



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO  
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE  
DIPARTIMENTO DI FISICA

ELABORATO FINALE

---

La legge del semicerchio in matrici  
random a banda

---

*Autore:*  
Giovanni Andrea  
FRIGERI (MAT. 769653)

*Relatore:*  
Prof. Luca Guido  
MOLINARI

.....

.....

PACS: 02.10.Yn, 05.45.Mt

Febbraio 2013

---

---

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Matrici random a banda in fisica . . . . .	2
1.2	Ensemble Gaussiani . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Supermatematica</b>	<b>10</b>
2.1	Variabili di Grassmann . . . . .	10
2.1.1	Definizione e proprietà . . . . .	10
2.1.2	Derivazione . . . . .	11
2.1.3	Integrazione . . . . .	12
2.2	Supervettori e Supermatrici . . . . .	14
2.2.1	Supervettori . . . . .	14
2.2.2	Supermatrici . . . . .	15
2.3	SuperIntegrali . . . . .	22
2.3.1	Integrali Gaussiani su variabili commutanti . . . . .	22
2.3.2	Integrali Gaussiani su variabili di Grassmann . . . . .	23
2.3.3	SuperIntegrali Gaussiani . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Densità degli autovalori di matrici random a banda</b>	<b>26</b>
3.1	Metodo analitico . . . . .	26
3.1.1	Preliminari . . . . .	26
3.1.2	Definizione BRM . . . . .	28
3.1.3	Media di ensemble e trasformazione di H-S . . . . .	29
3.1.4	Calcolo della densità . . . . .	32
3.1.5	Metodo del punto sella . . . . .	35
	<b>Conclusioni</b>	<b>37</b>
	<b>A Calcolo del punto sella</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Matrici random a banda in fisica

La comunità scientifica si interessò alla teoria delle matrici random (RMT) a partire dal 1950 in seguito agli studi di Eugene Wigner [1]. L'obiettivo di Wigner era quello di descrivere le proprietà generali dei livelli energetici di nuclei pesanti in stati altamente eccitati. Per fare ciò Wigner doveva risolvere due questioni principali: l'Hamiltoniana  $H$  di tale sistema fisico era sconosciuta e, inoltre, anche conoscendo l'Hamiltoniana stessa era impossibile risolvere la relativa equazione di Schrödinger per trovarne gli autovalori.

Wigner ipotizzò che  $H$  fosse una matrice random di grande dimensione e la distribuzione di probabilità dei suoi elementi fosse vincolata solamente alle proprietà di simmetria del problema. Allora i livelli nucleari e gli autovalori della matrice random avevano le stesse proprietà statistiche e la distanza tra i livelli energetici poteva essere modellizzata dalla distanza tra i successivi autovalori della matrice random. Tramite simulazioni MonteCarlo venne mostrata la correttezza dell'ipotesi di Wigner. La RMT venne sviluppata ulteriormente negli anni successivi dallo stesso Wigner, da Freeman Dyson e Madan Lal Mehta. Dyson fece un'importante classificazione, basata sulla simmetria per inversioni temporali, delle matrici random e concluse che esistevano tre grandi classi di matrici random, dette Ensemble Gaussiano Ortogonale, Unitario e Simplettico.

Negli anni '80 il campo d'applicazione della RMT venne esteso al caos quantistico. Bohigas-Giannoni-Schmit in un loro articolo [2] mostrarono che le proprietà statistiche del biliardo di Sinai, soggetto a comportamento caotico, sono ben descritte da matrici random appartenenti all'Ensemble Gaussiano Ortogonale (GOE) ed ipotizzarono una corrispondenza tra lo spettro di una matrice random e i livelli energetici di un generico sistema quantistico la cui controparte classica presenta una dinamica caotica. Le proprietà statistiche dello spettro quantistico di un sistema classicamente integrabile vengono invece descritte efficacemente da una matrice diagonale con elementi



Figura 1.1: Il fisico ungherese Eugene Wigner

random indipendenti (Berry e Tabor, 1977 [3]). I sistemi generici, tuttavia, non sono nè totalmente caotici nè integrabili, quindi, per interpolare la situazione intermedia, vennero introdotte le matrici random a banda (BRM), ovvero matrici che hanno elementi non nulli solo all'interno di una banda  $b$ . In particolare l'indagine delle proprietà statistiche dei vari modelli veniva svolta attraverso il calcolo della *distribuzione della distanza tra i livelli adiacenti* (“*level spacing distribution*”)  $P(s)$  definita come

$$P(s) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(s - \lambda_{j+1} + \lambda_j) \quad (1.1)$$

( $\lambda_j$  è il  $j$ -esimo autovalore) ovvero  $P(s)$  è la probabilità che due livelli adiacenti si trovino a una distanza  $s$ .

Per l'Ensemble Gaussiano Ortogonale la distribuzione della distanza tra i livelli adiacenti è descritta dalla formula di Wigner (“*Wigner surmise*”)

$$P_W(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\frac{\pi s^2}{4}} \quad (1.2)$$

che è conseguenza di una repulsione tra i livelli.

Nel caso di matrice random diagonale invece  $P(s)$  obbedisce alla distribuzione di Poisson

$$P_P(s) = e^{-s} \quad (1.3)$$

Il discostamento di quest'ultima dalla “*Wigner surmise*” compare a causa della localizzazione degli autovettori di una matrice random diagonale che riduce così l'effetto di repulsione tra i livelli (una matrice random gaussiana ha invece gli autovettori “estesi”).

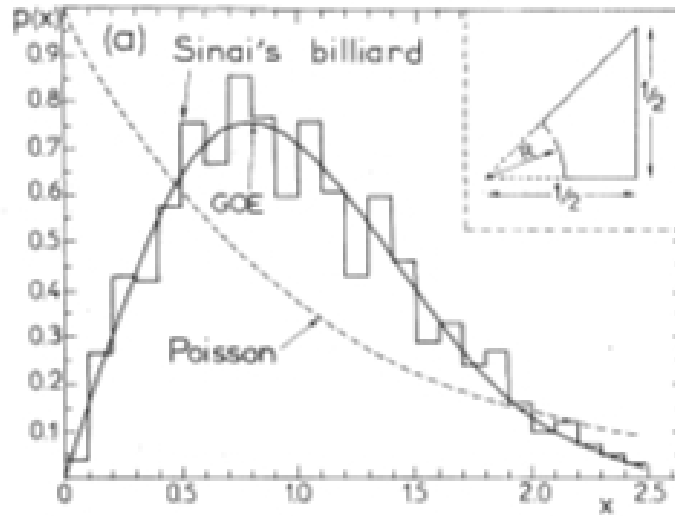


Figura 1.2: Grafico del level spacing distribution per il biliardo di Sinai (rettangoli), il GOE (linea continua) e matrice diagonale con elementi random indipendenti (linea tratteggiata) (Bohigas-Giannoni-Schmit, 1984)

Uno dei modelli più studiati nel caso quantistico è quello del rotatore forzato (RF), che, nonostante la sua semplicità, mostra un fenomeno molto interessante denominato localizzazione dinamica. Tale modello può essere utilizzato per descrivere un pendolo in un campo gravitazionale intermittente oppure la dinamica di un dipolo elettrico rotante che è periodicamente colpito da un fotone. L'Hamiltoniana classica è

$$H_{cl} = \frac{L^2}{2} + k \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (1.4)$$

dove  $\theta$  è la posizione angolare del rotatore,  $L$  il momento angolare,  $k$  il parametro che controlla l'intensità della perturbazione ed abbiamo assunto il momento d'inerzia unitario. L'integrazione delle equazioni di Hamilton su un periodo è svolta utilizzando la *Mappa Standard* (o *Mappa di Chirikov*)<sup>1</sup>. Si trova che per un valore di  $k$  abbastanza grande il sistema ha comportamento fortemente caotico e in questo regime  $\langle (L - L_0)^2 \rangle = D_{cl}t$ , dove  $D_{cl}$  è il coefficiente di diffusione classico e  $L_0$  è il momento iniziale; di conseguenza l'energia  $E(t)$  nel modello classico cresce linearmente nel tempo. Prendendo in considerazione il modello quantistico, con  $\alpha = \frac{\hbar T}{4\pi}$  irrazionale, si ha che

