \neq 0 \quad Q = 0$  : in questo caso esiste un sistema di riferimento dove il campo elettrico e magnetico sono proporzionali.

<sup>14</sup>per estrarre la componente spaziale di  $k^a$  possiamo usare il proiettore  $\eta^* = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$  se siamo nel sistema  $(u, x, y, z)$ .

campo di pura radiazione<sup>15</sup>.

Per dimostrare questo fatto partiamo dal risultato riportato anche in [17]:

**Lemma 2.1.** *Dato un bivettore  $F^{ab}$  nullo<sup>16</sup> reale su una varietà Lorentziana, le condizioni:*

$$F_{[ab}k_{l]} = 0 \quad F_{ab}k^b = 0 \quad (2.18)$$

*definiscono una direzione  $k^a$  nulla, reale e non banale. Viceversa, per ogni campo vettoriale  $k^a$  nullo diverso da zero le condizioni 2.18 determinano un bivettore  $F_{ab}$  reale, nullo, non banale, a meno di ampiezza e polarizzazione.*

Robinson si accorse che per far sì che il bivettore nullo, definito tramite le relazioni 2.18 da un qualche  $k^a$  nullo, fosse anche soluzione delle equazioni di Maxwell per un campo nullo<sup>13</sup>:

$$\begin{aligned} \nabla_a F^{ab} &= J^b = 0 \\ \nabla_{[a} F_{bc]} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

bastasse richiedere che il campo vettoriale  $k^a$  fosse anche *geodetico* e *shear-free*. Tali condizioni aggiuntive si dimostrarono oltre che sufficienti anche necessarie. sempre da [17]:

**Teorema 2.2.** *Se valgono le relazioni 2.18 allora:*  
 $k^a$  *nullo geodetico shear-free*  $\iff \exists F^{ab}$  *bivettore nullo soluzione di 2.19*

Riassumendo in termini fisici quanto fatto finora possiamo dire che i campi elettromagnetici nulli sono descrivibili da un tensore energetico di *radiazione pura* e un tensore di *radiazione pura* ha come sotto caso nel quale tutta l'energia è elettromagnetica quello dei campi elettromagnetici nulli. In questo modo è dunque spiegato il perchè siamo partiti dal caso elettromagnetico (nella sezione 2.1) per giungere alla forma generale di un tensore che può descrivere anche altre situazioni.

## Conservazione dell'energia

Una caratteristica interessante per uno spazio di radiazione pura è che possiamo semplificare la condizione di conservazione dell'energia  $\nabla_a T^{ab} = 0$ . Inserendo la forma generale per un tensore energia impulso di pura radiazione

---

<sup>15</sup>Faremo una precisazione per quanto riguarda questo aspetto a fine della sezione 2.3

<sup>16</sup>tale che  $F^{ab}F_{ab} = 0$

2.15 nell'equazione di conservazione dell'energia  $\nabla_a T^{ab} = 0$  otteniamo:

$$\nabla_a T^{ab} = \nabla_a (\Psi k^a k^b) = k^b \nabla_a (\Psi k^a) + \Psi k^a \nabla_a k^b \quad (2.20)$$

dove il secondo termine a destra si annulla grazie alla condizione che  $k^a$  sia geodetico (2.15). Dunque, possiamo ridurre la condizione di conservazione dell'energia per uno spazio di pura radiazione alla forma

$$\nabla_a (\Psi k^a) = 0 \quad (2.21)$$

### Traccia del tensore di Ricci

Per la forma di un campo di pura radiazione (2.15):

$$T = T^a_a = \Psi k^a k_a = 0. \quad (2.22)$$

e dalla relazione

$$R = -8\pi T \quad (2.23)$$

che possiamo ottenere prendendo la traccia dell'equazione di Einstein 1.1, abbiamo che, in generale, per un campo di radiazione pura

$$T = R = 0. \quad (2.24)$$

Dunque, le equazioni di Einstein si riducono ad una semplice proporzionalità tra il tensore di Ricci e quello energia impulso:

$$R_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (2.25)$$

mediante questa corrispondenza possiamo definire direttamente una “*null dust solution*” come uno spazio-tempo che abbia:

$$R_{ab} = G_{ab} = 8\pi \Psi k_a k_b \quad (2.26)$$

### 2.3 Significato e interpretazione di un campo di pura radiazione

I campi di *radiazione pura* sono, assieme ai campi elettromagnetici e i fluidi perfetti [18], alcune delle soluzioni di maggior interesse fisico delle equazioni di Einstein 1.1.

Possiamo formalizzare meglio il risultato 2.15, ottenuto a fine della sezione 2.1, slegandolo dall'interpretazione elettromagnetica dandone la definizione alla quale siamo giunti di *spazio-tempo di pura radiazione*.

**Definizione 2.1** (Spazio-tempo di pura radiazione). *Gli spazi-tempi di pura radiazione sono le soluzioni delle equazioni di Einstein 1.1 con tensore energia impulso della forma:*

$$T_{ab} = \Psi k_a k_b \quad (2.27)$$

con  $k_a$  campo vettoriale nullo ( $k^a k_a = 0$ ), geodetico ( $k^a \nabla_a k_b = 0$ ) e  $\Psi$  una funzione scalare reale.

Un tensore energia impulso così definito (2.27) ha un'interpretazione fisica immediata in termini di radiazione con massa nulla. Il campo vettoriale  $k_a$  di 2.27 specifica la direzione nella quale la radiazione si sta muovendo e lo scalare  $\Psi$  indica l'intensità del campo. Fisicamente un tensore energia impulso di pura radiazione può descrivere radiazione gravitazionale o radiazione descritta da teorie classiche relativistiche di campi (come l'elettromagnetismo) o una combinazione dei due casi. Le soluzioni di vuoto sono anch'esse un caso speciale delle soluzioni di pura radiazione per le quali  $\Psi = 0$ , quindi risulta normale trovare che spesso venga imposto che spazi-tempi di pura radiazione si riducano alla soluzione di vuoto se  $\Psi \rightarrow 0$ .

Oltre al caso elettromagnetico, dove i campi di *radiazione pura* vengono spesso usati per descrivere onde elettromagnetiche con alta frequenza o raggi di luce incoerente, essi si prestano anche a descrivere fasci di neutrini che per semplicità vengono assunti con massa nulla [7].

Bisogna, però, fare attenzione alla differenza tra “Spazi-tempi di Einstein-Maxwell” e “Spazi-tempi di radiazione pura”. I primi descrivono soluzioni delle equazioni di Einstein e di Maxwell in contemporanea, i secondi solamente le soluzioni delle equazioni di Einstein con tensore energia impulso definito da 2.1. Un esempio esplicativo sono proprio le onde elettromagnetiche piane prese individualmente, relativisticamente sono descritte dalle così dette “*electrovacuum solution*”, mentre una mistura incoerente delle

stesse può essere descritta da “radiazione pura”. Nel capitolo 2.1 abbiamo trascurato il fatto che se l’onda piana definita in 2.6 avesse mantenuto campo elettrico e magnetico lungo gli stessi assi allora avrebbe rotto la simmetria spaziale rotazionale intorno all’asse  $x$  che, invece, si ha quando siamo in un campo di *radiazione pura*. Onde per cui un campo di *radiazione pura* descrive un campo elettromagnetico solamente nel caso l’unica direzione individuabile è quella di propagazione dello stesso, dunque nei casi di mistura incoerente di onde o fasci di radiazioni ad altissima frequenza.

### 3 Spazio-tempo di Vaidya

Lo spazio-tempo di Vaidya e le sue generalizzazioni sono alcune delle più semplici, ma allo stesso tempo più usate, metriche soluzioni esatte delle equazioni di Einstein nel caso di spazio contenente *radiazione pura*<sup>17</sup>. Il loro largo impiego, sia in fisica teorica che in cosmologia, è dovuto principalmente alla loro grande rappresentatività di un sistema dinamico molto presente nel nostro universo: lo spazio esterno ad un corpo a simmetria sferica emittente radiazione “nulla”<sup>18</sup> isotropa (e.g. lo spazio esterno ad una stella). Più recentemente la metrica di Vaidya è stata anche usata per descrivere lo spazio esterno a buchi neri per lo studio della loro evaporazione e della radiazione di Hawking [10] [13] [16]. Da cui il rinnovato interesse di studiarne meglio le caratteristiche geometriche e le iper-superfici singolari<sup>19</sup> [5].

Per la prima volta presentata nel 1950 da P.C. Vaidya [20], mediante la scrittura dell’elemento di linea nelle coordinate di Schwarzschild  $(t, r, \theta, \psi)$ , fu poi, sempre ad opera di Vaidya, riscritta nelle coordinate radiative di Eddington-Finkelstein<sup>20</sup> [21]. La formulazione in questo nuovo sistema di coordinate, anche se perde di immediatezza fisica, è quella che ha riscosso più successo e che possiamo trovare in molti libri di testo [8] [18] e pubblicazioni che trattano tale spazio-tempo.

Nel capitolo 3.1 andremo a derivare la metrica di Vaidya con la procedura originaria (ripresa da [20]) e daremo un’interpretazione fisica dello spazio esterno ad un corpo emittente radiazione pura mediante lo studio di alcune quantità che restano costanti lungo le linee di flusso dell’energia.

Dimostreremo poi, come la stessa metrica possa essere scritta nelle coordinate di Eddington-Finkelstein semplicemente imponendo la dipendenza della massa dalla coordinata nulla  $u$ :

$$m \longrightarrow m(u) \tag{3.1}$$

per l’elemento di linea di Schwarzschild (C.1).

Infine, collegheremo i due sistemi di coordinate in 3.3 e daremo, nella sezione 3.4, la caratterizzazione covariante dello spazio-tempo di Vaidya in-

---

<sup>17</sup>Si faccia riferimento alla sezione 2 per la definizione di “radiazione pura”.

<sup>18</sup>Per radiazione nulla intendiamo senza massa o con massa trascurabile.

<sup>19</sup>Proprio perché si pensa che tali iper-superfici possano venirsi a creare fisicamente nel nostro universo. Ipotesi che prima veniva discussa solamente in linea teorica [14].

<sup>20</sup>Si faccia riferimento all’appendice C per un’introduzione sul sistema di coordinate di Eddington-Finkelstein.



dividendo una congruenza di curve *nulle, geodetiche, shear-free, twist-free* e con *expansion*  $\propto 1/r$ . In tal modo potremo anche collocare lo spazio-tempo di Vaidya all'interno della classe di spazi-tempi di Robinson-Trautman di radiazione pura.

Dopo di che, mediante la forma esplicita del campo vettoriale tangente alla congruenza nulla trovata esplicitamente in 3.4, compiremo anche uno studio su alcuni aspetti globali della geometria dello spazio-tempo di Vaidya quali: la sua struttura causale, la classificazione degli orizzonti e come possa essere esteso in modo massimale.

Daremo, infine, le generalizzazioni più importanti della metrica di Vaidya: quella a carica non nulla ( $Q \neq 0$ ) e quella a momento angolare non nullo ( $\Omega \neq 0$ ). Forniremo una breve analisi degli scalari ottici per i campi vettoriali nulli radiali anche in questi ultimi due casi.

### 3.1 Costruzione a partire dal tensore energia impulso

La necessità di trovare la metrica esterna ad un corpo con simmetria sferica in presenza di radiazione pura, come anticipato nell'introduzione, nasce da un'esigenza prettamente fisica: quella di descrivere lo spazio-tempo esterno ad una stella. Infatti, possiamo assumere che a causa della grande quantità dei processi di fusione interni e alla loro incoerenza temporale, la maggior parte dell'energia irradiata da una stella avvenga per via elettromagnetica sotto forma di luce non polarizzata con fase random<sup>21</sup>. Dunque ben descritta da un tensore energia impulso di *radiazione pura*, del tipo 2.15.

Fu in base a queste considerazioni che nel 1950 P.C. Vaidya [20] tramite un approccio molto fisico al problema: definendo inizialmente un tensore energia impulso adatto a descrivere il fenomeno e poi risolvendo le equazioni di Einstein<sup>22</sup>, riuscì a ricavare una metrica (soluzione esatta delle equazioni di Einstein) descrivente lo spazio-tempo esterno ad un corpo con simmetria sferica in presenza di radiazione pura.

Consideriamo, dunque, il problema di un corpo di massa  $M$ , non rotante, con carica nulla, a simmetria sferica, di raggio  $r_0$ , con spazio esterno inizialmente statico descritto dalla geometria di Schwarzschild, che, ad un certo

---

<sup>21</sup>Questo è un fatto ben noto anche dal punto di vista sperimentale, per quanto riguarda l'osservazione delle stelle.

<sup>22</sup>Contrariamente a come faremo nella sezione 3.2, dove partiremo da una metrica data e ricaveremo il tensore energia impulso ad hoc in modo che tale metrica sia soluzione delle equazioni di Einstein.

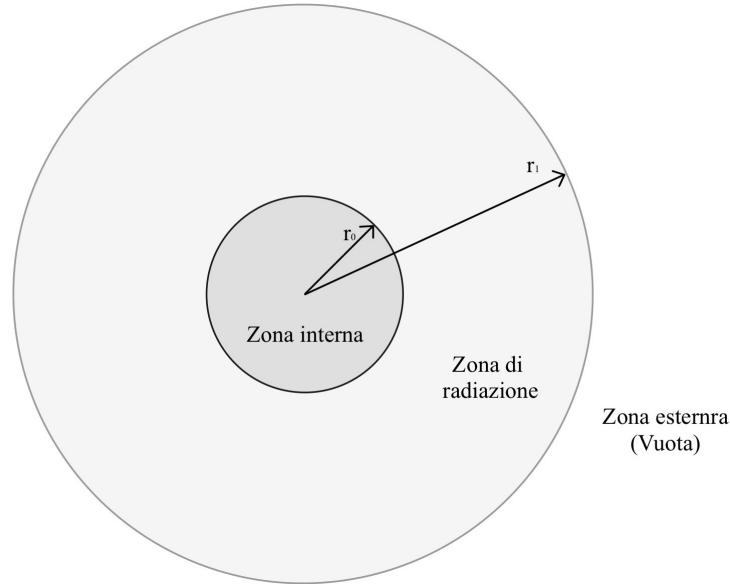


Figure 2: **schema di tripartizione dello spazio-tempo**: rappresentazione schematica delle zone nelle quali viene suddiviso lo spazio-tempo nel caso di massa emittente radiazione isotropa. La *zona interna*, più scura, rappresenta l'interno della stella. La *zona di radiazione*, più chiara, rappresenta la zona dello spazio-tempo con tensore energia impulso di tipo *radiazione pura*. Infine, la *zona esterna*, non colorata, è descritta dallo spazio-tempo di Schwarzschild.

istante  $t_0$ , inizia a irradiare energia sotto forma di *radiazione pura* nella direzione radiale uscente. Ad un istante successivo  $t_1 > t_0$  la zona di radiazione si sarà estesa ad un raggio  $r = r_1 > r_0$ . Si verranno dunque a creare 3 zone distinte nello spazio-tempo (vedi figura 2):

- Una regione internaval corpo ( $r < r_0$ ) descritta da un tensore energia impulso che modella l'interno stellare (che non verrà trattata in questa tesi);
- Una regione intermedia ( $r_0 < r < r_1$ ) detta “*zona di radiazione*” nella quale il tensore energia impulso è del tipo *radiazione pura* (2.15);
- Una regione esterna ( $r > r_1$ ) ancora descritta dalla geometria di Schwarzschild.