<sup>1</sup>La mappa di Chirikov è molto semplice; infatti è così fatta

$$\begin{cases} L' = L + k \sin \theta \\ \theta' = \theta + L'T \end{cases} \quad (1.5)$$

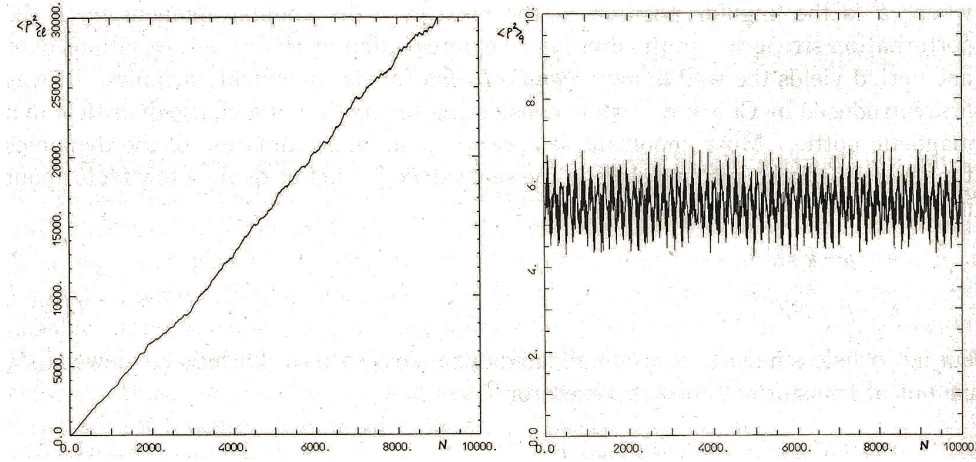


Figura 1.3: Soppressione quantistica del caos classico nel rotatore forzato. A sinistra è mostrato il comportamento diffusivo dell'energia media classica, a destra invece si vede il comportamento quantistico che esibisce la localizzazione.

l'Hamiltoniana in rappresentazione di Schrödinger delle coordinate è

$$H_q = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (1.6)$$

Se consideriamo l'operatore di Floquet  $F$  associato al RF quantistico questo ha la forma

$$F = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} k \cos \theta\right) \exp\left(-\frac{iT}{\hbar} \frac{L^2}{2}\right) \quad (1.7)$$

Nella base degli autostati di  $L$ ,  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$ , abbiamo che l'elemento di matrice  $F_{nm} = \langle n|F|m\rangle$  è dato da

$$F_{nm} = \exp\left(-iT\hbar \frac{m^2}{2}\right) i^{m-n} J_{n-m}\left(\frac{k}{\hbar}\right) \quad (1.8)$$

dove  $J_l$  rappresenta la  $l$ -esima funzione di Bessel. Quindi, siccome le funzioni di Bessel decrescono rapidamente per ordini crescenti, solo gli elementi di matrice  $F_{nm}$  vicini alla diagonale hanno un valore rilevante determinando così una struttura "a banda" della matrice associata all'operatore di Floquet del rotatore forzato. Questo fu uno dei motivi che indusse Izrailev, Casati, Molinari e altri a studiare le proprietà di matrici random a banda.

Attraverso simulazioni numeriche si ottiene un andamento inaspettato dell'energia media; infatti dopo un'iniziale crescita con legge lineare, che riproduce mediamente il comportamento classico, la diffusione si arresta dopo

un tempo caratteristico  $\tau_B$ , detto “break time”. Questo fenomeno è denominato soppressione quantistica del caos classico e mostra come gli effetti quantistici contribuiscano in modo determinante alla dinamica del sistema. Si può mostrare che tale soppressione è connessa alla struttura degli autovettori, cioè gli autovettori  $\phi_n(x)$  risultano esponenzialmente localizzati,  $\phi_n(x) \sim \exp(-|x - x_0|/\xi)$  e  $\xi$  è detta lunghezza di localizzazione; questo fenomeno è detto localizzazione dinamica ed è simile alla localizzazione di Anderson che si manifesta in alcuni problemi di fisica dello stato solido. Inoltre la level spacing distribution  $P(s)$  ha una forma Poissoniana.

Se consideriamo il rotatore forzato con parametro  $\alpha$  razionale si può vedere che questo modello può trovarsi in un regime completamente delocalizzato (descritto con RMT), completamente localizzato (quindi integrabile) oppure in una situazione intermedia. Tale modello è ben rappresentato da una matrice random a banda [4] e dunque le matrici random a banda possono essere usate per descrivere la transizione da stati localizzati a delocalizzati.

Le matrici random a banda risultano interessanti anche perchè per tali matrici si ha una proprietà di scaling della lunghezza di localizzazione degli autovettori. Questa proprietà fu osservata inizialmente da Casati, Izrailev e Molinari nello studio numerico di BRM [5]; essi trovarono che la lunghezza di localizzazione “risalata”  $\beta = \xi/N$  era soggetta a una legge di scaling

$$\beta \sim f(x) \quad (1.9)$$

Il parametro di scaling  $x$  è uguale a

$$x = \frac{b^2}{N} \quad (1.10)$$

dove  $b$  rappresenta la misura della banda e  $N$  la dimensione della matrice. Essi trovarono anche la forma della  $f(x)$  che meglio si adattava ai dati

$$\beta = \frac{\gamma x}{1 + \gamma x} \quad \gamma \approx 1.4 \quad (1.11)$$

e rilevarono una relazione lineare, valida fino a  $x \approx 10$ , del seguente tipo

$$\ln \left( \frac{\beta}{1 - \beta} \right) = \alpha \ln x + c \quad \alpha \approx 1, c \approx 0.35 \quad (1.12)$$

Una conferma analitica di questa legge di scaling fu in seguito data da Fyodorov e Mirlin [6] utilizzando un approccio supersimmetrico; essi ricondussero il problema dello studio di BRM al modello sigma unidimensionale, non lineare e supersimmetrico nel limite  $N \gg 1$  e  $b \gg 1$ .

Vogliamo ricordare che anche Wigner nei suoi lavori prese in considerazione una particolare classe di matrici random a banda, chiamate “matrici confinate”, per rappresentare sistemi conservativi definiti dalla Hamiltoniana  $H = H_0 + V$  con una parte imperturbata  $H_0$  e una perturbazione  $V$ . Queste

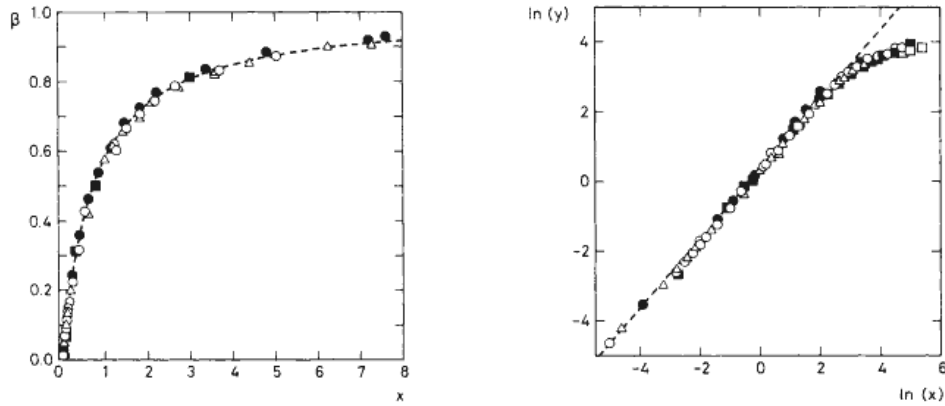


Figura 1.4: a) La lunghezza di localizzazione  $\beta$  vs  $x = b^2/N$  per  $N=200(\bullet)$ ,  $400(\triangle)$ ,  $600(\circ)$ ,  $800(\blacksquare)$  e  $1000(\square)$ . È evidente la legge di scaling con parametro di scaling  $x$ . La linea tratteggiata rappresenta la funzione (1.11). b) Grafico log-log nelle variabili  $x = b^2/N$ ,  $y = \beta/(1 - \beta)$ . Evidente la relazione lineare, la linea tratteggiata corrisponde a  $y = \gamma x$  con  $\gamma \approx 1.4$ .

matrici erano caratterizzate da elementi diagonali interi  $(\dots, -2, -1, 0, 1, \dots)$  e da una banda di grandezza  $b$  di elementi di matrice  $a_{ij} = \pm h$  dove  $h$  era una costante con segno casuale; fuori dalla banda gli elementi della matrice erano nulli.

Lo studio delle proprietà di matrici random a banda risulta dunque fondamentale per analizzare sia sistemi complessi con molti gradi di libertà sia sistemi con pochi gradi di libertà che presentano caos quantistico.

## 1.2 Ensemble Gaussiani

Prima di passare all'esposizione dei metodi matematici che useremo per studiare le matrici random vogliamo fare un breve richiamo delle proprietà dei tre Ensemble Gaussiani di matrici random.

L'Ensemble Gaussiano Ortogonale ( $GOE_n$ ) è descritto da una misura Gaussiana con densità

$$\frac{1}{Z_{GOE_n}} e^{-\frac{n}{4} \text{Tr} H^2} \quad (1.13)$$

sullo spazio delle matrici reali simmetriche  $n \times n$ . La distribuzione è invariante per trasformazioni ortogonali e tali matrici modellano Hamiltoniane aventi simmetria per inversione temporale.

L'Ensemble Gaussiano Unitario ( $GUE_n$ ) è descritto da una misura Gaussiana con densità

$$\frac{1}{Z_{GUE_n}} e^{-\frac{n}{2} \text{Tr} H^2} \quad (1.14)$$



sullo spazio delle matrici Hermitiane  $n \times n$ . La denominazione di Ensemble unitario è dovuta al fatto che la distribuzione è invariante per trasformazioni unitarie; tali matrici modellano Hamiltoniane che non hanno simmetria per inversione temporale.

L'Ensemble Gaussiano Simplettico ( $GSE_n$ ) è descritto da una misura Gaussiana con densità

$$\frac{1}{Z_{GSE_n}} e^{-n \operatorname{Tr} H^2} \quad (1.15)$$

sullo spazio delle matrici Hermitiane quaternioniche  $n \times n$ . La distribuzione è invariante per trasformazioni simplettiche e tali matrici modellano Hamiltoniane aventi simmetria per inversione temporale ma prive di simmetria rotazionale.

La densità di stati per i tre Ensemble Gaussiani obbedisce alla *legge del semicerchio di Wigner* nel limite  $N \rightarrow \infty$  (a patto di riscalare opportunamente l'unità di misura), ovvero

$$\rho(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} \quad (1.16)$$

Tale forma per la densità è valida anche per le “matrici confinate” che furono considerate da Wigner e scopo di questo lavoro è mostrare che vale anche per matrici random a banda generiche.

La level spacing distribution  $P(s)$  risulta essere

$$P(s) = \begin{cases} \frac{\pi s}{2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4}\right) & \text{GOE} \\ \frac{32s^2}{\pi^2} \exp\left(-\frac{4s^2}{\pi}\right) & \text{GUE} \\ \frac{2^{18}s^4}{3^6\pi^3} \exp\left(-\frac{64s^2}{9\pi}\right) & \text{GSE} \end{cases}$$

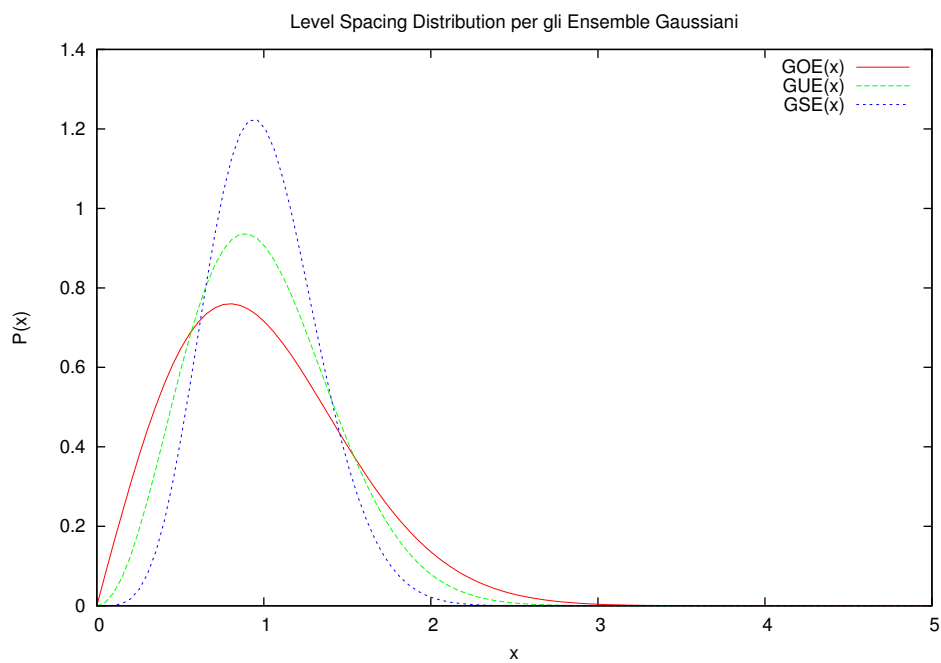


Figura 1.5: Level spacing distribution per GOE,GUE e GSE

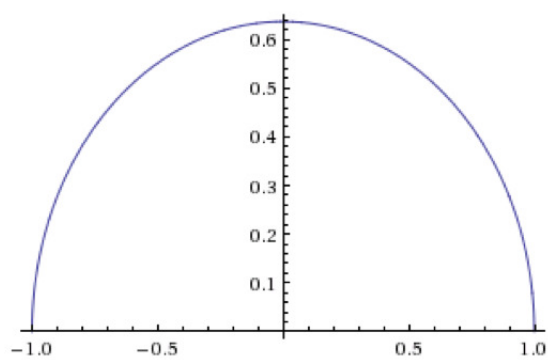


Figura 1.6: Legge del semicerchio di Wigner

## Capitolo 2

# Supermatematica

*In questo capitolo verranno esposti gli strumenti matematici che saranno applicati in seguito: i metodi super-simmetrici.*

*Questi metodi rientrano nell'ambito della supermatematica la cui idea centrale è quella di considerare sullo stesso piano le variabili commutanti e quelle anticommutanti. In particolare verrà presentata una generalizzazione delle definizioni di vettori, matrice, determinante e sarà introdotto il concetto di superintegrale.*

### 2.1 Variabili di Grassmann

Per prima cosa introduciamo le variabili anticommutanti, dette anche di Grassmann, e ne analizziamo le proprietà. La seguente esposizione si basa su [7] e [8]. Per un'esposizione più formale si rimanda a [9].

#### 2.1.1 Definizione e proprietà

Definiamo le variabili di Grassmann  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (elementi di un'algebra di Grassmann) come degli enti matematici che obbediscono alle seguenti regole di anticommutazione

$$\{\eta_i, \eta_j\} \stackrel{def}{=} \eta_i \eta_j + \eta_j \eta_i = 0 \quad (2.1)$$

per ogni  $1 \leq i, j \leq n$ .