Supponendo che l'irraggiamento di energia avvenga in maniera isotropa nella direzione della coordinata radiale, senza dunque alterare la simmetria sferica dello spazio esterno, possiamo considerare, per la regione  $r_0 < r < r_1$ , una metrica anch'essa a simmetria sferica, del tipo:

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.2)$$

dove, sempre dall'ipotesi di simmetria sferica, le quantità  $\lambda$  e  $\nu$  sono funzioni dipendenti unicamente dalle coordinate  $r$  e  $t$ :

$$\lambda = \lambda(r, t) \quad \nu = \nu(r, t). \quad (3.3)$$

Il tensore energia impulso per questa regione di spazio sarà del tipo di *radiazione pura* 2.15, che riportiamo di seguito per riferimento:

$$T_{ab} = \Phi k_a k_b \quad k^a k_a = 0 \quad k^a \nabla_a k^b = 0.$$

Dall'ipotesi che il flusso di energia sia radiale possiamo subito porre:  $k^2 = k^3 = 0$  (ovvero il campo vettoriale  $k^a$  non ha componenti angolari) e dunque le componenti del tensore energia impulso si riducono a:

$$T_0^0 = \rho k^0 k_0 \quad ; \quad T_1^1 = \rho k^1 k_1 \quad ; \quad T_0^1 = \rho k^1 k_0 \quad ; \quad T_2^2 = T_3^3 = 0. \quad (3.4)$$

Inoltre, dall'ipotesi di nullità del vettore  $k^a$ , usando la metrica 3.2, possiamo giungere alla seguente:

$$\begin{aligned} g_{ab} k^a k^b = 0 &\implies k^0 k_0 + k^1 k_1 = 0 \\ &\implies -e^\nu (k^0)^2 + e^\lambda (k^1)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

che mette in corrispondenza diretta le componenti temporali e radiali del vettore  $k^a$ . Mediante questa relazione (3.5) possiamo anche mettere in corrispondenza tra loro le diverse componenti non nulle del tensore energia impulso 3.4:

- moltiplicando l'equazione 3.5 a destra e a sinistra per  $\rho$  ottengo:

$$T_0^0 + T_1^1 = 0 \quad (3.6)$$

- moltiplicando 3.5 a destra e a sinistra per  $\rho \frac{k^1}{k^0}$  ottengo:

$$T_1^0 e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} + T_0^0 = 0. \quad (3.7)$$

Infine, grazie alla proporzionalità diretta delle componenti del tensore di Ricci e quello energetico per i campi di pura radiazione (equazione 2.25, mostrata nella sezione 2.3) le equazioni 3.6 e 3.7 divengono le seguenti equazioni di campo<sup>23</sup>:

$$(3.6) \implies e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{2}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2} = 0 \quad (3.8)$$

$$(3.7) \implies e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} + \frac{\dot{\lambda}}{r} e^{-(\lambda+\nu)/2} = 0. \quad (3.9)$$

Mentre, per esempio, sempre tramite la diretta proporzionalità del tensore energia impulso e quello di Ricci, la condizione  $T_2^2 = 0$  di 3.4 si traduce nell'equazione:

$$-e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) + e^{-\nu} \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right) = 0. \quad (3.10)$$

Da queste equazioni di campo e dalle condizioni di raccordo in  $r = r_1$  con la metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.11)$$

e a quella interna stellare in  $r = r_0$ , possiamo determinare univocamente la metrica che stiamo indagando<sup>24</sup>.

### — Risoluzione delle equazioni di Einstein —

In questa sottosezione andremo a risolvere le equazioni di campo 3.8 e 3.9. Faremo vedere, inoltre, che ciò implica anche la validità della relazione 3.10.

<sup>23</sup>In realtà per ottenere le equazioni 3.8 e 3.9 devo prima maneggiare algebricamente le componenti del tensore di Ricci usando il fatto che (si faccia riferimento all'appendice E)  $R_0^0 = R_1^1 + \frac{\nu' + \lambda'}{r} e^{-\lambda}$ ,  $R_2^2 = R_3^3$  e le componenti diagonali del tensore di Ricci sono legate dalla relazione  $R = 0$  per i campi di pura radiazione (si veda sezione 2.3), dunque  $R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 = 0$ .

<sup>24</sup>In questa tesi non andremo a porre le condizioni di raccordo in quanto siamo interessati solamente alla caratterizzazione geometrica della metrica della zona di radiazione (vedi figura 2).

Poiché stiamo lavorando all'esterno di un ipotetica “stella” (non collassata) è ragionevole considerare il caso in cui  $r > 2m$ <sup>25</sup>. Onde per cui possiamo ridefinire alcuni parametri della metrica 3.2 anche con funzioni singolari in  $r = 2m$ , al fine di poter semplificare i calcoli.

Ciò detto, iniziamo ponendo

$$\boxed{e^{-\lambda} := \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad \text{con } m := m(r, t)} \quad (3.12)$$

Mediante tale equazione possiamo trovare un modo di esprimere  $\lambda$  e la sue derivate in  $r$  e in  $t$  rispetto alla funzione  $m(r, t)$  e alle sue derivate:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{2m'r - 2m}{r(r - 2m)} \\ \dot{\lambda} &= \frac{2\dot{m}}{r - 2m} \end{aligned} \quad (3.13)$$

dove il punto indica la derivata rispetto a  $t$  ( $\dot{m} = \partial m / \partial t$ ) e l'apice la derivata rispetto a  $r$  ( $m' = \partial m / \partial r$ ).

Inserendo queste quantità nell'equazione 3.8 otteniamo la relazione:

$$e^{-\lambda/2} m' + e^{-\nu/2} \dot{m} = 0 \quad (3.14)$$

che possiamo riscrivere così:

$$\frac{dm}{d\tau} = 0 \quad (3.15)$$

introducendo l'operatore:

$$\frac{d}{d\tau} := k^0 \frac{\partial}{\partial t} + k^1 \frac{\partial}{\partial r}. \quad (3.16)$$

Dall'equazione 3.14 possiamo esprimere  $e^\nu$  in base a  $m'$  e  $\dot{m}$ :

$$\boxed{e^\nu = \left(\frac{\dot{m}}{m'}\right)^2 e^\lambda = \left(\frac{\dot{m}}{m'}\right)^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}} \quad (3.17)$$

In modo tale che possiamo esprimere anche il valore di  $\nu'$  in base alla funzione  $m$  e alle sue derivate radiali e spaziali:

$$\nu' = 2 \left( \frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{m''}{m'} \right) + \frac{2m'r - 2m}{r(r - 2m)}. \quad (3.18)$$

---

<sup>25</sup>Il raggio di Schwarzschild.

A questo punto prendiamo la seconda equazione di campo 3.9 e sostituiamo i valori trovati per  $\lambda$  e  $\nu$ . Otteniamo così l'equazione differenziale:

$$(3.9) \implies e^{-\lambda} (\lambda' - \nu') + 2 \frac{1 - e^{-\lambda}}{r^2} = 0$$

$$\implies \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{m''}{m'}\right) = \frac{2m}{r^2}. \quad (3.19)$$

Per risolvere questa equazione differenziale iniziamo da una sua riscrittura nella forma:

$$\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{d}{dr} \log m' = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{2m}{r^2} \quad (3.20)$$

Notiamo che

$$\frac{d}{dr} \log \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left[\frac{2m'}{r} - \frac{2m}{r^2}\right]$$

Allora:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{2m}{r^2} = \frac{d}{dr} \log \left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \frac{m'}{\dot{m}} \frac{d}{dt} \log \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

e l'equazione (3.20) diviene:

$$\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} = \frac{d}{dr} \log \left[m' \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right] - \frac{m'}{\dot{m}} \frac{d}{dt} \log \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (3.21)$$

Moltiplicando per  $\dot{m}$  e dividendo per  $m'$ :

$$\frac{d}{dt} \log m' = \frac{\dot{m}}{\dot{m}'} \frac{d}{dr} \log \left[m' \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right] - \frac{d}{dt} \log \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (3.22)$$

Otteniamo infine:

$$\dot{m} \frac{d}{dr} \log \left[m' \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right] = m' \frac{d}{dt} \log \left[m' \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right] \quad (3.23)$$

L'equazione è dunque risolta imponendo:

$$\boxed{m' \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = f(m)} \quad (3.24)$$

Infine, possiamo mostrare che scegliendo  $\lambda$  e  $\nu$  mediante le equazioni 3.14 e 3.17 con la condizione 3.24 allora viene automaticamente soddisfatta anche l'ultima equazione di campo 3.10. Infatti, prendendo  $\lambda$  e  $\nu$  secondo 3.14 e 3.17 e richiedendo che sia soddisfatta 3.24, sto già imponendo che 3.9, ovvero  $R_0^0 + R_1^1$  sia soddisfatta, e considerando che<sup>26</sup>  $R_2^2 = R_3^3$  e  $R = 0$  come conseguenza avrò:

$$R_2^2 = 0 \implies T_2^2 = 0 \quad (3.25)$$

Ovvero 3.10 è soddisfatta.

L'elemento di linea finale, che descrive lo spazio esterno ad una stella in presenza di radiazione pura radiale, è l'elemento di linea 3.2 con le relazioni riquadrate 3.12 e 3.17 :

$$ds^2 = -\frac{\dot{m}^2}{f^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.26)$$

con la richiesta che valga 3.24:

$$m' \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = f(m) \quad m = m(r, t) \quad (3.27)$$

per la regione di spazio detta *zona di radiazione*

$$(2m <) r_0 < r < r_1 \quad ; \quad t_0 < t < t_1 \quad ; \quad 0 < \theta < \pi \quad ; \quad 0 < \phi < 2\pi. \quad (3.28)$$

### 3.1.1 Interpretazione fisica del fenomeno

Ci accingiamo ora a dare un'interpretazione fisica alla metrica sopra derivata, portando alla luce il comportamento di alcune quantità con le quali siamo soliti lavorare e ragionare in fisica classica. A questo proposito, l'aver ottenuto la metrica nelle coordinate di Schwarzschild gioca a nostro favore, infatti, è ben noto che per un osservatore in  $r \rightarrow +\infty$  le coordinate  $(t, r, \theta, \psi)$  divengono le usuali coordinate (*tempo proprio, distanza dall'origine, coordinata assiale, coordinata azimutale*).

L'interpretazione fisica della metrica 3.26 avviene tramite lo studio del comportamento del nucleo dell'operatore 3.16:

$$\frac{d}{d\tau} = k^0 \frac{\partial}{\partial t} + k^1 \frac{\partial}{\partial r} \quad (3.29)$$

---

<sup>26</sup>Si faccia riferimento all'appendice E per i valori del tensore di Ricci per la metrica 3.2.

che può essere interpretato come la “derivata nella direzione delle linee di flusso del campo di pura radiazione”.

Una quantità che sappiamo già soddisfare tale condizione è la funzione  $m = m(r, t)$ . Infatti, l’equazione 3.15 è proprio:

$$\boxed{\frac{dm}{d\tau} = 0} \quad (3.30)$$

Un’altra equazione di questo tipo possiamo ricavarla dalla condizione geodetica di  $k^a$ . Infatti, eliminando il vettore  $k^0$  dall’equazione geodetica per  $k^1$  tramite la relazione di nullità per  $k^a$  3.5, ottengo:

$$\begin{aligned} k^a \nabla_a k^b = 0 &\implies k^a \nabla_a k^1 = 0 \\ \frac{\partial k^1}{\partial r} + e^{(\lambda-\nu)/2} \frac{\partial k^1}{\partial t} + \left( \frac{\lambda' + \nu'}{2} + \dot{\lambda} e^{(\lambda-\nu)/2} \right) k^1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Possiamo far vedere come il termine tra parentesi, a sinistra dell’uguale di 3.31, si annulla per le equazioni di campo 3.8 e 3.9 che, ovviamente, se siamo nella metrica 3.26 sono soddisfatte. Dunque, moltiplicando per  $e^{\lambda/2}$  ciò che rimane dall’equazione 3.31 è

$$e^{-\lambda/2} \frac{\partial k^1}{\partial r} + e^{-\nu/2} \frac{\partial k^1}{\partial t} = 0 \quad (3.32)$$

che corrisponde a dire<sup>27</sup> :

$$\boxed{\frac{dk^1}{d\tau} = 0} . \quad (3.33)$$

Infine, può essere ricavata un’ultima quantità, che sotto l’azione dell’operatore  $d/d\tau$  va in zero. Partendo dall’equazione di conservazione dell’energia per i campi di pura radiazione 2.21, usando la linearità della derivata covariante e i coefficienti di connessione<sup>28</sup> per la metrica 3.26 otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla_a(\rho k^a) &= 0 \\ (\nabla_a \rho) k^a + \rho (\nabla_a k^a) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial x^a} k^a + \rho \left( \frac{\partial k^a}{\partial x^a} + \Gamma_{ab}^a k^b \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

<sup>27</sup>Grazie alla relazione 3.5 tra le componenti di  $k^0$  e  $k^1$ .

<sup>28</sup>Si faccia riferimento all’appendice E per i valori espliciti dei coefficienti di connessione per la metrica 3.2.