Ponendo  $i = j$  nella (2.1) si ottiene immediatamente che il quadrato di una variabile di Grassmann arbitraria  $\eta_i$  è nullo

$$\eta_i^2 = 0 \quad (2.2)$$

A causa della proprietà (2.2), ogni funzione  $F(\eta_1, \dots, \eta_n)$  delle variabili anticommutanti è un polinomio finito della forma

$$F(\eta_1, \dots, \eta_n) = \sum_{\{m_i=0,1\}} f(m_1, \dots, m_n) \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} \dots \eta_n^{m_n} \quad (2.3)$$

dove con  $\sum_{\{m_i=0,1\}}$  si intende la sommatoria su  $m_1, m_2, \dots, m_n$  dove ciascun  $m_i$  può assumere solamente i valori 0 o 1.

Ad esempio, la più generica funzione di due variabili anticommutanti  $\eta_1, \eta_2$  è  $F(\eta_1, \eta_2) = a + b\eta_1 + c\eta_2 + d\eta_1\eta_2$ , dove  $a, b, c, d$  sono ordinari numeri commutanti.

È utile definire per tali variabili delle operazioni matematiche analoghe a quelle usate per i numeri convenzionali. Associamo ad ogni variabile  $\eta$  una nuova variabile  $\eta^*$ , che chiamiamo complesso coniugato di  $\eta$ . Le variabili  $\eta_i^*$  anticommutano tra di loro e con le variabili  $\eta_i$ , dunque completiamo le regole di anticommutazione (2.1) con le seguenti

$$\{\eta_i, \eta_j^*\} = 0 \quad \{\eta_i^*, \eta_j^*\} = 0 \quad (2.4)$$

per ogni  $1 \leq i, j \leq n$ . Segue immediatamente che  $\eta_i^{*2} = 0$ .

Definiamo il complesso coniugato del prodotto di  $n$  variabili anticommutanti come il prodotto, nello stesso ordine, dei complessi coniugati di queste variabili

$$(\eta_1\eta_2 \dots \eta_n)^* = \eta_1^*\eta_2^* \dots \eta_n^* \quad (2.5)$$

Inoltre assumiamo che l'operazione di doppia complessificazione cambi segno alla variabile di Grassmann

$$(\eta_i^*)^* = -\eta_i \quad (2.6)$$

La proprietà (2.6) può apparire anomala in quanto differisce da quella delle variabili convenzionali (come sappiamo  $(z^*)^* = z$  quando  $z$  è una variabile commutante). Questa è tuttavia vantaggiosa per le variabili di Grassmann, infatti, considerando ad esempio la quantità  $\eta_i^*\eta_i$  e facendone il complesso coniugato si ottiene

$$(\eta_i^*\eta_i)^* = (\eta_i^*)^*\eta_i^* = -\eta_i\eta_i^* = \eta_i^*\eta_i \quad (2.7)$$

dove abbiamo usato la (2.5), (2.6), (2.4). Quindi la quantità  $\eta_i^*\eta_i$  rimane invariata sotto l'operazione di complessificazione e può essere considerata come "reale", esattamente come il prodotto tra un numero complesso e il suo complesso coniugato.

### 2.1.2 Derivazione

Adesso introduciamo le operazioni di derivazione e integrazione per le variabili di Grassmann.

La derivazione rispetto a una variabile  $\eta$  è definita in modo analogo alla derivazione rispetto alle usuali variabili commutanti

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(a + b\eta) = b$$

Per una generica funzione di due variabili  $F(\eta_1, \eta_2) = a + b\eta_1 + c\eta_2 + d\eta_1\eta_2$  si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta_1}F(\eta_1, \eta_2) &= b + d\eta_2 & \frac{\partial}{\partial\eta_2}F(\eta_1, \eta_2) &= c - d\eta_1 \\ \frac{\partial}{\partial\eta_1}\frac{\partial}{\partial\eta_2}F(\eta_1, \eta_2) &= -\frac{\partial}{\partial\eta_2}\frac{\partial}{\partial\eta_1}F(\eta_1, \eta_2) = -d\end{aligned}$$

In generale la derivazione rispetto alla variabile  $\eta_i$  si ottiene scambiandola con la precedente, applicando le regole di anticommutazione (2.1), fino a quando non si trova in prima posizione e poi differenziando nella maniera usuale. Il segno delle derivate miste è ottenuto riarrangiando il prodotto delle  $\eta$  in  $F(\eta_1, \dots, \eta_n)$  nell'ordine inverso a quello delle derivate; ovviamente  $\frac{\partial}{\partial\eta_i}$  e  $\frac{\partial}{\partial\eta_j}$  anticommutano e  $\frac{\partial}{\partial\eta_i}\eta_j + \eta_j\frac{\partial}{\partial\eta_i} = \delta_{ij}$ . Segue che  $\frac{\partial^2}{\partial\eta_i^2} = 0$ . Se consideriamo le derivate rispetto a  $\eta$  e  $\eta^*$  rimangono valide le regole precedenti, cioè  $\frac{\partial}{\partial\eta_i}\frac{\partial}{\partial\eta_j^*} = -\frac{\partial}{\partial\eta_j^*}\frac{\partial}{\partial\eta_i}$

### 2.1.3 Integrazione

Come la derivazione, l'integrazione è definita come un operatore lineare. Inoltre si richiede che

$$\int d\eta_i\eta_i = \int d\eta_i^*\eta_i^* = 1 \quad \int d\eta_i = \int d\eta_i^* = 0 \quad (2.8)$$

Come per la derivazione, per svolgere un integrale "multiplo" si riarrangiano le variabili anticommutanti dell'integranda nell'ordine inverso a quello dei differenziali e poi si applicano le regole (2.8) (per integrare una funzione di più variabili rispetto ad un'unica variabile  $\eta_i$  si scambia quest'ultima con le altre variabili finché non è in prima posizione e poi si usano le (2.8)).

Ad esempio

$$\begin{aligned}\int d\eta_1\eta_2\eta_1 &= -\int d\eta_1\eta_1\eta_2 = -\eta_2 \\ \int d\eta_1d\eta_2\eta_1\eta_2 &= -\int d\eta_1d\eta_2\eta_2\eta_1 = -1 = -\int d\eta_2d\eta_1\eta_1\eta_2\end{aligned}$$

Dunque i differenziali  $d\eta_i, d\eta_i^*$  anticommutano tra loro

$$\{d\eta_i, d\eta_j\} = 0 \quad \{d\eta_i, d\eta_j^*\} = 0 \quad \{d\eta_i^*, d\eta_j^*\} = 0 \quad (2.9)$$

Per una generica funzione di  $n$  variabili di Grassmann della forma (2.3) si ha che

$$\int d\eta_n d\eta_{n-1} \dots d\eta_2 d\eta_1 F(\eta_1, \dots, \eta_n) = f(1, 1, \dots, 1) \quad (2.10)$$

Siamo arrivati a una conclusione inattesa: *la derivazione e l'integrazione sono operazioni identiche per variabili di Grassmann.*

Notiamo che gli integrali di Grassmann non necessitano di dominio d'integrazione per essere definiti; infatti in nessun integrale precedente abbiamo specificato gli estremi d'integrazione.

Ora ci domandiamo come cambia un integrale quando operiamo un cambiamento di variabili.

Consideriamo inizialmente il caso più semplice di una sola variabile. Facciamo il cambio di variabile  $\xi = a\eta$ , con  $a \in \mathbb{C}$ . Allora

$$\int d\xi \xi = \int d(a\eta)(a\eta) = 1 \quad (2.11)$$

così che otteniamo la relazione

$$d\xi = d(a\eta) = \frac{1}{a} d\eta \quad (2.12)$$

In generale se facciamo il cambiamento di variabili  $\xi_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}\eta_j$ , con  $A$  matrice  $N \times N$  e  $1 \leq i \leq N$ , otteniamo

$$d\xi_1 \dots d\xi_N = \frac{1}{\det A} d\eta_1 \dots d\eta_N \quad (2.13)$$

Infatti, procedendo come nel caso precedente, sappiamo che deve valere la relazione

$$\int d\xi_N \dots d\xi_1 (\xi_1 \dots \xi_N) = 1 \quad (2.14)$$

Facendo il cambiamento di variabili, l'integranda diventa

$$\xi_1 \dots \xi_N = \left( \sum_{i,j,k,\dots,t=1}^N \epsilon_{ijk\dots t} A_{1i} A_{2j} \dots A_{Nt} \right) \eta_1 \dots \eta_N = (\det A) \eta_1 \dots \eta_N \quad (2.15)$$

dove abbiamo usato la (2.1), (2.2) e la definizione di determinante di una matrice  $N \times N$ . Con  $\epsilon_{ijk\dots t}$  denotiamo il simbolo di Levi-Civita  $N$ -dimensionale,  $i, j, \dots, t$  sono  $N$  lettere, così definito

$$\epsilon_{ijk\dots t} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, \dots, t) \text{ è una permutazione pari di } (1, 2, \dots, N) \\ -1 & \text{se } (i, j, \dots, t) \text{ è una permutazione dispari di } (1, 2, \dots, N) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.16)$$

Affinché continui a valere la (2.14) l'unica possibile soluzione è che

$$d\xi_N \dots d\xi_1 = \frac{1}{\det A} d\eta_N \dots d\eta_1$$

Queste relazioni sono differenti da quelle che si hanno per variabili ordinarie e ci torneranno utili in seguito quando studieremo una specifica tipologia di integrali di Grassmann.

## 2.2 Supervettori e Supermatrici

Come detto inizialmente l'idea su cui si basa la supermatematica è quella di considerare sullo stesso piano le variabili commutanti e quelle anticommutanti. Useremo il prefisso “super” per indicare enti matematici contenenti sia variabili commutanti che anticommutanti.

### 2.2.1 Supervettori

Un supervettore  $(m|n)$ , che chiameremo  $\Phi$ , è un vettore con  $m$  componenti commutanti  $S_1, \dots, S_m$  e  $n$  componenti anticommutanti  $\chi_1, \dots, \chi_n$

$$\Phi = \begin{pmatrix} S \\ \chi \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix} \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Ci serviremo dell'alfabeto latino per indicare le variabili commutanti e di quello greco per le variabili anticommutanti. Volutamente abbiamo denotato le componenti anticommutanti del supervettore con  $\chi_i$  invece che con  $\eta_i$  usata precedentemente; infatti, assumendo che valgano le (2.1), le  $\chi_i$  devono essere funzioni dispari delle  $\eta_i$ , cioè

$\chi_i = \sum_j c_{ij} \eta_j + \sum_{ijkl} c_{ijkl} \eta_i \eta_k \eta_l \dots$  con  $c$  coefficienti commutanti. Inoltre la natura commutante delle  $S_i$  non proibisce a quest'ultime di essere funzioni delle  $\eta_i$ , ma le vincola ad esserne funzioni pari, cioè  $S_i = z_i + \sum_{jk} c_{ijk} \eta_j \eta_k + \dots$ . Spesso chiameremo le variabili commutanti bosoniche e quelle anticommutanti fermioniche, dove è palese il riferimento alla fisica.

Il supervettore trasposto  $\Phi^T$  è dato dall'espressione

$$\Phi^T = ( S^T \quad \chi^T ) \quad (2.18)$$

$$S^T = ( S_1 \quad \dots \quad S_m ) \quad \chi^T = ( \chi_1 \quad \dots \quad \chi_n )$$

L'addizione tra supervettori è eseguita addizionando le rispettive componenti; la moltiplicazione di un supervettore per uno scalare è ottenuta moltiplicando tutte le componenti del supervettore per lo scalare.

Introduciamo l'Hermitiano coniugato  $\Phi^\dagger$  del supervettore  $\Phi$  nella seguente forma

$$\Phi^\dagger = (\Phi^*)^T = (\Phi^T)^* \quad (2.19)$$

dove il complesso coniugato  $\Phi^*$  del supervettore è ottenuto complessificando tutte le componenti, ricordando la (2.5) e la (2.6).

Definiamo il prodotto scalare tra due supervettori  $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}$  come

$$(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}) = \Phi^{(1)\dagger} \Phi^{(2)} = \sum_{i=1}^m S_i^{(1)*} S_i^{(2)} + \sum_{i=1}^n \chi_i^{(1)*} \chi_i^{(2)} \quad (2.20)$$

Il secondo termine della (2.20) è da intendersi come prodotto componente per componente.

Il prodotto scalare così definito gode della familiare proprietà

$$(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)})^* = (\Phi^{(2)}, \Phi^{(1)}) \quad (2.21)$$

Per verificare questa proprietà è sufficiente complessificare la (2.20); il complesso coniugato della prima sommatoria si svolge con le regole ordinarie (doppia complessificazione è l'identità e le variabili commutano), mentre per ottenere il complesso coniugato della seconda sommatoria bisogna utilizzare le (2.5),(2.6),(2.4).

Come viene fatto nell'algebra ordinaria definiamo la "lunghezza"  $L_\Phi$  di un supervettore come la radice quadrata del prodotto scalare del supervettore con se stesso,  $L_\Phi = (\Phi, \Phi)^{1/2}$ ; dalla (2.21) segue che tale quantità è reale.

### 2.2.2 Supermatrici

Le supermatrici sono utilizzate per mappare un supervettore  $\Phi$  in un nuovo supervettore  $\tilde{\Phi}$

$$F = \begin{pmatrix} a & \sigma \\ \rho & b \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\tilde{\Phi} = F\Phi = \begin{pmatrix} a & \sigma \\ \rho & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aS + \sigma\chi \\ \rho S + b\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i}S_i + \sigma_{1j}\chi_j \\ \vdots \\ a_{mi}S_i + \sigma_{mj}\chi_j \\ \rho_{1i}S_i + b_{1j}\chi_j \\ \vdots \\ \rho_{ni}S_i + b_{nj}\chi_j \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

dove è stata usata la notazione di Einstein, l'indice  $i$  va da 1 a  $m$  quello  $j$  da 1 a  $n$ . La supermatrice  $F$  è una matrice  $(m+n) \times (m+n)$ , la matrice  $a$  è  $m \times m$ ,  $b$  è  $n \times n$ ,  $\sigma$  è  $m \times n$  ed infine  $\rho$  è  $n \times m$ . Affinchè  $\tilde{\Phi}$  abbia ancora la struttura (2.17), cioè le prime  $m$  componenti bosoniche e le restanti  $n$  fermioniche, è necessario che le matrici  $a$  e  $b$  siano formate da elementi commutanti mentre  $\sigma$  e  $\rho$  devono avere elementi anticommutanti.

Per il prodotto tra supermatrici, valgono le usuali regole della moltiplicazione tra matrici

$$(FG)_{ik} = \sum_l F_{il}G_{lk} \quad \text{dove F,G sono supermatrici} \quad (2.24)$$

Dalla (2.24) si può vedere che il prodotto tra due supermatrici è ancora una supermatrice con la medesima struttura.



### Trasposizione

Dobbiamo ora definire la trasposta di una supermatrice. Data una supermatrice  $F$  definiamo la sua trasposta, indicata con  $F^T$ , la supermatrice fatta nel modo seguente

$$F^T = \begin{pmatrix} a & \sigma \\ \rho & b \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{\rho} \\ -\tilde{\sigma} & \tilde{b} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Nell'espressione precedente con la "tilde" s'intende la trasposizione convenzionale. Si nota immediatamente che questa nuova definizione di trasposizione differisce da quella a noi familiare per un segno meno nel terzo blocco.