Svolgendo il calcolo di 3.34 giungiamo all'equazione<sup>29</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} (\rho r^2 \sin\theta k^a e^{(\nu+\lambda)/2}) = 0 . \quad (3.36)$$

Che possiamo sviluppare esprimendo  $k^0$  in base a  $k^1$  mediante la relazione 3.5:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \sin\theta \rho k^0 e^{(\lambda+\nu)/2}) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin\theta \rho k^1 e^{(\lambda+\nu)/2}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \rho) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 k^1 e^{(\lambda+\nu)/2}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Eseguendo le derivate parziali dei termini contenenti  $\lambda$  e  $\nu$  e raccogliendo intelligentemente i termini posso giungere all'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho k^1) + \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \rho k^1) e^{(\lambda+\nu)/2} + r^2 \rho k^1 \left( \frac{\lambda' + \nu'}{2} + \dot{\lambda} e^{(\lambda-\nu)/2} \right) = 0 \quad (3.38)$$

Da cui, con lo stesso ragionamento eseguito per quanti riguarda l'equazione 3.31, possiamo dire che l'ultimo termine tra parentesi a sinistra dell'uguale si annulla e ottenere l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho k^1) + \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \rho k^1) e^{(\lambda+\nu)/2} = 0 \implies \frac{d(r^2 \rho k^1)}{d\tau} = 0 . \quad (3.39)$$

Insieme, i risultati 3.33 e 3.39 implicano

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \rho k^1 k^1) = \frac{d}{d\tau} (r^2 T^{11}) = 0 \quad (3.40)$$

ed

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} (r^2 \rho) = 0} . \quad (3.41)$$

Le relazioni 3.30, 3.33 e 3.41 acquistano significato se considero l'interpretazione dell'operatore  $d/d\tau$  data all'inizio della sezione. Tale operatore, ricordiamo infatti, essere l'operatore derivazionale lungo le linee di flusso del

---

<sup>29</sup>dove abbiamo usato l'equazione

$$\Gamma_{ab}^a = -\frac{\partial}{\partial x^a} \log(\sqrt{-g}) \quad (3.35)$$

per il calcolo di  $\Gamma_{ab}^a k^b$ .

campo, che ricordiamo essere *radiali*, *nulle* e dirette verso l'esterno. In ogni momento nella zona di radiazione vi è un fronte d'onda sferico con distanza  $r$  dal centro e che si muove verso l'esterno sul quale le funzioni  $m$ ,  $k^1$  e  $r^2\rho$  sono costanti. Al bordo della zona di radiazione vi è un fronte d'onda che si propaga nello spazio vuoto di Schwarzschild secondo l'equazione:

$$R + 2M \ln(R - 2M) - t = \text{const} \quad (3.42)$$

e che porta con se l'informazione che la massa della stella è ancora quella iniziale del corpo, prima che iniziasse a irradiare. Su tale guscio sferico, per come abbiamo costruito il problema, dobbiamo imporre le condizioni di raccordo con la metrica di Schwarzschild. Tali condizioni andranno ad eliminare uno dei due gradi di libertà rimasti alla metrica di Vaidya [20]. Mentre l'altro grado di libertà viene fissato dalle condizioni di raccordo della metrica di Vaidya con quella dell'interno della stella in  $r = r_0$  (si veda figura 2).

Una trattazione del flusso di energia per lo spazio-tempo di Vaidya è stata eseguita da R.W. Lindquist e R.A.Schwartz [14]. Seguendo quanto fatto da loro possiamo calcolare la luminosità di una "stella di Vaidya", definita come:

$$L := 4\pi r^2 q \quad (3.43)$$

dove  $q$  è la densità di energia percepita da un osservatore con quadri-velocità  $v^a$ :

$$q := T_{ab} v^a v^b \quad (3.44)$$

Per semplificare i calcoli ci poniamo nel sistema di coordinate nulle di Eddington-Finkelstein<sup>30</sup> nelle quali la metrica di Vaidya (come vedremo in 3.2) assume la forma 3.52. Consideriamo dunque un osservatore con quadri-velocità  $v^a$  in moto radiale attorno alla sorgente di campo di *radiazione pura* e chiamiamo  $U$  la componente radiale del suo vettore di quadri-velocità:

$$U := v^r = \frac{dr}{d\tau} \quad (3.45)$$

(con  $\tau$  il tempo proprio dell'osservatore). Sfruttando il fatto che la traiettoria dell'osservatore sia radiale ( $v^\theta = v^\phi = 0$ ) e di tipo tempo  $v^a v_a = -1$  ottengo

---

<sup>30</sup>Per un'introduzione delle coordinate di Eddington-Finkelstein si faccia riferimento all'appendice C.

che:

$$\begin{aligned}
v^a v_a &= -1 \\
g_{uu}(v^u)^2 + 2g_{ur}v^u v^r &= -1 \\
\implies \left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right)(v^u)^2 + 2Uv^u + 1 &= 0
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado per  $v^u$  e scegliendo la soluzione rappresentante la particella uscente otteniamo:

$$v^u = \frac{1}{\gamma + U} \tag{3.47}$$

Dove abbiamo definito  $\gamma = \sqrt{1 + U^2 - \frac{2m(u)}{r}}$ . Dalla forma del tensore energia-impulso (si veda 3.61 sempre ricavata nella sezione 3.2) posso riscrivere  $q$  nella sua forma esplicita:

$$q = -\frac{m'}{4\pi r^2} \frac{1}{(\gamma + U)^2} \tag{3.48}$$

Per un osservatore a riposo all'infinito abbiamo subito che:

$$L_\infty(u) := \lim_{r \rightarrow \infty, U=0} L = -m' = -\frac{dm}{du} \tag{3.49}$$

Infine, dalla forma di  $L_\infty$  e dalla definizione  $L := 4\pi r^2 q$  possiamo riscrivere la relazione 3.48 come:

$$L_\infty = L(\gamma + U)^2 \tag{3.50}$$

che mostra immediatamente come la luminosità  $L$  si riduce di un fattore  $(\gamma + U)$  a causa di un *red-shift* dell'energia più ci si muove verso l'esterno.

## 3.2 Costruzione a partire da Schwarzschild

Consideriamo la metrica di Schwarzschild nelle coordinate nulle di Eddington-Finkelstein ritardate<sup>31</sup> C.9:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) du^2 - 2dudr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (3.51)$$

e concediamo al parametro di “massa”  $m$  di poter dipendere dalla coordinata nulla  $u$  ( $m \rightarrow m(u)$ ) giungendo dunque alla metrica:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m(u)}{r} \right) du^2 - 2dudr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (3.52)$$

Possiamo dimostrare che la metrica ottenuta è soluzione delle equazioni di Einstein e ricavare la forma del tensore energetico che ne consegue seguendo le formule riportate nell’appendice D. Dall’elemento di linea 3.52 possiamo dedurre che le componenti non nulle del tensore metrico e del suo inverso<sup>32</sup> sono:

$$\begin{aligned} g_{00} &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) & g^{11} &= 1 - \frac{2m(u)}{r} \\ g_{01} &= -1 & g^{01} &= -1 \\ g_{22} &= -r^2 & g^{22} &= -r^{-2} \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2(\theta) & g^{33} &= -r^{-2} \sin^{-2}(\theta). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Applicando poi l’equazione D.1 calcoliamo i coefficienti di connessione<sup>33</sup> o “simboli di Christoffel”:

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{m(u)}{r} \quad \Gamma_{00}^1 = -\frac{r^2 \dot{m}(u) - rm(u) + 2m(u)^2}{r^3} \quad (3.54)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{m(u)}{r^2} \quad \Gamma_{22}^1 = 2m(u) - r \quad \Gamma_{33}^1 = (2m(u) - r) \sin^2(\theta)^2 \quad (3.55)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{22}^0 = r \quad \Gamma_{33}^0 = r \sin^2(\theta)^2 \quad (3.56)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin(\theta)\cos(\theta) \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \quad (3.57)$$

---

<sup>31</sup>vedo appendice C per la derivazione della metrica di Schwarzschild nelle coordinate nulle di Eddington-Finkelstein.

<sup>32</sup>Il tensore metrico inverso è definito come quel tensore tale per cui  $g_{ab}g^{bc} = \delta_c^b$

<sup>33</sup>I valori dei coefficienti di connessione 3.54 possono anch essere trovati in [5].

E infine, ricaviamo le componenti del tensore di Ricci, sempre nelle coordinate  $(u, r, \theta, \phi)$ , applicando l'equazione D.3. Scopriamo che solamente la componente  $R_{00}$  è non nulla

$$R_{00} = -\frac{2m'(u)}{r^2} \quad R_{\mu\nu} = 0 \text{ se } \mu \wedge \nu \neq 0 \quad (3.58)$$

dove  $m'(u) = \frac{dm(u)}{du}$ .

Da un'immediata applicazione delle equazioni di Einstein 1.1 possiamo dunque vedere che il tensore energia impulso e quello di Ricci sono dello stesso tipo:

$$8\pi T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (3.59)$$

$$\implies^{(eq.2.25)} T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}R_{\mu\nu} \quad (3.60)$$

Portandoci ad una forma del tensore energia impulso a noi familiare (dalla sezione 2.1):

$$T_{00} = -\frac{m'(u)}{4\pi r^2} \quad , \quad T_{ab} = 0 \text{ altrimenti} \quad (3.61)$$

Infatti, considerando che  $u$  è una coordinata nulla geodetica<sup>34</sup> posso riscrivere il tensore energia impulso nella forma:

$$T_{ab} = \Phi k_a k_b \quad , \quad \text{con } k_a := -u_a \text{ geodetico nullo}, \quad (3.62)$$

Ovvero: il tensore energia impulso per questo spazio-tempo è del tipo di “*radiazione pura*” (2.15). Ciò conclude la dimostrazione del fatto che la metrica 3.52 è una soluzione delle equazioni di Einstein rappresentante un campo di radiazione pura esterno ad una massa a simmetria sferica. Lo stesso procedimento può essere ripetuto prendendo, questa volta, la metrica di Schwarzschild in coordinate nulle di Eddington-Finkelstein avanzate. Seppur i procedimenti matematici sono analoghi, il caso fisico descritto è quello di un corpo centrale con massa a simmetria sferica nel quale la radiazione “pura” circostante converge .

<sup>33</sup>Dove ho usato il fatto che  $R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 0$  poichè  $g^{\mu\nu} = 0$  quando  $R_{\mu\nu} \neq 0$  e viceversa

<sup>34</sup>La dimostrazione può essere trovata nell'appendice C.

### 3.3 Problematiche riguardanti il sistema di coordinate

É possibile ottenere la metrica di Vaidya nelle coordinate nulle di Eddington-Finkelstein direttamente dall'elemento di linea 3.26 mediante il cambiamento di coordinate:

$$(t, r, \theta, \phi) \longrightarrow (u, r, \theta, \phi) \quad (3.63)$$

con  $u := u(m)$  tale che:

$$du = -\frac{dm}{f(m)} = -\left(dr + \frac{\dot{m}}{m'}dt\right)\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (3.64)$$

Così facendo, nell'intersezione dei domini dei due sistemi di coordinate, possiamo dire che la metrica 3.26 e 3.52 rappresentano lo stesso spazio fisico. Nella forma 3.52, però, il dominio della soluzione risulta essere esteso alla regione in  $r < 2m$ <sup>35</sup>. Da questo fatto possiamo dedurre che la singolarità superficiale che si forma in  $r = 2m(u)$  per la metrica 3.26 è una singolarità apparente dovuta al sistema di coordinate di  $(t, r, \theta, \phi)$ , analogamente a quanto avviene per l'orizzonte degli eventi di Schwarzschild.

La metrica 3.52 è soluzione esatta delle equazioni di Einstein, come dimostrato in 3.2, per:

$$\begin{aligned} r &\in (0, +\infty) & \theta &\in (0, +\pi) \\ u &\in (0, +\infty) & \phi &\in (0, 2\pi) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Nelle coordinate nulle di Eddington-Finkelstein risulta anche più immediata la riduzione all'elemento di linea di Schwarzschild. Infatti, come possiamo vedere all'inizio della sezione 3.2, basta semplicemente porre  $\dot{m} = 0$  per passare da 3.52 a 3.51. La maggior parte delle pubblicazioni che riguardano la geometria dello spazio-tempo di Vaidya adoperano questo sistema di coordinate [5].

Un altro sistema di coordinate nel quale possiamo porre la metrica di Vaidya è quello delle coordinate rettangolari nella forma di Kerr-Schild, dove tale metrica assume la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2m(u)}{r} (k_a dX^a)^2 = g_{ab} dX^a dX^b \quad (3.66)$$

---

<sup>35</sup>dove, come dimostrato in 3.2, la metrica 3.52 è comunque soluzione esatta delle equazioni di Einstein 1.1

(dove  $[X^a] = [t, x, y, z]$ , mentre  $[k_a] = [-1, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}]$  è un vettore nullo con  $r := x^2 + y^2 + z^2$ ). Dove l'unica differenza dal caso statico è che  $m$  dipende da  $u$ . Anche in questo caso risulta “curioso” il fatto che per passare dal caso di metrica nello spazio vuoto a quella di pura radiazione basti, se si è in un sistema con una coordinata nulla e una coordinata coincidente con la direzione del flusso di energia, far dipendere la massa dalla coordinata nulla.

Tuttavia, sia in quest'ultimo sistema di coordinate che in quello delle coordinate nulle di Eddington-Finkelstein, la metrica rimane incompleta [8] [12] [5] [24]. Infatti, non è chiaro cosa succeda alla funzione di massa  $m(u)$  per  $u \rightarrow \infty$ , un'estensione è dunque richiesta. Risulta, quindi, naturale chiedersi se, perseguendo il parallelismo con il caso statico<sup>36</sup>, non si possa, anche per la metrica di Vaidya, trovare un sistema di coordinate *doppie-nulle* tipo il sistema di coordinate di Kruskal per Schwarzschild<sup>37</sup>.

R.W. Lindquist e R. A. Schwartz nel 1965 [14] provarono, per primi, ad apprezzare tale problema, tuttavia il loro insuccesso li portò a concludere che il passaggio alle coordinate *doppie-nulle* per la metrica di Vaidya non fosse possibile in generale. Successivamente, alcuni risultati furono comunque ottenuti da B. Waugh e K. Lake [24] per funzioni di massa specifiche (e.g. dipendenza lineare o esponenziale di  $m$  dalla coordinata nulla  $u$  in 3.52). In tali casi è infatti possibile (come fatto in [24]) partire dall'elemento di linea *doppio-nullo* a simmetria sferica generale<sup>38</sup>

$$ds^2 = -f(u, v)dudv + r^2(u, v)d\Omega^2 \quad (3.67)$$

e risolvere le equazioni di Einstein imponendo che il tensore energia-impulso sia del tipo “*radiazione pura*”, come riportato nella definizione 2.1.

Nel caso di dipendenza lineare della massa:

$$m = au + b \quad (3.68)$$

abbiamo anche studi più specifici nei quali vengono ricavate considerazioni più peculiari sul comportamento di alcune grandezze fisiche in tali sistemi [1] [2].

---

<sup>36</sup>Lo spazio-tempo di Schwarzschild.

<sup>37</sup>Il sistema di coordinate di Kruskal ricopre interamente la varietà di Schwarzschild “incollando” tra loro le parti di varietà descritte rispettivamente dal sistema di coordinate di Eddington-Finkelstein avanzate e ritardate.

<sup>38</sup>Nell'elemento di linea 3.67 è già stata imposta la simmetria sferica e  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  è l'elemento di angolo solido.

L'estensione generale<sup>39</sup> della metrica di Vaidya avvenne mediante un altro sistema di coordinate (non quello *doppio-nullo*) introdotto da W. Israel [11] nel 1967. Tale estensione risulta essere massimale e racchiude al suo interno tutti gli orizzonti degli eventi della metrica. Tuttavia, come fatto notare anche da Fayos, Martín-Prat e Senovilla [6] tale estensione non risulta unica. Tratteremo meglio l'estensione di Israel in 3.5.

### 3.4 caratterizzazione covariante

Prendiamo ora in considerazione il campo vettoriale di flusso del tensore energia impulso di pura radiazione per la metrica di Vaidya<sup>40</sup> 3.62:

$$k_a = -\partial_a u . \quad (3.69)$$

Esso ha, nel sistema di coordinate nulle di Eddington-Finkelstein 3.52, espressione esplicita:

$$[k^a] = [0, -1, 0, 0]^{41} \quad (3.70)$$

e dall'ipotesi che il tensore energia impulso sia di pura radiazione (si veda la definizione 2.1), possiamo subito dire che  $k^a$  è nullo e geodetico. Possiamo verificarlo usando la metrica 3.52 e i coefficienti di connessione 3.54.

- $k^a$  **nullo**:

$$k^a k_a = 0 \quad (3.71)$$

come è possibile dedurre dalla controparte covariante di 3.70.

- $k^a$  **geodetico**: La derivata covariante del vettore  $k^a$  è esprimibile come

---

<sup>39</sup>In questo contesto “estensione generale” è intesa come “estensione che vale per ogni dipendenza della massa  $m$  da  $u$ ”.

<sup>40</sup>Il vettore di flusso del campo energetico per il tensore di pura radiazione  $T_{ab}k^ak^b$  è semplicemente  $k^a$ .

<sup>41</sup>Le componenti covarianti del vettore, ovvero  $k_a$ , che saranno utili per i calcoli degli scalari ottici sono ottenute con la solita procedura di abbassamento dell'indice  $k_a = g_{ab}k^b$  mediante la metrica 3.52 e sono:

$$[k_a] = [1, 0, 0, 0] .$$



il tensore (0,2):

$$[\nabla_a k_b] = [\Gamma_{ab}^0] = \begin{bmatrix} -\frac{m(u)}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

che porta subito all'equazione del trasporto parallelo:

$$k^a \nabla_a k_b = k^1 \nabla_1 k_b = 0 \quad (3.73)$$

dove abbiamo usato il fatto che l'unico elemento di  $k^a$  non nullo fosse quello radiale.

Come riportato nell'appendice F per un campo vettoriale nullo geodetico è possibile calcolare gli scalari ottici di *expansion*, *shear* e *twist*:

- **Expansion** che calcoliamo mediante la formula F.9 :

$$\begin{aligned} \Theta &:= \frac{1}{2} \nabla_a k^a = \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_0 k^0 + \nabla_1 k^1) = \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma_{12}^2 k^1 + \Gamma_{13}^3 k^1) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (3.74)$$

- **Twist** che calcoliamo mediante la formula F.14:

$$\omega^2 := -\nabla_{[a} k_b] \nabla^a k^b \quad (3.75)$$

Possiamo vedere dal calcolo esplicito 3.72 che solamente le componenti diagonali di  $\nabla_a k_b$  sono non nulle, rendendo  $k_a$  una forma chiusa. Dunque:

$$\nabla_{[a} k_b] := \frac{1}{2} (\nabla_a k_b - \nabla_b k_a) = 0 \implies \omega^2 = 0. \quad (3.76)$$

Nota: *Per il teorema di Frobenius la condizione  $\omega = 0$  (twist-free) per un campo vettoriale nullo coincide con quella geodetica.*

- **Shear** che calcoliamo mediante la formula F.15:

$$\sigma^2 := \nabla_{(a}k_b)\nabla^ak^b - 2\Theta^2 \quad (3.77)$$

Sempre grazie al fatto che  $k_a$  è una forma chiusa possiamo dire che  $\nabla_{(a}k_b) = \nabla_a k_b$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \nabla_a k_b \nabla^a k^b - 2\Theta^2 \\ &= \nabla_2 k_2 \nabla^2 k^2 + \nabla_3 k_3 \nabla^3 k^3 - 2 \left( \frac{1}{r} \right) = \\ &= r \left( \frac{1}{r^3} \right) + r \sin^2 \theta \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta} - \frac{2}{r} = \\ &= \frac{2}{r} - \frac{2}{r} = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Per il vettore  $k^a$  nello spazio-tempo di Vaidya abbiamo dunque:

$$\boxed{\sigma^2 = 0 \quad \omega = 0 \quad \Theta = 1/r} \quad (3.79)$$

Possiamo quindi affermare che lo spazio-tempo di Vaidya ammette un vettore *geodetico*, *nullo*, *shear-free*, *twist-free* e con *expansion* =  $1/r$ . Ciò fa rientrare lo spazio-tempo di Vaidya nella classe di spazi-tempi di Robinson-Trautman<sup>42</sup>. Secondo la seguente definizione, da [18]:

**Definizione 3.1** (Spazitempi di Robinson Trautman). *Uno spazio-tempo pseudo-Riemanniano che ammette una congruenza di curve nulle, geodetiche, shear-free, twist-free, ma divergenti ( $\Theta \propto 1/r$ ) e soddisfa la condizione  $R_{11} = R_{10} = R_{00} = 0$  (nel formalismo di Newman-Penrose) è detto di Robinson-Trautman.*

Nota: nel formalismo di Newman-Penrose ho  $R_{10} = R_{ab}k^ak^bl$  dove  $\mathbf{k}$  ed  $\mathbf{l}$  fanno parte della tetrad nulla di base  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$  e per scelta il vettore  $\mathbf{k}$  è preso nella direzione coincidente al campo vettoriale del flusso di energia. Dunque per un tensore energia impulso di tipo radiazione ho sempre componenti nulle:  $R_{00} = \Psi k_a k_b k^a k^b = 0$ .

Più precisamente possiamo collocare lo spazio-tempo di Vaidya nella sottoclasse di “spazi-tempi di pura radiazione di Robinson-Trautman”. Ovvero

---

<sup>42</sup>Nella sezione 2.2 abbiamo già fornito uno dei primi risultati ottenuti da Robinson per quanto riguarda i campi elettromagnetici nulli

la classe di spazi-tempi di Robinson-Trautman con tensore energia impulso del tipo di radiazione pura [18]. Robinson e Trautman, come precedentemente accennato, iniziarono a studiare tale classe di spazi-tempi (quelli ai quali gli si diede tale nome, vedi la definizione 3.1) a partire dalla loro caratterizzazione covariante. Considerarono spazi-tempi che ammettono congruenze nulle  $k^a$  *geodetiche*, *shear-free*, ma *divergenti*, con la richiesta aggiuntiva che le componenti del tensore di Ricci estratte dalla congruenza nulla  $\mathbf{k}$  e il vettore  $\mathbf{l}$  della tetrad fossero nulli<sup>43</sup>:

$$R_{00} = R_{10} = R_{11} = 0 \quad (3.80)$$

A partire da queste ipotesi e dal legame che lega il tensore di curvatura di Riemann agli scalari ottici di un tensore nullo è possibile infatti ricavare il seguente teorema. Sempre da [18] ho:

**Teorema 3.1** (Robinson-Trautman solution). *Uno spazio-tempo che ammette una congruenza  $\mathbf{k}$  nulla, geodetica, shear-free ma divergente ( $\Theta = 1/r$ ) e soddisfa (Nel formalismo di Newman-Penrose)  $R_{00} = R_{10} = R_{11}$  esattamente, allora possiede la seguente metrica:*

$$ds^2 = -2Hdu^2 - 2dudr + 2r^2P^{-2}d\zeta d\bar{\zeta} \quad (3.81)$$

deve:

$$2H := \Delta \log P - 2r\partial_u(\log P) - \frac{2m(u)}{r}, \quad (3.82)$$

con:

$$\begin{aligned} [k^a] &= [1, 0, 0, 0] & [l^a] &= [1, -H, 0, 0] \\ [m^a] &= [0, 0, P/r, 0] & [\bar{m}^a] &= [0, 0, 0, P/r] \end{aligned} \quad (3.83)$$

dove in 3.82  $\Delta := 2P^2\partial_\zeta\partial_{\bar{\zeta}}$  e  $P := P(\zeta, \bar{\zeta}, u)$ .

La metrica 3.81 diviene la metrica di Vaidya nel caso  $H$  assuma la forma:

$$H = \left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right). \quad (3.84)$$

Torniamo ora allo studio della geometria dello spazio-tempo di Vaidya prima della digressione sugli spazi di Robinson-Trautman. L'individuazione di campo vettoriale nullo geodetico all'interno di uno spazio-tempo, come

---

<sup>43</sup>dove sto sempre usando il formalismo di Newman-Penrose per cui:  $R_{00} = R_{ab}k^ak^b$ ,  $R_{10} = R_{ab}k^am^b$  ed  $R_{11} = R_{ab}m^am^b$

riportato nell'appendice F, può essere utile allo studio della metrica ortogonale a tale campo. Infatti, le quantità di *shear*, *twist* e *expansion* hanno un immediata interpretazione cinematica nel caso la congruenza di curve sia di tipo tempo<sup>44</sup>. Aver trovato un campo vettoriale *nulllo*, *geodetico* e con scalari ottici 3.79 da un indicazione sul comportamento geometrico della metrica ortogonale alla congruenza di curve individuata dallo stesso campo vettoriale. Nel caso di una congruenza nulla di curve l'individuazione della metrica ortogonale non è immediata e richiede l'individuazione di un vettore ausiliario  $N^a$  t.c.  $N^a k_a \neq 0$ . poichè la normalizzazione di un vettore nullo è arbitraria possiamo prendere  $N^a$  in modo che  $N^a k_a = -1$ . Un vettore di questo tipo per la metrica di Vaidya 3.52 è:

$$[N^a] = \left[ 1, \frac{m(u)}{r} - \frac{1}{2}, 0, 0 \right] \quad (3.85)$$

Nota: Era possibile ricavare la forma di tale vettore direttamente dall'applicazione del teorema 3.1.

Con questi due vettori nulli non ortogonali possiamo costruire l'operatore di proiezione sul sottospazio ortogonale alla congruenza di curve individuata da  $k_a$ .

$$h_{ab} = g_{ab} + k_a N_b + N_a k_b \quad (3.86)$$

che, sempre in base alla metrica 3.52, possiamo esprimere esplicitamente nella forma:

$$[h_{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Da cui possiamo vedere che il sottospazio individuato è quello delle 2-sfere ed è bidimensionale. Ciò è dovuto al fatto che la congruenza di curve è nulla.

I valori di *expansion*, *shear*, *rotation* assumono il significato fisico di *expansion*, *shear*, *rotation* della metrica ortogonale a  $k^a$

$$h_a^c h_b^d k_{c;d} = \Theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.88)$$

Dove nel nostro caso abbiamo solamente:

$$h_a^c h_b^d k_{c;d} = \frac{1}{2} \nabla_l k_l h_{ab} = \frac{1}{r} h_{ab} \quad (3.89)$$

---

<sup>44</sup>Si faccia riferimento all'appendice F per il significato fisico degli scalari ottici per una congruenza nulla geodetica.

In tal modo possiamo anche riscrivere l'equazione F.11 giungendo alla conclusione che per uno spazio-tempo di Robinson-Trautman abbiamo:

$$\begin{aligned}\nabla_a k_b &= \frac{\nabla_p k^p}{2} h_{ab} + \theta k_a k_b + \alpha_a k_b + \beta_b k_a \\ &= \frac{1}{r} h_{ab} + \theta k_a k_b + \alpha_a k_b + \beta_b k_a\end{aligned}\tag{3.90}$$

Dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono vettori definiti da F.4 tali che  $k^a \alpha_a = N^a \alpha_a = k^a \beta = N^a \beta_a = 0$ .

### 3.5 Orizzonti ed estensioni complete della metrica di Vaidya

Possiamo utilizzare i campi vettoriali nulli  $k^a$  ed  $N^a$ , che abbiamo trovato nella sezione precedente (3.4), anche per studiare la struttura causale dello spazio-tempo di Vaidya. Infatti, essi sono i vettori nulli che racchiudono il cono di luce in ogni punto dello spazio-tempo<sup>45</sup>. Dalla loro espressione esplicita 3.70 e 3.85:

$$k = k^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial r} \quad N = N^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial u} + \left( \frac{2m(u)}{r} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial r} \quad (3.91)$$

possiamo dedurre che il campo vettoriale  $k^a$  è costante nella direzione radiale, mentre  $N^a$  ha componente radiale dipendente dalla funzione

$$\left( \frac{2m(u)}{r} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.92)$$

che è positiva per  $r < 2m(u)$ , negativa per  $r > 2m(u)$  e nulla per  $r = 2m(u)$ .

Seguendo queste considerazioni abbiamo riportato in un diagramma  $u$ - $r$  il comportamento qualitativo dei coni di luce nel caso di massa decrescente 3a (spazio-tempo di Vaidya) e per paragone, di massa costante 3b (spazio-tempo di Schwarzschild) nelle coordinate nulle di Eddington-Finkelstein.

Possiamo subito notare che sull'iper-superficie  $r = 2m(u)$ , dato l'annullarsi della componente lungo  $r$  del campo vettoriale  $N^a$ , i coni di luce hanno vertice ad angolo retto. Ciò fa sì che, per una situazione nella quale si ha  $dm/du < 0$ , la stessa iper-superficie  $r = 2m(u)$  (disegnata come una linea tratteggiata nel diagramma di figura 3a) giaccia al di fuori di tale cono e sia dunque una iper-superficie di tipo spazio nel passato della regione  $r > 2m(u)$ .

Ciò poteva anche essere dedotto, come fatto da Lindquist e Schwartz [14], dalla proiezione della metrica 3.52 sull'iper-superficie  $r = 2m(u)$ :

$$\begin{aligned} r = 2m(u) &\longrightarrow dr = 2 \frac{dm}{du} du \\ ds_{r=2m(u)}^2 &= -2 \frac{dm}{du} du^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi) \end{aligned} \quad (3.93)$$

---

<sup>45</sup>Ciò può anche essere visto dal fatto che i campi vettoriali  $k^a$  e  $N^a$  sono, rispettivamente, i campi vettoriali tangenti alle geodetiche nulle entranti e uscenti, ottenibili ponendo  $ds = d\theta = d\phi = 0$  in 3.52.