Tuttavia la "nuova" trasposizione gode ancora della proprietà

$$(F_1 F_2)^T = F_2^T F_1^T \quad (2.26)$$

Infatti

$$\begin{aligned} (F_1 F_2)^T &= \left[ \begin{pmatrix} a_1 & \sigma_1 \\ \rho_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & \sigma_2 \\ \rho_2 & b_2 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + \sigma_1 \rho_2 & a_1 \sigma_2 + \sigma_1 b_2 \\ \rho_1 a_2 + b_1 \rho_2 & \rho_1 \sigma_2 + b_1 b_2 \end{pmatrix}^T = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 + \sigma_1 \rho_2 & \rho_1 a_2 + b_1 \rho_2 \\ -a_1 \sigma_2 + \sigma_1 b_2 & \rho_1 \sigma_2 + b_1 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_2 \tilde{a}_1 - \tilde{\rho}_2 \tilde{\sigma}_1 & \tilde{a}_2 \tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2 \tilde{b}_1 \\ -\tilde{\sigma}_2 \tilde{a}_1 - \tilde{b}_2 \tilde{\sigma}_1 & -\tilde{\sigma}_2 \tilde{\rho}_1 + \tilde{b}_2 \tilde{b}_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{a}_2 & \tilde{\rho}_2 \\ -\tilde{\sigma}_2 & \tilde{b}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{\rho}_1 \\ -\tilde{\sigma}_1 & \tilde{b}_1 \end{pmatrix} = F_2^T F_1^T \end{aligned}$$

Notiamo che per verificare la (2.25) ci siamo serviti del fatto che  $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{b}\tilde{a}$ ,  $\tilde{a}\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\tilde{a}$ ,  $\tilde{\sigma}\tilde{\rho} = -\tilde{\rho}\tilde{\sigma}$  dove  $a, b$  sono matrici con elementi commutanti, mentre  $\rho, \sigma$  anticommutanti.

Osserviamo che la doppia trasposizione non è l'operatore identità

$$(F^T)^T = \begin{pmatrix} a & -\sigma \\ -\rho & b \end{pmatrix} \neq F \quad (2.27)$$

### Coniugazione Hermitiana

L'Hermitiano coniugato, o aggiunto,  $F^\dagger$  della supermatrice  $F$  è definito nella maniera tradizionale

$$F^\dagger = (F^*)^T = (F^T)^* \quad (2.28)$$

Domandiamoci cos'è l'aggiunto del prodotto di due supermatrici

$$(F_1 F_2)^\dagger = ((F_1 F_2)^T)^* = (F_2^T F_1^T)^* = (F_2^T)^* (F_1^T)^* = F_2^\dagger F_1^\dagger$$

dove abbiamo usato la (2.26), (2.5), (2.28).

Quindi siamo arrivati alla proprietà

$$(F_1 F_2)^\dagger = F_2^\dagger F_1^\dagger \quad (2.29)$$

Da questa proprietà possiamo anche dedurre che vale

$$(F\Phi_1, \Phi_2) = (\Phi_1, F^\dagger\Phi_2) \quad (2.30)$$

Infatti

$$(F\Phi_1, \Phi_2) = (F\Phi_1)^\dagger\Phi_2 = \Phi_1^\dagger F^\dagger\Phi_2 = (\Phi_1, F^\dagger\Phi_2)$$

Diversamente dalla trasposizione, applicando due volte la coniugazione Hermitiana ad una supermatrice si riottiene la supermatrice originaria, cioè l'operazione di coniugazione Hermitiana è l'inversa di se stessa

$$F^{\dagger\dagger} = \begin{pmatrix} a & \sigma \\ \rho & b \end{pmatrix}^{\dagger\dagger} = \begin{pmatrix} a^\dagger & \tilde{\rho}^* \\ -\tilde{\sigma}^* & b^\dagger \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a & -\sigma^{**} \\ -\rho^{**} & b \end{pmatrix} = F \quad (2.31)$$

Si definiscono supermatrici Hermitiane le supermatrici che hanno la particolare proprietà di essere uguali alla propria aggiunta.

$$H = H^\dagger \quad (2.32)$$

Dalla definizione precedente possiamo concludere che una supermatrice Hermitiana ha la struttura

$$H = H^\dagger = \begin{pmatrix} a & \rho^\dagger \\ \rho & b \end{pmatrix} \quad \text{dove } a = a^\dagger, b = b^\dagger \quad (2.33)$$

Sono, invece, definite unitarie le supermatrici che soddisfano la seguente proprietà

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad (2.34)$$

Le supermatrici unitarie preservano il prodotto scalare tra supervettori

$$(U\Phi_1, U\Phi_2) = (U\Phi_1)^\dagger(U\Phi_2) = \Phi_1^\dagger U^\dagger U\Phi_2 = (\Phi_1, \Phi_2) \quad (2.35)$$

### SuperTraccia

A questo punto vogliamo definire la traccia di una supermatrice, la cosiddetta supertraccia.

Data una supermatrice  $F$  della forma (2.22) definiamo la sua supertraccia come

$$\text{Str } F = \text{Tr } a - \text{Tr } b = \sum_{i=1}^m a_{ii} - \sum_{i=1}^n b_{ii} \quad (2.36)$$

Si può dimostrare banalmente che la supertraccia è lineare. Dalla definizione (2.36) e dalla (2.25) segue subito la seguente proprietà

$$\text{Str } F = \text{Str } F^T \quad (2.37)$$

L'insolito segno negativo davanti alla  $\text{Tr } b$  è fondamentale affinché continui a valere l'invarianza della supertraccia per permutazioni cicliche; infatti date due supermatrici  $F_1$  e  $F_2$  si ha che

$$\text{Str}(F_1 F_2) = \text{Str} \begin{pmatrix} a_1 & \sigma_1 \\ \rho_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & \sigma_2 \\ \rho_2 & b_2 \end{pmatrix} = \text{Tr}(a_1 a_2 + \sigma_1 \rho_2 - \rho_1 \sigma_2 - b_1 b_2)$$

inoltre

$$\text{Str}(F_2 F_1) = \text{Str} \begin{pmatrix} a_2 & \sigma_2 \\ \rho_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \sigma_1 \\ \rho_1 & b_1 \end{pmatrix} = \text{Tr}(a_2 a_1 + \sigma_2 \rho_1 - \rho_2 \sigma_1 - b_2 b_1)$$

Avvalendoci delle regole di anticommutazione e di commutazione nell'equazione sopra otteniamo che

$$\text{Str}(F_1 F_2) = \text{Str}(F_2 F_1) \quad (2.38)$$

Generalizzando la (2.38) al caso di  $n$  supermatrici si ha che

$$\text{Str}(F_1 F_2 \dots F_{n-1} F_n) = \text{Str}(F_n F_1 F_2 \dots F_{n-1}) \quad (2.39)$$

che non è altro l'invarianza della supertraccia per permutazioni cicliche.

Dalla (2.39) segue che la supertraccia è invariante per similitudine

$$\text{Str}(M^{-1} F M) = \text{Str } F \quad (2.40)$$

dove  $M$  è un'altra supermatrice e  $M^{-1}$  la sua inversa.

Un'ulteriore conseguenza della proprietà ciclica della supertraccia è la seguente identità per il logaritmo del prodotto di due supermatrici

$$\text{Str} \ln FG = \text{Str} \ln F + \text{Str} \ln G \quad (2.41)$$

Infatti, avvalendoci della (2.39), abbiamo che

$$\begin{aligned} \text{Str} \ln FG &= \text{Str } D(\ln FG)D^{-1} = \text{Str} \ln D(FG)D^{-1} = \text{Str} \ln \text{diag}[FG] \\ &= \text{Str} \ln \text{diag}[F] + \text{Str} \ln \text{diag}[G] = \text{Str} \ln F + \text{Str} \ln G \end{aligned}$$

dove  $D$  e la sua inversa  $D^{-1}$  sono supermatrici che diagonalizzano la supermatrice  $FG$ .