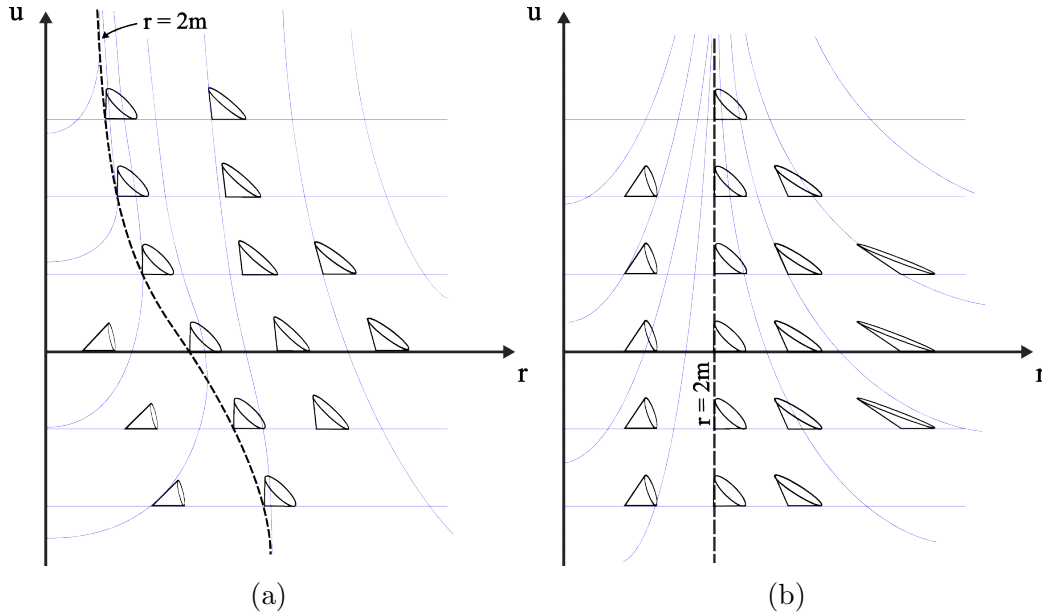


Figure 3: **struttura causale per lo spazio-tempo di Vaidya (3a) e di Schwarzschild (3b)**: nella figura è presentata la struttura causale dello spazio-tempo di Vaidya in un diagramma  $u$ - $r$  nel caso in cui la funzione di massa  $m(u)$  sia decrescente (3a) o costante (3b) nelle coordinate nulle di Eddington-Finkelstein con coordinate angolari  $\theta$  e  $\phi$  sopresse. La funzione di massa è rappresentata dalla linea tratteggiata sulla quale è anche indicata la funzione  $r = 2m(u)$  e la struttura causale è indicata tramite la forma dei coni di luce disegnati nelle due regioni dello spazio divise dalla curva  $r = 2m(u)$ . Nei diagrammi sono anche indicate in blu chiaro le geodetiche entranti e uscenti, le ultime corrispondono alle linee orizzontali nei disegni.

dove, se prendo  $\frac{dm}{du} < 0$ , abbiamo una metrica con segnatura  $(+, +, +)$ . Ovvero una metrica descrivente un'iper-superficie di tipo spazio. Se avessimo avuto, invece, una funzione di massa crescente  $dm/du > 0$  l'iper-superficie  $r = 2m(u)$  sarebbe stata di tipo tempo e ovviamente nel caso di massa costante ( $dm/du = 0$ ) la superficie sarebbe stata nulla bidimensionale (figura 3b).

Dal confronto tra la struttura causale dei due spazi-tempi raffigurati in 3a e 3b possiamo identificare l'orizzonte  $r = 2m(u)$  dello spazio-tempo di Vaidya con quello in  $r = 2m$  dello spazio-tempo di Schwarzschild<sup>46</sup>.

<sup>46</sup>Lo spazio-tempo di Schwarzschild possiede, infatti, due orizzonti degli eventi, e ciò lo si può vedere bene nel sistema di coordinate di Kruskal che le contiene entrambe al suo interno. Usando le coordinate di Kruskal un'orizzonte si trova in  $r = 2m$  a  $T = +\infty$

L'orizzonte degli eventi in 3b è quello della soluzione di Schwarzschild corrispondente al caso di un *white-hole*, che è infatti la parte di varietà descritta dalle coordinate di Eddington-Finkelstein ritardate, che sono proprio quelle in cui stiamo esprimendo la metrica considerata (si veda appendice B). Infatti, possiamo vedere lo spazio-tempo Vaidya anche come la generalizzazione al caso di presenza di “radiazione pura” di un *white-hole*.

Però, mentre nel caso statico l'orizzonte degli eventi e quello apparente<sup>47</sup> coincidono (e sono entrambe in  $r = 2m$ ), nel caso dinamico, quello di Vaidya, essi sono distinti. Infatti, l'orizzonte degli eventi resta un ipersuperficie nulla, mentre quello apparente può essere di tipo tempo o di tipo spazio a dipesa del fatto che la derivata della funzione di massa rispetto alla coordinata nulla  $\frac{dm}{du}$  sia, rispettivamente, positiva o negativa.

Dal diagramma 3a possiamo anche notare come sia impossibile per una particella che segue una traiettoria di tipo tempo e che parte dalla regione  $r > 2m(u)$  attraversare l'orizzonte e finire in  $r < 2m(u)$ . Ciò significa che la fonte del campo gravitazionale di tale spazio-tempo non può essere stata generata da degli oggetti che nel passato si trovavano nella regione  $r > 2m(u)$ . Seguendo questo ragionamento Lindquist e Waug [14] conclusero che la regione  $r \leq 2m(u)$  fosse, in principio, fisicamente impossibile da realizzare e dunque la sua trattazione fosse solamente una questione matematica. Ad oggi si pensa invece che tali superfici si possano venire a creare, anche se in altri modi e il loro studio ha assunto anche importanza fisica.

Resta il fatto che, nel sistema di coordinate nulle di Eddington-Finkelstein ritardate, l'orizzonte degli eventi per le geodetiche nulle entranti è mappato all'infinito (si veda 3a)<sup>48</sup>. Sarebbe dunque necessario, al fine di studiare

---

(e corrisponde all'orizzonte degli eventi di un *black-hole*) e uno sempre in  $r = 2m$ , ma  $T = -\infty$  (e corrisponde all'orizzonte degli eventi di un *white-hole*).

<sup>47</sup>Per la nostra trattazione possiamo considerare le due definizioni:

**Definizione 3.2** (Orizzonte degli eventi). *Un orizzonte degli eventi è il confine oltre il quale gli eventi non possono influenzare un osservatore.*

**Definizione 3.3** (Orizzonte apparente). *Un orizzonte apparente è il confine che divide i raggi di luci diretti esternamente e che si muovono esternamente e i raggi di luce che sono diretti esternamente e si muovono verso l'interno.*

Si faccia riferimento a [9] per una definizione più formale di tali oggetti.

<sup>48</sup>Anche se una geodetica nulla entrante può raggiungere l'orizzonte degli eventi in un lasso di tempo proprio finito esso viene mappato all'infinito, in figura 3a possiamo vedere come le geodetiche nulle entranti divergono più si avvicinano all'orizzonte  $r = 2m(u)$ .



tale ipersuperficie, introdurre un sistema di coordinate che la includa al suo interno (ovvero che mappi in una regione interna l'iper-superficie  $r = 2m(u)$  ad  $u = \infty$ ) e che permetta di seguire le linee di mondo delle particelle nulle che la attraversano<sup>49</sup>. Un tale sistema di coordinate, che rende tra l'altro la metrica di Vaidya completa, fu introdotto da Israel nel 1967 [11], proprio in risposta alla richiesta alla sopracitata pubblicazione fatta da Lindquist e Waug due anni prima [14].

Da [11], l'estensione massimale dello spazio-tempo di Vaidya prevede di eseguire il seguente passaggio di sistema di coordinate:

$$(u, r, \theta, \phi) \longrightarrow (u, v, \theta, \phi) \quad (3.94)$$

dove  $v$  è legata alle prime coordinate mediante le relazioni<sup>50</sup>

$$\begin{aligned} r &= Uv + 2m(u) \\ U(u) &= \int_0^u \frac{1}{4m(\zeta)} d\zeta \end{aligned} \quad (3.95)$$

La metrica in queste nuove coordinate diviene:

$$ds^2 = \left[ \frac{v^2}{2m(u)r} + \frac{4}{U} \frac{dm}{du} \right] du^2 + 2dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (3.96)$$

Che è valida per  $u, v \in (-\infty, +\infty)$ , ed è coincidente con la metrica di Vaidya per  $u \in (0, +\infty)$ .

Una criticità di tale estensione, riconosciuta da Israel stesso [11] è che: un osservatore in una regione di spazio lontana non ha comunque la possibilità di sapere quale sia la funzione di massa  $m(u)$  oltre a  $u = +\infty$ , proprio perché è celata da un orizzonte degli eventi.

Questo fatto implica che l'estensione della metrica di Vaidya non sia unica. In realtà, tale considerazione la si potrebbe applicare anche all'estensione di Kruskal della soluzione di Schwarzschild, per esempio il fatto che lo spazio

---

<sup>49</sup>Questa evenienza è tutt'altro che sorprendente, la medesima situazione si verifica, infatti, anche per lo spazio-tempo di Schwarzschild e veniva risolta introducendo il sistema di coordinate di Kruskal. Si veda [8] o [23] per una spiegazione completa del fenomeno.

<sup>50</sup>Il cambiamento di coordinate riguarda ovviamente tutto il sistema di coordinate, una maniera più precisa per scriverlo dovrebbe essere  $(u, r, \theta, \phi) \longrightarrow (u', v, \theta', \phi')$ , però, poiché nell'intersezione dei domini dei due sistemi di coordinate abbiamo  $u = u', \theta = \theta', \phi = \phi'$  allora possiamo, con un abuso di notazione chiamate le coordinate primarie con quelle non primarie, come abbiamo fatto in 3.94.

fosse vuoto anche nella regione di spazio oltre l'orizzonte è solo una supposizione che non può essere verificata da un osservatore al di fuori di tale orizzonte [8].

Come fatto poi notare poi da Fayos, Martin-Prats e Senovilla [6], anche se l'estensione di Israel è tutt'altro che unica l'ambiguità di tale estensione si riduce alla mera scelta della funzione di massa  $m(u)$  oltre l'orizzonte.

— **Diagrammi di Penrose per le estensioni più semplici** —

Seguendo quanto riportato nel lavoro fatto da Fayos, Martin-Prats e Senovilla [6] possiamo iniziare lo studio globale sullo spazio-tempo di Vaidya disegnando il diagramma di Penrose per tale spazio nelle coordinate nulle di Eddington-Finkelstein (figura 4).

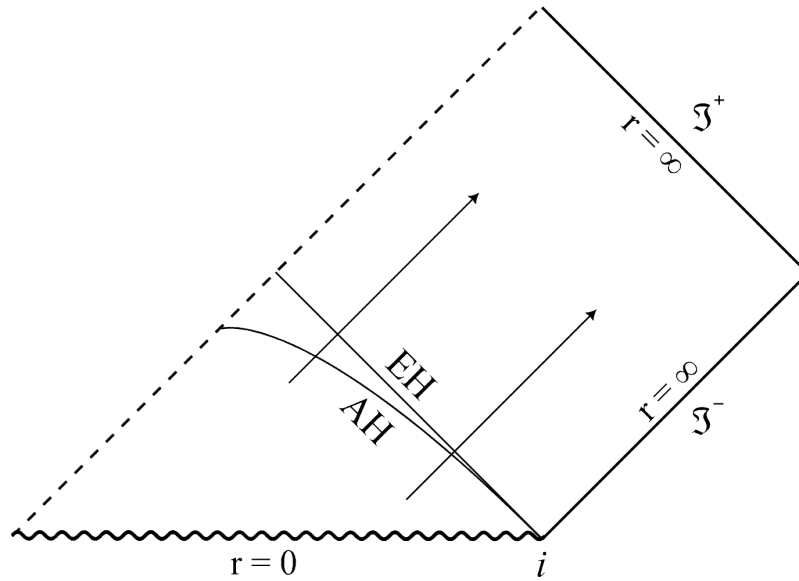


Figure 4: **diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Vaidya:** Nella figura è rappresentato il diagramma di Penrose per la regione di spazio-tempo di Vaidya descritta dalle coordinate di Eddington-Finkelstein. Il diagramma è simile a quello di Schwarzschild [8], a parte per la questione della separazione dell'orizzonte apparente (AH) e quello degli eventi (EH). La singolarità in  $r = 0$  è indicata con una linea ondeggiata e gli infiniti nulli in  $r = \infty$  con delle linee continue e le lettere "T" maiuscole. Le frecce indicano il verso della radiazione (uscente). Come lo spazio-tempo di Schwarzschild esso necessita di un'estensione oltre alla linea tratteggiata.

In tale diagramma (figura 4) possiamo notare come valgano tutte le con-

siderazioni fatte precedentemente: l'orizzonte degli eventi è distinto da quello apparente (la quale forma dipenderà dalla particolare funzione di massa  $m(u)$ ) e il diagramma è incompleto nel senso che necessita di un'estensione oltre la zona tratteggiata. La funzione di massa infatti non è più definita oltre tale zona.

Tale diagramma (figura 4), a parte la questione degli orizzonti, è essenzialmente simile alla parte di diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Schwarzschild rappresentante un *white-hole* [8].

Alcune delle estensioni più semplici della metrica di Vaidya sono quelle che prevedono di continuare il diagramma di Penrose di figura 4 oltre l'orizzonte con uno spazio-tempo di Schwarzschild (figura 5b) oppure con uno spaziotempo simmetrico alla parte che ho già (figura 5a) dove riporto simmetricamente lo spazio-tempo per  $u > 0$  in  $u < 0$ . Che non è altro che quanto fatto per l'analoga estensione di Kruscal della soluzione di Schwarzschild.

Possiamo anche considerare la soluzione di Vaidya come uno spazio-tempo descrivente una situazione transitoria del nostro universo. Per esempio, se stiamo descrivendo lo spazio esterno ad una stella, si possono verificare due scenari:

- La stella continuando a radiare si riduce di dimensione fino ad un raggio inferiore all'orizzonte apparente, ed in quel caso lo spazio-tempo finale è quello di Schwarzschild (figura 6a).
- la materia che compone la stella si esaurisce prima che possa rientrare nel caso precedente e lo spazio finale è quello piatto di Minkowski (figura 6b).

Il diagramma di Penrose sarà dunque composto, come possiamo vedere nelle figure 6a e 6b, "incollando" lo spazio-tempo di Vaidya a quello Minkowsky o a quello di Schwarzschild da un certo tempo in poi.