### SuperDeterminante

La definizione di superdeterminante che stiamo per dare è volta a mantenere le proprietà del determinante usuale, ovvero richiediamo che

1. il superdeterminante di una supermatrice  $F$  e della sua trasposta  $F^T$  sia lo stesso,  $\text{Sdet } F = \text{Sdet } F^T$

2. data una supermatrice, il logaritmo del suo superdeterminante sia uguale alla supertraccia del suo logaritmo,  $\ln \text{Sdet } F = \text{Str } \ln F$
3. valga il Teorema di Binet nel caso super-simmetrico  
 $\text{Sdet } F_1 F_2 = \text{Sdet } F_1 \text{Sdet } F_2$

Dunque il superdeterminante di una supermatrice  $F$  della forma (2.22) è definito come

$$\text{Sdet } F = \frac{\det(a - \sigma b^{-1} \rho)}{\det b} \quad (2.42)$$

Verifichiamo che (2.42) soddisfi veramente i requisiti 1, 2, 3.

1. Presa una supermatrice  $F$  della forma (2.22) e la sua trasposta  $F^T$  data da (2.25) si ha per la (2.42)

$$\text{Sdet } F = \frac{\det(a - \sigma b^{-1} \rho)}{\det b}$$

inoltre

$$\text{Sdet } F^T = \frac{\det(\tilde{a} + \tilde{\rho} \tilde{b}^{-1} \tilde{\sigma})}{\det \tilde{b}}$$

Ma  $\tilde{a} + \tilde{\rho} \tilde{b}^{-1} \tilde{\sigma} = \widetilde{(a - \sigma b^{-1} \rho)}$ , infatti

$$(\widetilde{(a - \sigma b^{-1} \rho)})_{ij} = (a - \sigma b^{-1} \rho)_{ji} = a_{ji} - \sigma_{jk} b_{kl}^{-1} \rho_{li} = \tilde{a}_{ij} + \tilde{\rho}_{il} \tilde{b}_{lk}^{-1} \tilde{\sigma}_{kj} = (\tilde{a} + \tilde{\rho} \tilde{b}^{-1} \tilde{\sigma})_{ij}$$

dove abbiamo usato la definizione ordinaria di trasposizione, le regole di anticommutazione e il fatto che  $(\tilde{b})^{-1} = \widetilde{b^{-1}}$ . Infine, utilizzando la nota proprietà del determinante usuale  $\det A = \det \tilde{A}$ , dove  $A$  è una matrice ordinaria e  $\tilde{A}$  la sua trasposta, otteniamo l'asserto desiderato

$$\text{Sdet } F = \text{Sdet } F^T \quad (2.43)$$

2. Per verificare la validità della seconda proprietà riscriviamo la supermatrice  $F$  nella seguente maniera

$$F = \begin{pmatrix} a & \sigma \\ \rho & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \sigma \\ b^{-1} \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Usando la (2.41)

$$\text{Str } \ln F = \text{Str } \ln \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \text{Str } \ln \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \sigma \\ b^{-1} \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Il primo termine del secondo membro dell'equazione precedente è valutato immediatamente

$$\text{Str } \ln \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \text{Str } \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln b \end{pmatrix} = \text{Tr } \ln a - \text{Tr } \ln b = \ln \frac{\det a}{\det b}$$

Invece per il secondo termine adoperiamo la definizione del logaritmo di una matrice come serie

$$\text{Str ln} \left[ I + \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}\sigma \\ b^{-1}\rho & 0 \end{pmatrix} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{Str} \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}\sigma \\ b^{-1}\rho & 0 \end{pmatrix}^n \quad (2.44)$$

Ma osserviamo che i termini d'ordine dispari hanno supertraccia nulla e quindi possono essere trascurati, così facendo otteniamo

$$\begin{aligned} \text{Str ln} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\sigma \\ b^{-1}\rho & 1 \end{pmatrix} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \text{Str} \begin{pmatrix} (a^{-1}\sigma b^{-1}\rho)^n & 0 \\ 0 & (b^{-1}\rho a^{-1}\sigma)^n \end{pmatrix} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} [\text{Tr}(a^{-1}\sigma b^{-1}\rho)^n - \text{Tr}(b^{-1}\rho a^{-1}\sigma)^n] \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\text{Tr}(a^{-1}\sigma b^{-1}\rho)^n] \\ &= \text{Tr ln}(I - a^{-1}\sigma b^{-1}\rho) = \ln \det(I - a^{-1}\sigma b^{-1}\rho) \end{aligned}$$

Quindi sommando i due membri otteniamo che

$$\text{Str ln } F = \ln \frac{\det a}{\det b} + \ln \det(I - a^{-1}\sigma b^{-1}\rho) = \ln \frac{\det(a - \sigma b^{-1}\rho)}{\det b} = \ln \text{Sdet } F \quad (2.45)$$

che è la proprietà 2 che volevamo ottenere.

3. Il teorema di Binet super-simmetrico segue dalle proprietà precedenti, infatti

$$\begin{aligned} \ln \text{Sdet } F_1 F_2 &= \text{Str ln } F_1 F_2 = \text{Str ln } F_1 + \text{Str ln } F_2 \\ &= \ln \text{Sdet } F_1 + \ln \text{Sdet } F_2 = \ln(\text{Sdet } F_1 \text{Sdet } F_2) \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato la (2.45), (2.41) e le proprietà del logaritmo. Quindi

$$\text{Sdet } F_1 F_2 = \text{Sdet } F_1 \text{Sdet } F_2 \quad (2.46)$$

come volevasi dimostrare. Osserviamo che da questa proprietà segue subito che

$$\text{Sdet}(F^{-1}) = \frac{1}{\text{Sdet } F} \quad (2.47)$$

Inoltre la (2.46) può essere facilmente generalizzata a

$$\text{Sdet} \left( \prod_{j=1}^n F_j \right) = \prod_{j=1}^n \text{Sdet } F_j \quad (2.48)$$

**Diagonalizzazione di supermatrici**

Come nell'algebra a noi familiare possiamo chiederci quali sono le soluzioni dell'equazione

$$H\Phi = \lambda\Phi \quad (2.49)$$

dove  $H$  è una supermatrice hermitiana (2.33) e  $\Phi$  un supervettore (2.17). Svolgendo i conti, la (2.49) assume la forma

$$\begin{cases} (a - \lambda)S + \rho^\dagger\chi = 0 \\ (b - \lambda)\chi + \rho S = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Eliminando le componenti bosoniche o fermioniche otteniamo

$$(a - \lambda - \rho^\dagger(b - \lambda)^{-1}\rho)S = 0 \quad (2.51)$$

oppure

$$(b - \lambda - \rho(a - \lambda)^{-1}\rho^\dagger)\chi = 0 \quad (2.52)$$

Possiamo affermare che

1. gli autovalori di una supermatrice Hermitiana sono reali
2. gli autovettori di una supermatrice Hermitiana corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro secondo il prodotto scalare (2.20)

Infatti, ipotizzando che valga la (2.49), abbiamo

$$(\Phi, H\Phi) = \lambda \quad (\Phi, H\Phi)^* = \lambda^* = (H\Phi, \Phi) = (\Phi, H^\dagger\Phi) = (\Phi, H\Phi) = \lambda$$

allora  $\lambda = \lambda^*$ , cioè gli autovalori di una supermatrice Hermitiana sono reali. Dimostriamo adesso la seconda affermazione. Assumiamo che valgano le seguenti relazioni

$$H\Phi = \lambda\Phi \quad H\Psi = \lambda'\Psi$$

con  $\lambda \neq \lambda'$ . Servendoci del prodotto scalare abbiamo

$$(\Psi, H\Phi) = \lambda(\Psi, \Phi) \quad (\Phi, H\Psi) = \lambda'(\Phi, \Psi)$$

Manipolando la seconda equazione con l'utilizzo delle proprietà del prodotto scalare e servendoci della proprietà precedente appena dimostrata, arriviamo a

$$(\Phi, H\Psi)^* = \lambda'(\Psi, \Phi) = (H\Psi, \Phi) = (\Psi, H\Phi) = \lambda(\Psi, \Phi)$$

Quindi vale la tale relazione

$$(\lambda - \lambda')(\Psi, \Phi) = 0$$

ma visto che per ipotesi  $\lambda \neq \lambda'$  arriviamo a

$$(\Psi, \Phi) = 0$$

cioè gli autovettori di una supermatrice Hermitiana appartenenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro.