Risultati interessanti sono anche stati ottenuti nel caso di metrica di Vaidya descrivente pura radiazione entrante. Come visto alla fine della sezione 3.2 la metrica per questo spazio-tempo può essere ottenuta mediante l'inversione  $u \rightarrow -u$ . La dinamica di spaziotempi piatti nel quale converge radiazione è stata studiata approfonditamente da Papapetrou (1985) ed ha portato ad alcuni risultati interessanti. Come, per esempio il fatto che, dipendentemente solamente dalla densità della massa che si concentra si ha o meno la possibilità della creazione di *singularità naked* o anche *singularità*

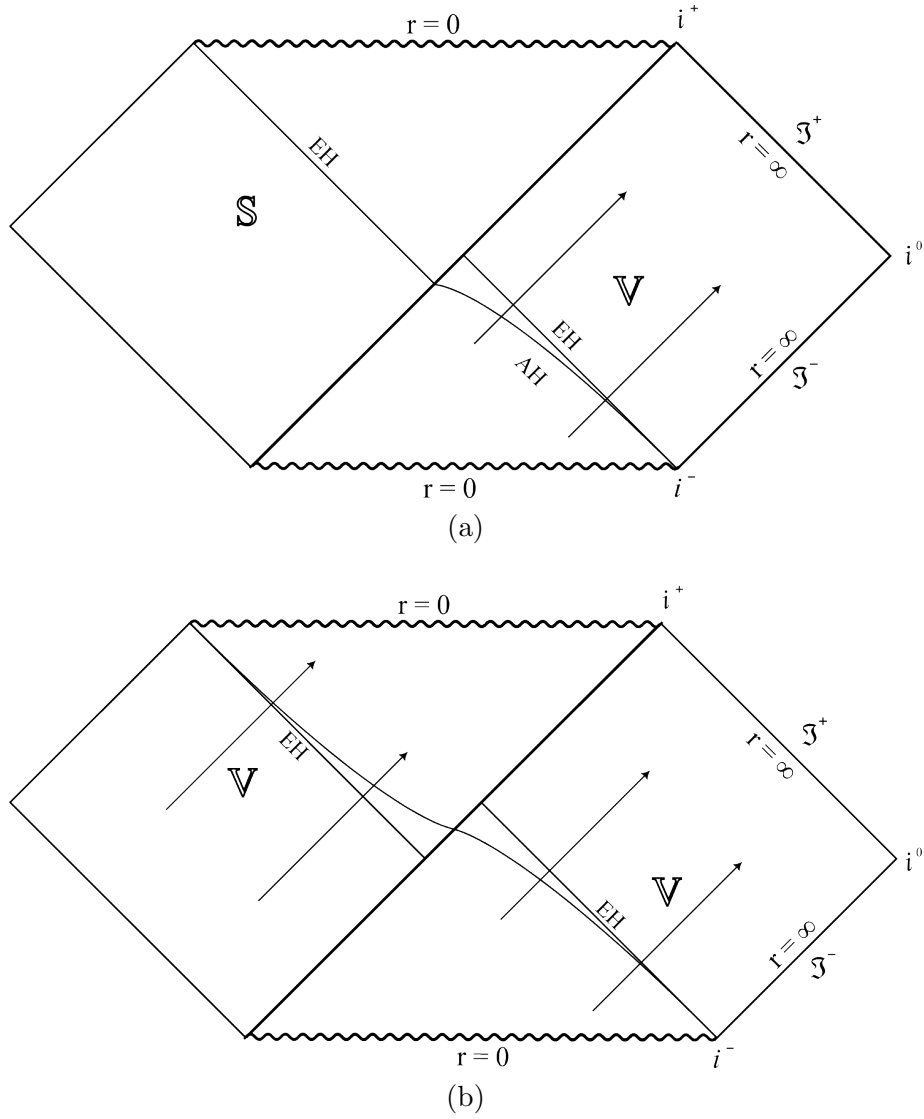


Figure 5: **Diagrammi di Penrose per le estensioni di Vaidya con Schwarzschild (5a) e simmetrica (5b)**: nella figura sono presentati i diagrammi di Penrose per le estensioni dello spazio-tempo di Vaidya (figura 4) con uno spazio-tempo di Schwarzschild 5a e con uno spazio-tempo di Vaidya specchiato 5b. Gli infiniti nulli sono indicati con le lettere “I” maiuscole, mentre gli infiniti di tipo spazio o tempo con le lettere “i” minuscole ( $i^-$  infinito temporale passato,  $i^+$  infinito temporale futuro,  $i^0$  infinito spaziale). Le frecce indicano il verso della radiazione. Il primo caso (5a) corrisponde alla continuazione della funzione  $m(u)$  con una funzione  $m(u) = \text{const}$  oltre l’orizzonte, il secondo (5b) alla continuazione della funzione  $m(u)$  oltre l’orizzonte con  $-m(u)$ . La parte a sinistra del diagramma di Penrose 5b può essere interpretata come un buco nero nel quale converge la *radiazione pura* circostante.

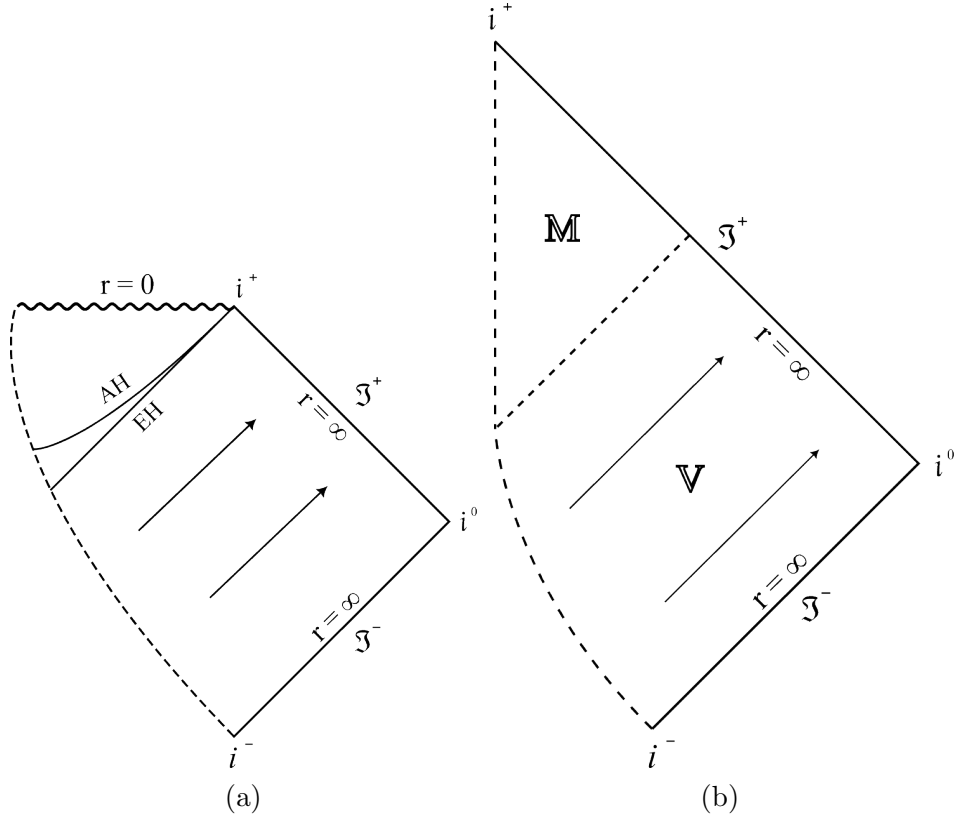


Figure 6: **Diagramma di Penrose di collasso gravitazionale di uno spazio-tempo di Vaidya (6a) e di evaporazione completa di massa tramite radiazione pura (6b)**: Nella figura vengono presentati due casi di evoluzione dinamica dello spazio-tempo di Vaidya. Gli infiniti nulli sono indicati con le lettere “I” maiuscole, mentre gli infiniti di tipo spazio o tempo con le lettere “i” minuscole ( $i^-$  infinito temporale passato,  $i^+$  infinito temporale futuro,  $i^0$  infinito spaziale). Le frecce indicano il verso della radiazione. Nel caso “collasso gravitazionale” 6a lo spazio-tempo di Vaidya (V) collassa a causa della diminuzione del raggio della stella entro il raggio di Schwarzschild (S) e quello di “evaporazione completa della massa” 6b, dove tutta la massa viene convertita completamente in radiazione in un tempo finito e lo spazio finale è quello piatto di Minkowski (M).

*localmente naked* [15] . Approfondimenti su altre estensioni o utilizzi della metrica di Vaidya possono essere trovati per sommi capi in [8].

## 3.6 Alcune generalizzazioni

Di seguito alcune generalizzazioni dello spazio-tempo di Vaidya al caso con carica non nulla ( $Q \neq 0$ ) e momento angolare non nullo ( $\omega \neq 0$ ). Tali generalizzazioni possono equivalentemente essere viste come le generalizzazioni al caso di presenza di *radiazione pura* delle note soluzioni di Reissner-Nordström (caso di carica non nulla) e di Kerr (caso di momento angolare non nullo). Esse possono essere trovate risolvendo le equazioni di Einstein a partire da un elemento di linea a simmetria sferica (o assiale nel caso di momento angolare non nullo) e imponendo che il tensore energia impulso sia della forma di pura radiazione 3.62. Oppure, se ci si trova in un sistema di coordinate del tipo  $(u, r, \theta, \phi)$  dove  $u$  è una coordinata nulla ed  $r$  è allineata al vettore di flusso del tensore energia impulso di *radiazione pura*, si può provare a far dipendere la massa dalla coordinata nulla

$$m \longrightarrow m(u)$$

ed indagare se la soluzione così trovata sia del tipo *radiazione pura*, definizione 2.1.

Per entrambe le metriche ottenute analizzeremo brevemente gli scalari ottici del vettore di flusso energetico  $k^a$ , come fatto per lo spazio-tempo di Vaidya in 3.4.

### 3.6.1 generalizzazione a carica non nulla

Una prima estensione della metrica di Vaidya è quella al caso di carica non nulla trattato per la prima volta in da K.D. Krori e J. Barua nel 1974 [12]. Il metodo da loro adoperato è quasi del tutto uguale a quello usato da Vaidya per la derivazione della sua metrica [20], riportato anche in 3.1.

Il sistema fisico descritto in questo caso è lo spazio-tempo esterno ad un corpo a simmetria sferica centrale carico irradiante *radiazione pura* e con campo elettromagnetico statico dovuto alla carica del corpo centrale.

Agendo direttamente sul tensore energia impulso possiamo crearne uno adatto al sistema che vogliamo descrivere sommarci la parte elettromagnetica dovuta al campo di una carica puntiforme:

$$\begin{aligned} T_{ab} &= [T_{ab}]_{\text{radiazione pura}} + [T_{ab}]_{\text{elettromagnetico}} = \\ &= \Psi k_a k_b + [T_{ab}]_{em} \end{aligned} \tag{3.97}$$

Dove  $[T_{ab}]_{em}$  è ricavato mediante l'equazione A.7, dove per  $F_{ab}$  si è preso il campo elettromagnetico risultante da una carica puntiforme centrale in coordinate sferiche, ovvero<sup>51</sup>

$$F_{12} = F_{21} = \frac{q}{r^2}. \quad (3.100)$$

Partiamo, come fatto per la derivazione della metrica di Vaidya (sezione 3.1), dall'elemento di linea 3.2. Riprendiamo, inoltre le considerazioni eseguite sul vettore nullo  $k^a$  che hanno portato a 3.5.

Definiamo ora  $E := \frac{q^2}{r^2}$ , in tal modo le componenti del tensore energia impulso assumono la seguente forma:

$$\begin{cases} T_0^0 = \rho k^0 k_0 + \frac{E}{2} \\ T_1^1 = \rho k^1 k_1 + \frac{E}{2} \\ T_0^1 = \rho k^1 k_0 \\ T_2^2 = T_3^3 = -\frac{E}{2} \end{cases} \quad (3.101)$$

Otengo dunque delle equazioni di campo molto simili a quelle trattate in 3.1 che possono essere risolte tramite gli stessi procedimenti.

Analogamente a quanto fatto in 3.12, poniamo:

$$e^{-\lambda} := \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{2r^2} \right). \quad (3.102)$$

Da una delle equazioni di campo otteniamo, anche nel caso di carica centrale, l'equazione 3.17 :

$$e^\nu = - \left( \frac{\dot{m}}{m'} \right) e^\lambda. \quad (3.103)$$

---

<sup>51</sup>il tensore di Faraday 3.100 corrisponde al vettore potenziale

$$A_1 = \frac{1}{r} \quad (3.98)$$

e ad un campo elettrico con componente radiale:

$$E = \frac{q^2}{r^2}. \quad (3.99)$$



Questa volta, però, l'equazione differenziale che risulta dal porre  $\lambda$  e  $\nu$  in base alle definizioni 3.102 e 3.103 nelle equazioni di campo è

$$\left(\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{m''}{m'}\right) \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{2r^2}\right) = \frac{2m}{r^2} \quad (3.104)$$

che è analoga all'equazione 3.19, solamente con in aggiunta il termine di carica.

Possiamo risolvere l'equazione 3.104 nella stessa maniera in cui abbiamo risolto 3.19 in 3.1. Il suo integrale primo è:

$$m' \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{2r^2}\right) = f(m) . \quad (3.105)$$

Otteniamo dunque l'elemento di linea per lo spazio-tempo di Vaidya generalizzato al caso di carica non nulla ponendo le condizioni 3.102, 3.103 e 3.105 per l'elemento di linea 3.2

$$ds^2 = \frac{\dot{m}^2}{f^2} \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{2r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{2r^2}\right)^{-1} dr^2 + \\ - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.106)$$

con:

$$m' \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{2r^2}\right) = f(m) \quad (3.107)$$

Definendo ora la coordinata nulla  $u$  analoga a quella nulla per Vaidya data in 3.64, però con l'aggiunta del termine di carica:

$$du = - \left(dr + \frac{\dot{m}}{m'} dt\right) \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{2r^2}\right) \quad (3.108)$$

possiamo passare alle coordinate nulle di Eddington-Finkelstein e la metrica assume la forma più compatta:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(u)}{r} + \frac{q^2}{2r^2}\right) du^2 + 2dudr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.109)$$

che è analoga alla metrica 3.52 presentata in 3.2.

Nel 1990 S. Chatterjee usò lo stesso approccio di Krori e Barua per generalizzare la metrica di Vaidya carica al caso di spazio-tempo n-dimensionale [4].

Un'altra maniera per giungere all'estensione della metrica di Vaidya al caso carico è quello di partire dalla caratterizzazione dell'elemento di linea. Infatti, se poniamo che uno spazio può ammettere un vettore *nullo, geodetico, shear-free, twist-free* e con *expansion*  $\propto 1/r$  non stiamo escludendo il caso carico. Lo spazio descritto è sempre uno spazio-tempo di Robinson-Trautman (definito in 3.1) caratterizzato dallo stesso vettore nullo  $k^a$  (3.70) che caratterizzava lo spazio-tempo di Vaidya (si veda la sezione 3.4).

Un termine  $\propto \frac{1}{r^2}$  può infatti essere introdotto nel parametro  $H$  della metrica 3.81 (della definizione 3.1) ottenendo dunque uno spazio-tempo di pura radiazione con una componente aggiuntiva del tensore energia impulso riconducibile al campo elettrico dovuto alla carica centrale. Per vedere questo fatto si può far riferimento alla similitudine con la metrica 3.109.

### 3.6.2 generalizzazione a rotazione non nulla

Questo caso risulta formalmente diverso da quelli trattati fin'ora. Al contrario degli spazi-tempi di Vaidya con o senza carica, non rotanti, il vettore nullo geodetico  $k^a$  del tensore energia impulso  $T_{ab} = \Psi k^a k^b$  del campo di pura radiazione non necessita di essere *shear-free*.

Una prima generalizzazione al caso di momento angolare non nullo fu trovata dallo stesso Vaidya in collaborazione con L.K. Patel [22]. Per derivare tale metrica venne adoperato un formalismo sviluppato da Vaidya stesso e venne sfruttato il fatto che nella forma di Kerr-Schild il tensore metrico possa essere espresso nella forma

$$g_{ab} = \eta_{ab} + H k_a k_b \quad (3.110)$$

con  $k_a$  un vettore geodetico nullo. In tal modo si può derivare una metrica con tensore di Ricci del tipo di pura radiazione, che riportiamo di seguito per referenza:

$$R_{ab} = -\frac{3mb}{a^2 U^5} k_a k_b \quad (3.111)$$

dove  $b$  è un parametro legato all'intensità della radiazione e si riduce a zero nel caso in cui non vi è più radiazione, ovvero nel vuoto, riportandoci alla metrica di Kerr<sup>52</sup>.

Un approccio più fisico e moderno (e soprattutto che non richiede l'introduzione di un nuovo formalismo come per [22]) a tale problema è stato fornito

---

<sup>52</sup>ovvero al caso di uno spazio-tempo esterno ad un oggetto rotante, non carico, a simmetria assiale.

da C. G. Bohmer e P. A. Hogan in [3]. Basandosi sul fatto che sia possibile ricavare la metrica di Vaidya partendo dall'elemento di linea di Schwarzschild nella forma di Kerr-Shild:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2m}{r} (k_a dX^a)^2 = g_{ab} dX^a dX^b \quad (3.112)$$

(dove  $[X^a] = [t, x, y, z]$ , mentre  $[k_a] = [-1, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}]$  è un vettore nullo con  $r := x^2 + y^2 + z^2$ ) e notando che

$$g_{ab} k^a X^b = \eta_{ab} k^a X^b = -t + r \quad (3.113)$$

Si può definire la coordinata nulla  $u := t - r$  in modo che

$$u_{,a} = -k_a \quad (3.114)$$

A questo punto possiamo imporre la dipendenza della massa  $m$  dell'elemento di linea 3.112 da tale parametro e ottenere, come anticipato nella sezione 3.3, la metrica di Vaidya. Allora può essere tracciato un parallelismo e applicare la medesima procedura anche nel caso a simmetria assiale. Questa volta si parte dalla metrica:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + 2H k_a k_b \quad (3.115)$$

dove  $H$  è una funzione data da

$$H = \frac{mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \quad (3.116)$$

e il vettore  $k_a$  ha componenti

$$[k_a] = \left[ -1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r} \right] \quad (3.117)$$

con, questa volta,  $r$  definito implicitamente dall'equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \quad (3.118)$$

Allo stesso modo di prima si ha che

$$g_{ab} k^a X^b = \dots = -t + r \quad (3.119)$$

Possiamo, dunque, definire la coordinata nulla  $u := t - r$  e considerare la metrica 3.115 dove, questa volta, sia la funzione di massa che  $a$  dovranno

dipendere da  $u$ :  $m \rightarrow m(u)$  ed  $a \rightarrow a(u)$ . Così facendo ricavo una nuova metrica, più generale, che si riduce alla metrica Kerr nel momento nel quale  $m$  ed  $a$  non dipendano più da  $u$ . Il tensore energia impulso per la suddetta metrica viene ricavato sempre in [3] e risulta essere composto da due parti:

$$T^{ab} = t_{(1)}^{ab} + t_{(2)}^{ab} = -\frac{2\dot{m}}{r^2} k^a k^b - \frac{3\dot{m}a}{r^3} (k^a \lambda^b + k^b \lambda^a) \quad (3.120)$$

Dove il vettore  $\lambda^a$  è perpendicolare alla direzione spaziale del vettore  $k^a$  ed è scrivibile con le componenti  $[\lambda^a] = [0, \frac{y}{r}, -\frac{x}{r}, 0]$ . La componente  $t_{(1)}$  rappresenta il flusso lungo le geodetiche nulle uscenti dal corpo centrale (e dirette verso l'infinito nullo), mentre la componente  $t_{(2)}$  rappresenta il flusso di momento angolare, sempre lungo le geodetiche uscenti.

Possiamo vedere come  $k_i$  del tensore energia impulso questa volta abbia:

- **Expansion** pari a:

$$\Theta = \frac{1}{2} k_{,a}^a = \frac{2r^3 - a\dot{a}r(r^2 - z^2)}{D} \quad (3.121)$$

- **twist** nulla. Derivante dal fatto che  $k^a$  resta geodetico e tramite una diretta applicazione del teorema di Frobenius posso dire che  $\omega = 0$ .
- **shear** non nulla, con valore

$$\sigma^2 = \frac{a^2 \dot{a}^2 (r^2 - z^2)}{4D} \quad (3.122)$$

dove  $D$  è stato definito come:

$$D = r^4 + a^2 z^2 - a\dot{a}r(r^2 - z^2) \quad (3.123)$$

Una maniera più completa di trattare gli spazi-tempi di radiazione pura nel caso di rotazione non nulla è, come per i casi precedenti, quello di partire dalla caratterizzazione covariante dell'elemento di linea. In [18] vengono analizzati esaurientemente tutte le possibilità e vengono distinti i vari casi in base al fatto che  $\omega$  e  $\sigma$  (*twist e shear*) siano o no nulli.

## 4 Conclusioni

Dopo aver definito e interpretato cosa si intende per campo di “*radiazione pura*” (sezione 2), abbiamo analizzato la costruzione dello spazio-tempo di Vaidya a partire dal tensore energia impulso di *radiazione pura* (sezione 3.1). Ne abbiamo fornito un’interpretazione fisica e discusso di come il passaggio al sistema di coordinate nulle di Eddington-Finkelstein estenda la soluzione di Vaidya alla regione di spazio  $r < 2m$  (sezione 3.2), restando tuttavia incompleta (sezione 3.3). In questo sistema di coordinate abbiamo poi calcolato gli scalari ottici del vettore nullo geodetico  $k^a$  del tensore energia impulso di *pura radiazione*  $T^{ab} = \Psi k^a k^b$ , verificando che esso è *shear-free*, *twist-free* e con *expansion* =  $1/r$ . In tal modo abbiamo potuto far rientrare lo spazio-tempo di Vaidya nella classe di spazi-tempi di pura radiazione di Robinson-Trautman (sezione 3.4).

Abbiamo anche fornito alcune semplici estensioni complete della metrica di Vaidya per le quali abbiamo eseguito uno studio degli orizzonti apparenti e fornito i diagrammi di Penrose (sezione 3.5).

Infine, abbiamo fornito la generalizzazione dello spazio-tempo di Vaidya al caso di carica non nulla e rotazione non nulla (sezione 3.6). Il primo caso rientra nella classe di spazitempi di Robinson-Trautman, mentre il secondo no. Ciò è dovuto al non annullarsi dello scalare ottico di shear del vettore di flusso energetico  $k^a$ .

## A Formalizzazione elettromagnetismo

Le formule dell'elettromagnetismo classico possono essere poste comodamente nel formalismo quadri-vettoriale, dove non solo assumono una forma più elegante, ma acquistano significato aggiuntivo. Infatti, l'elettromagnetismo presenta una struttura più simmetrica nel formalismo quadri-vettoriale.

Per introdurre tale formalismo seguiremo l'approccio presente nel libro di Tolman [19]

Usando le coordinate galileiane:

$$x^0 = t \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad (\text{A.1})$$

In uno spazio-tempo piatto la metrica assume la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.2})$$

Introduciamo adesso il vettore corrente:

$$\begin{aligned} J^a &:= \rho_0 \frac{dx^a}{ds} \\ &= \rho_0 \left( \frac{dx^0}{ds}, \frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, \frac{dx^3}{ds} \right) \\ &= \rho_0 \left( \frac{dx^0}{ds}, \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^1}{dx^0}, \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^2}{dx^0}, \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^3}{dx^0} \right) \\ &= \rho_0 (1, u^x, u^y, u^z) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

e il vettore potenziale:

$$\phi^a := (\phi, A_x, A_y, A_z) \quad (\text{A.4})$$

dove nell'ultimo passaggio dell'equazione A.3 abbiamo usato il fatto che

$$\frac{ds}{dx^0} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (\text{A.5})$$

Applicando le trasformazioni di Lorentz a tali quadri-vettori A.3 A.4 possiamo vedere come questi si trasformino in accordo con una trasformazione tra sistemi inerziali nella teoria di Maxwell 3-dimensionale. A questo punto è possibile definire il tensore "elettromagnetico" completamente antisimmetrico:

$$F_{ab} := \frac{\partial\psi_a}{\partial x^b} - \frac{\partial\psi_b}{\partial x^a} \quad (\text{A.6})$$

e il tensore energia impulso elettromagnetico con la formula:

$$T^{ab} := \frac{1}{\mu_0} \left( F^{ac} F_c^b - \frac{1}{4} \eta^{ab} F_{cd} F^{cd} \right) \quad (\text{A.7})$$

È possibile mostrare come questo tensore energia impulso abbia le stesse caratteristiche del tensore energia impulso meccanico. Nel sistema di coordinate galileiane A.1 il tensore di Faraday A.6 e il tensore energia impulso elettromagnetico A.7 assumono la forma esplicita:

$$F^{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$T^{ab} = \begin{bmatrix} \rho & s_x & s_y & s_z \\ s_x & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ s_y & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ s_z & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

dove ho definito:

- densità di energia del campo elettromagnetico:

$$\rho = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \quad (\text{A.10})$$

che rappresenta la densità di energia di campo elettromagnetico presente in una certa zona  $\rho = \rho(\vec{r})$ .

- Vettore di Pointing:

$$\vec{s} = c \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right] \quad (\text{A.11})$$

che rappresenta il flusso di energia associato alla propagazione del campo elettromagnetico.

- Tensore degli stress di Maxwell:

$$\sigma_{ab} = E_a E_b + B_a B_b - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{ab} \quad (\text{A.12})$$

(dove  $\delta_{ab}$  è la delta di Kronecker) Che rappresenta l'interazione tra le forze elettromagnetiche e il momento meccanico. In coordinate cartesiane possiamo dare un'interpretazione fisica immediata alle componenti sulla diagonale che vengono dette *componenti di pressione* e a quelle fuori dalla diagonale dette *componenti di shear*.

Possiamo concludere la nostra analogia con i sistemi meccanici ponendo che per un sistema meccanico-elettrodinamico le equazioni del moto e di continuità sono date dall'equazione

$$\frac{\partial T^{ab}}{\partial x^b} = \frac{\partial}{\partial x^b} ([T^{ab}]_{me} + [T^{ab}]_{em}) \quad (\text{A.13})$$

dove  $[T^{ab}]_{me}$  sta per tensore energia impulso meccanico e  $[T^{ab}]_{em}$  sta per tensore energia impulso elettromagnetico.



## B Coordinate nulle

Nello spazio-tempo una "base ortonormale", detta anche "sistema Lorenziano"  $\{E_\alpha\}$  consiste in 3 vettori di tipo spazio  $E_i$  (con  $i = 1, 2, 3$ ) e uno di tipo tempo  $E_0 := t$  tali che:

$$\begin{aligned} \{E_\alpha\} &= \{E_i, t\} = \{t, x, y, z\} \quad t.c \\ E_a * E_b &= \sigma_{ab} \quad t * t = -1 \quad E_a * t = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

ed in tale sistema di coordinate ovviamente si ha:

$$g_{ab} = -t_a t_b + x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \quad (\text{B.2})$$

Spesso vengono anche introdotte le coordinate nulle complesse composte dai vettori nulli  $k$  e  $l$  e dai vettori nulli complessi  $m$  e  $\bar{m}$  per i quali si ha che tutti i prodotti tra loro sono nulli a parte per:

$$u^a v_a = -1 \quad m^a \bar{m}_a = 1 \quad (\text{B.3})$$

In questo caso la metrica assume la forma:

$$g_{ab} = 2m_{(a} m_{b)} - 2u_{(a} v_{b)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Una tetrade ortonormale B.1 e una tetrade nulla B.3 possono essere legate nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}m &= E_2 - iE_3 \quad ; \quad \sqrt{2}\bar{m} = E_2 + iE_3 \\ \sqrt{2}k &= E_0 + E_1 \quad ; \quad \sqrt{2}l = E_0 - E_1 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

In uno spazio-tempo piatto ciò si traduce nelle relazioni:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y + iz) \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - iz) \\ u &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x) \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Infine è sempre possibile adoperare un sistema di coordinate miste, ovvero dove alcune delle coordinate sono nulle e altre di tipo spazio. Un caso utile è

quello delle coordinate miste  $(u, v, y, z)$  nella metrica Minkowschiana, definite a partire dalle coordinate cartesiane  $(t, x, y, z)$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x) \\ v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x) \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned} \tag{B.7}$$

Il cambiamento di coordinate inverso è invece:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v) \rightarrow dt = \frac{du+dv}{\sqrt{2}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v) \rightarrow dx = \frac{du-dv}{\sqrt{2}} \\ y &= y \rightarrow dy = dy \\ z &= z \rightarrow dz = dz \end{aligned} \tag{B.8}$$

È semplice mostrare come nella metrica piatta:

$$u^a u_a = v^a v_a = 0 \tag{B.9}$$

Ed eseguendo il cambiamento di coordinate  $(t, x, y, z) \rightarrow (u, v, y, z)$  la metrica piatta assume la forma:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

Nel capitolo 3.1 abbiamo usato per semplicità un sistema di coordinate misto  $(u, v, y, z)$  nelle quali le prime due coordinate son nulle e le ultime due sono ortonormali in modo che, oltre alle condizioni già riportate sopra:

$$u \cdot y = u \cdot z = v \cdot y = v \cdot z = 0 \tag{B.11}$$

In questo caso ho:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{B.12}$$

## C Coordinate di Eddington-Finkelstein

Un modo per estendere il dominio della soluzione di Schwarzschild è quello di usare un cambiamento di coordinate che sondi lo spazio-tempo tramite le geodetiche, in questo caso le geodetiche radiali nulle. Consideriamo la metrica di Schwarzschild nelle sue omonime coordinate (quelle di Schwarzschild  $(t, r, \theta, \phi)$ ):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{C.1})$$

Un approccio veloce per trovare le geodetiche radiali è quello di notare che per la simmetria sferica dello spazio-tempo di Schwarzschild la curva estrema per andare in due punti con altitudine diversa ( $r_1 < r_2$ ) è quella che segue la coordinata radiale. Dunque le geodetiche radiali sono quelle per le quali abbiamo  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ . Se poi vogliamo che tali geodetiche siano affinemente parametrizzate e nulle imponiamo la condizione  $g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 0$  che in questo caso diviene<sup>53</sup>:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0 \quad (\text{C.5})$$

---

<sup>53</sup> Un approccio più formale per trovare le geodetiche radiali sarebbe quello di passare per la lagrangiana  $L = g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b$ , dove  $\dot{x}^a := dx^a/d\lambda$  che, in questo caso è data esplicitamente da:

$$L = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (\text{C.2})$$

Le equazioni geodetiche possono essere trovate minimizzando l'azione, oppure adoperando direttamente le equazioni di Eulero Lagrange:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad (\text{C.3})$$

(con  $\sigma$  il parametro della curva) Applicando queste equazioni per  $a = 0, 1, 2, 3$  ottengo il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} &= k \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 &= 0 \\ r^2 \dot{\phi}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Ponendoci poi nel piano  $\theta = \pi/2$  e  $\dot{\phi} = 0$  ottengo di nuove l'equazione C.6.

dalla quale otteniamo:

$$\frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (\text{C.6})$$

la quale integrata fornisce le due equazioni esplicite per le traiettorie radiali (uscanti e entranti):

$$\begin{aligned} t &= r + 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| + p_1 \quad (\text{outgoing photon}) \\ t &= -r - 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| + p_2 \quad (\text{ingoing photon}) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Nelle coordinate di Shwarzshild dunque le traiettorie dei fotoni entranti risultano essere delle curve con pendenza  $-1$  quando siamo a  $r \rightarrow \infty$  che man mano che si avvicinano alla superficie  $r = 2m$  divergono a  $+\infty$ . Mentre quelle dei fotoni uscenti sono esattamente uguali, soltanto specchiate rispetto all'asse  $r$ .

Per giungere alle coordinate di Eddington-finkelstein dobbiamo porci sulle traiettorie di queste geodetiche nulle, in modo che un fotone entrante sia tale per cui una coordinata sia sempre costante. Per far ciò prendiamo l'equazione dei fotoni uscenti C.4 e usiamo  $p := p_1$  come nuovo parametro. In tal modo abbiamo:

$$\begin{aligned} q &= t - r - 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| \\ dp &= dt - \frac{r}{r - 2m} dr \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

che, sostituendo per  $dt$  nell'elemento di linea di Schwarzschild C.1 porta all'espressione della metrica di Schwarzschild detta "di Eddington-Finkelstein ritardata":

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dq^2 - 2dqdr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{C.9})$$

In realtà le coordinate di Eddington-Finkelstein ritardate sono quelle per le quali le traiettorie dei fotoni uscenti assumono la forma di linee rette con pendenza unitaria se posti in un grafico con le coordinate  $\theta$  e  $\phi$  soppresse. E dunque sarebbero le coordinate  $(t^*, r, \theta, \phi)$  dove:

$$t^* = q + r = t - 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| \quad (\text{C.10})$$

per distinguere i sistemi di coordinate  $(u, r, \theta, \phi)$  da quello  $(t^*, r, \theta, \phi)$  chiameremo il primo *sistema di coordinate nulle di Eddington-Finkelstein* e il secondo solamente *sistema di coordina di Eddington-Finkelstein*.

## D Calcolo del tensore di Ricci in un sistema di coordinate

Le formule usuali per il calcolo del tensore di Ricci a partire dalla metrica data in un sistema di coordinate passa inizialmente per il calcolo dei coefficienti di connessione (In questo modo la connessione è metrica):

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{dc,b} + g_{bd,c} - g_{bc,d}) \quad (\text{D.1})$$

Da cui è possibile costruire direttamente il tensore di curvatura di Riemann:

$$R_{abc}^d = \Gamma_{ac,b}^d - \Gamma_{ab,c}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d \quad (\text{D.2})$$

Infine, il tensore di Ricci è definito come la contrazione del tensore di Riemann nella sua prima e terza componente:

$$R_{ab} = R_{abc}^c \quad (\text{D.3})$$

Il tensore di Einstein viene poi definito nel seguente modo:

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \quad (\text{D.4})$$

che è legato dalle equazioni di Einstein al tensore energia impulso nella seguente maniera:

$$G_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad (\text{D.5})$$

## E Coefficienti di connessione e tensore di Ricci per la metrica 3.2

Riscriviamo di seguito la metrica 3.2:

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) . \quad (\text{E.1})$$

Secondo questo elemento di linea le componenti del tensore metrico e del suo inverso sono:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -e^\nu & g^{00} &= -e^{-\nu} \\ g_{11} &= e^\lambda & g^{11} &= e^{-\lambda} \\ g_{22} &= r^2 & g^{22} &= r^{-2} \\ g_{33} &= r^2 \sin^2(\theta) & g^{33} &= r^{-2} \sin^{-2}(\theta) . \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Dalla metrica possono essere ricavati direttamente i coefficienti di connessione mediante l'applicazione di D.1

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2} & \Gamma_{01}^0 &= \frac{\nu'}{2} & \Gamma_{11}^0 &= \frac{e^{\lambda-\nu}}{2} \dot{\lambda} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2} & \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda} & \Gamma_{33}^1 &= -re^{-\lambda} \sin^2\theta & \Gamma_{00}^1 &= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2} \nu' & & & & \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{32}^3 &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} . \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

E le componenti del tensore di Ricci calcolate in base ai coefficienti di connessione E.3 sono:

$$R_0^0 = e^{-\nu} \left[ -\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right] + e^{-\lambda} \left[ \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} \right] \quad (\text{E.4})$$

$$R_1^1 = e^{-\nu} \left[ -\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right] + e^{-\lambda} \left[ \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} \right] \quad (\text{E.5})$$

$$R_1^0 = e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (\text{E.6})$$

$$R_2^2 = R_3^3 = e^{-\lambda} \left( \frac{\nu' - \lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} . \quad (\text{E.7})$$

## F Scalari ottici per congruenze nulle

Consideriamo una congruenza geodetica nulla  $k^a$  in uno spazio-tempo pseudo-Riemanniano di dimensione 4:

$$\begin{cases} k^a k_a = 0 \\ k^a \nabla_a k_b = 0 \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

Da cui risulta anche che  $k^a \nabla_b k_a = 0$ . Chiamiamo  $\Sigma$  l'ipersuperficie di dimensione 3 generata dai vettori  $z^a$  ortogonali alla congruenza  $z^a k_a = 0$ . Scegliamo poi un altro vettore nullo  $N^a$  normalizzato imponendo la condizione  $N^a k_a = -1$  e denotiamo con  $\Sigma'$  l'ipersuperficie di dimensione  $n - 2$  generata dai vettori ortogonali ad entrambe  $k^a$  e  $N^a$ . Il proiettore sull'ipersuperficie  $\Sigma'$  può essere costruito mediante la seguente formula:

$$h_{ab} = g_{ab} + k_a N_b + N_a k_b \quad (\text{F.2})$$

Posso dunque riscrivere l'identità  $\nabla_a k_b = g_{ac} g_{bd} \nabla^c k^d$  come:

$$\begin{aligned} \nabla_a k_b &= g_{ac} g_{bd} \nabla^c k^d = \\ &= (h_{ac} - k_a N_c - N_a k_c) (h_{bd} - k_b N_d - N_b k_d) \nabla^c k^d = \\ &= (h_{ac} - k_a N_c) (h_{bd} - k_b N_d) \nabla^c k^d = \\ &= \rho_{ab} + \theta K_a k_b + \alpha_a k_b + \beta_b k_a \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Dove abbiamo già usato il fatto che  $h_{ab} k^a = h_{ab} N^a = 0$  e abbiamo definito i tensori:

$$\begin{cases} \rho_{ab} = h_a^c h_b^d \nabla_d k_c \\ \theta = N^a N^b \nabla_a k_b \\ \alpha_a = -h_a^c N^d \nabla_c k_b \\ \beta_b = -h_b^c N^d \nabla_d k_c \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

Notiamo inoltre che i vettori  $\alpha^a$  e  $\beta^a$  sono ortogonali a  $k^a$  e  $N^a$ :

$$\begin{cases} k^a \alpha_a = N^a \alpha_a = 0 \\ k^a \beta_a = N^a \beta_a = 0 \end{cases} \quad (\text{F.5})$$

La matrice  $\rho_{ab}$  prende il nome di *matrice ottica*. Che possiamo decomporre in parte simmetrica e antisimmetrica:

$$\rho_{ab} = \rho_{(ab)} + \rho_{[ab]} \quad (\text{F.6})$$



E possiamo identificare la parte antisimmetrica con il nome di *twist matrix*:

$$\omega_{ab} = \rho_{[ab]} \quad (\text{F.7})$$

e la parte simmetrica con:

$$\rho_{(ab)} = \sigma_{ab} + \Theta h_{ab} \quad (\text{F.8})$$

dove  $\sigma_{ab}$  è la matrice con traccia nulla detta *shear matrix* e  $\Theta$  è la traccia di  $\rho_{ab}$  detto *expansion scalar*, definito così:

$$\Theta = \frac{\nabla_a k^a}{n-2} \quad (\text{F.9})$$

La matrice ottica assume, dunque, la forma:

$$\rho_{ab} = \frac{\nabla_p k^p}{n-2} h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \quad (\text{F.10})$$

La decomposizione del vettore nullo geodetico assume, invece, la forma:

$$\nabla_a k_b = \frac{\nabla_p k^p}{n-2} h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \theta k_a k_b + \alpha_a k_b + \beta_b k_a \quad (\text{F.11})$$

Il calcolo delle matrici di *twist* e *shear* possono essere poi calcolate esplicitamente:

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2} [\nabla_a k_b - \nabla_b k_a - (\alpha_a - \beta_a) k_b + (\alpha_b - \beta_b) k_a] \quad (\text{F.12})$$

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2} [\nabla_a k_b + \nabla_b k_a - 2\theta k_a k_b - (\alpha_a - \beta_a) k_b + (\alpha_b - \beta_b) k_a] - \Theta h_{ab} \quad (\text{F.13})$$

e possono essere definiti gli scalari di *shear* e *twist* come:

$$\omega^2 = \omega^{ab} \omega_{ab} = \frac{1}{2} [\nabla_a k_b - \nabla_b k_a] (\nabla^a k^b) \quad (\text{F.14})$$

$$\sigma^2 = \sigma^{ab} \sigma_{ab} = \frac{1}{2} [\nabla_a k_b + \nabla_b k_a] (\nabla^a k^b) - (n-2) \Theta^2 \quad (\text{F.15})$$

E notiamo che

$$\begin{aligned} \omega^2 = 0 &\iff \omega_{ab} = 0 \\ \sigma^2 = 0 &\iff \sigma_{ab} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

## References

- [1] VA Berezin, VI Dokuchaev, and Yu N Eroshenko. “On maximal analytical extension of the Vaidya metric”. In: *Classical and Quantum Gravity* 33.14 (2016), p. 145003.
- [2] VA Berezin, VI Dokuchaev, and Yu N Eroshenko. “Vaidya spacetime in the diagonal coordinates”. In: *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 124.3 (2017), pp. 446–458.
- [3] Christian G Boehmer and Peter A Hogan. “A Vaidya-type generalization of Kerr spacetime”. In: *Modern Physics Letters A* 32.35 (2017), p. 1750189.
- [4] S Chatterjee, B Bhui, and A Banerjee. “Higher-dimensional Vaidya metric with an electromagnetic field”. In: *Journal of Mathematical Physics* 31.9 (1990), pp. 2208–2210.
- [5] Armand Coudray and Jean-Philippe Nicolas. “Geometry of Vaidya spacetimes”. In: *General Relativity and Gravitation* 53.8 (2021), pp. 1–23.
- [6] Francesc Fayos, M Mercè Martín-Prats, and José MM Senovilla. “On the extension of Vaidya and Vaidya-Reissner-Nordström spacetimes”. In: *Classical and Quantum Gravity* 12.10 (1995), p. 2565.
- [7] JB Griffiths and RA Newing. “Neutrino radiation in spherically-symmetric gravitational fields II. The structure of the radiation field”. In: *General Relativity and Gravitation* 5.3 (1974), pp. 345–352.
- [8] Jerry B Griffiths and Jiří Podolsky. *Exact space-times in Einstein’s general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [9] Stephen W Hawking and George Francis Rayner Ellis. *The large scale structure of space-time*. Vol. 1. Cambridge University Press, 1973.
- [10] William A Hiscock. “Models of evaporating black holes. I”. In: *Physical Review D* 23.12 (1981), p. 2813.
- [11] W Israel. “Gravitational collapse of a radiating star”. In: *Physics Letters A* 24.3 (1967), pp. 184–186.

- [12] K D Krori and J Barua. “Exterior solution for a charged radiating sphere in general relativity (stars)”. In: *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General* 7.17 (Nov. 1974), p. 2125. DOI: 10.1088/0305-4470/7/17/007. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/7/17/007>.
- [13] Yuhji Kuroda. “A model for evaporating black holes”. In: *Progress of Theoretical Physics* 71.1 (1984), pp. 100–108.
- [14] RW Lindquist, RA Schwartz, and CW Misner. “Vaidya’s radiating schwarzschild metric”. In: *Physical Review* 137.5B (1965), B1364.
- [15] A Papapetrou. “Formation of a singularity and causality.” In: *A random walk in relativity and cosmology* (1985), pp. 184–191.
- [16] R Parentani. “Quantum metric fluctuations and Hawking radiation”. In: *Physical Review D* 63.4 (2001), p. 041503.
- [17] Ivor Robinson. “Null electromagnetic fields”. In: *Journal of Mathematical Physics* 2.3 (1961), pp. 290–291.
- [18] Hans Stephani et al. *Exact solutions of Einstein’s field equations*. Cambridge University Press, 2009.
- [19] Richard Chace Tolman. *Relativity, thermodynamics, and cosmology*. Courier Corporation, 1987.
- [20] P Chunilal Vaidya. “The gravitational field of a radiating star”. In: *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A*. Vol. 33. 5. Springer. 1951, pp. 264–276.
- [21] PC Vaidya. “‘Newtonian’ time in general relativity”. In: *Nature* 171.43-45 (1953), pp. 260–261.
- [22] PC Vaidya and LK Patel. “Radiating Kerr metric”. In: *Physical Review D* 7.12 (1973), p. 3590.
- [23] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [24] B Waugh and Kayll Lake. “Double-null coordinates for the Vaidya metric”. In: *Physical Review D* 34.10 (1986), p. 2978.