Dunque ogni supermatrice Hermitiana può essere rappresentata nella seguente forma

$$H = U\Lambda U^\dagger \quad (2.53)$$

dove  $\Lambda$  è la matrice reale diagonale degli autovalori e  $U$  la supermatrice unitaria che opera il cambiamento di base.

Consideriamo il caso più semplice, ovvero una supermatrice  $2 \times 2$ ; l'equazione (2.51) diventa

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - \rho^*\rho = 0$$

Questa equazione ha due soluzioni

$$\lambda_{B_1} = a + \frac{\rho^*\rho}{a-b} \quad \lambda_{B_2} = b - \frac{\rho^*\rho}{a-b}$$

Tuttavia la soluzione  $\lambda_{B_2}$  dev'essere rigettata e perciò rimane solo l'autovalore  $\lambda_{B_1}$ . Similmente per l'equazione (2.52) abbiamo l'unico autovalore accettabile  $\lambda_{F_1} = b + \frac{\rho^*\rho}{a-b}$ . Ovviamente non esistono autovalori se  $a = b$ . Quindi la supermatrice Hermitiana  $2 \times 2$ , che chiamiamo  $H$ , può essere scritta nella forma  $H = U \text{diag}[\lambda_{B_1}, \lambda_{F_1}] U^{-1}$  con  $U$  supermatrice unitaria fatta nella seguente maniera

$$U = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\eta\eta^*}{2} & \eta \\ \eta^* & 1 - \frac{\eta\eta^*}{2} \end{pmatrix} \quad U^{-1} = U^\dagger = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\eta\eta^*}{2} & -\eta \\ -\eta^* & 1 - \frac{\eta\eta^*}{2} \end{pmatrix}$$

dove  $\eta = -\frac{\rho^*}{a-b}$ ,  $\eta^* = \frac{\rho}{a-b}$ .

## 2.3 SuperIntegrali

Concludiamo questo capitolo illustrando i superintegrali di cui faremo ampiamente uso in seguito. Essi consistono nell'integrazione rispetto a variabili commutanti e anticommutanti. Prima di esporre i superintegrali intendiamo richiamare gli integrali Gaussiani su variabili commutanti e su variabili di Grassmann.

### 2.3.1 Integrali Gaussiani su variabili commutanti

Un integrale Gaussiano su variabili bosoniche è un integrale nella forma

$$\int \left( \prod_{i=1}^m dx_i \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m x_i a_{ij} x_j \right) = \frac{(2\pi)^{m/2}}{(\det a)^{1/2}} \quad (2.54)$$

dove le  $m$  variabili  $x_i$  sono reali,  $x_i \in (-\infty, +\infty)$  per  $i = 1, \dots, m$  e  $a$  è una matrice simmetrica definita positiva. Il risultato può essere ottenuto passando ad una base in cui la matrice  $a$  è diagonale, riconducendosi così a  $m$  integrali gaussiani unidimensionali e ricordandosi che il prodotto degli autovalori di una matrice è uguale al determinante di essa. È possibile estendere (2.54) per variabili complesse.

$$\int \left( \prod_{i=1}^m \frac{d^2 S_i}{\pi} \right) \exp \left( - \sum_{i,j=1}^m S_i^* a_{ij} S_j \right) \quad (2.55)$$

dove il dominio d'integrazione di ogni variabile complessa  $S_i$  è tutto il piano complesso per  $i = 1, \dots, m$ ,  $a$  è una matrice  $m \times m$  avente parte reale positiva. Utilizzando il prodotto wedge, scriviamo  $d^2 S_i = d\text{Re}S_i \wedge d\text{Im}S_i = (2i)^{-1} dS_i^* \wedge dS_i$ . Diagonalizzando la matrice  $a$  ed esprimendo le variabili complesse  $S_i$  in termini di variabili reali, l'integrale (2.55) risulta essere

$$\int \left( \prod_{i=1}^m \frac{d^2 S_i}{\pi} \right) \exp \left( - \sum_{i,j=1}^m S_i^* a_{ij} S_j \right) = \frac{1}{\det a} \quad (2.56)$$

### 2.3.2 Integrali Gaussiani su variabili di Grassmann

Consideriamo adesso un integrale di questo tipo

$$\int \left( \prod_{i=1}^m d\chi_i^* d\chi_i \right) \exp \left( - \sum_{i,j=1}^m \chi_i^* b_{ij} \chi_j \right) \quad (2.57)$$

dove adesso le variabili d'integrazione sono variabili di Grassmann che obbediscono alle regole (2.1) e  $b$  è una matrice  $n \times n$  qualsiasi. Ricordiamo che non è necessario esprimere gli estremi d'integrazione per integrali di Grassmann.

Operiamo il cambiamento di variabili  $\zeta_i = b_{ij} \chi_j$ , in quanto vale la (2.13) abbiamo che

$$\prod_{i=1}^m d\chi_i^* d\chi_i = \det b \prod_{i=1}^m d\chi_i^* d\zeta_i \quad (2.58)$$

Perciò la (2.57) diventa

$$\begin{aligned} \det b \int \left( \prod_{i=1}^m d\chi_i^* d\zeta_i \right) \exp \left( - \sum_{i,j=1}^m \chi_i^* \zeta_j \right) &= \det b \left[ \int d\chi^* d\zeta \exp(-\chi^* \zeta) \right]^m \\ &= \det b \left[ \int d\chi^* d\zeta (1 - \chi^* \zeta) \right]^m \\ &= \det b \end{aligned}$$



dove abbiamo sviluppato l'esponenziale e inoltre per le (2.8) si ha che  $\int d\chi^* d\zeta (1 - \chi^* \zeta) = 1$ . Quindi siamo giunti a

$$\int \left( \prod_{i=1}^m d\chi_i^* d\chi_i \right) \exp \left( - \sum_{i,j=1}^m \chi_i^* b_{ij} \chi_j \right) = \det b \quad (2.59)$$

Mentre un integrale Gaussiano su variabili bosoniche dava come risultato l'inverso del determinante della matrice, quello fermionico dà il determinante della matrice. Allora è possibile esprimere il rapporto tra due determinanti come un integrale Gaussiano "misto", ovvero un superintegrale.

### 2.3.3 SuperIntegrali Gaussiani

Combinando i risultati dei due paragrafi precedenti e rammentando la definizione di superdeterminante (2.42), si può facilmente affermare che vale la seguente relazione

$$\begin{aligned} \frac{\det b}{\det a} &= \left[ \text{Sdet} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \int \left( \prod_{i=1}^m \frac{d^2 S_i}{\pi} d\chi_i^* d\chi_i \right) \exp \left[ - \sum_{i,j=1}^m (S_i^* a_{ij} S_j + \chi_i^* b_{ij} \chi_j) \right] \end{aligned}$$

Nel nuovo linguaggio super-simmetrico possiamo scrivere

$$(\text{Sdet } F)^{-1} = \int d\Phi^* d\Phi \exp(-\Phi^\dagger F \Phi) \quad (2.60)$$

dove

$$\Phi = \begin{pmatrix} S \\ \chi \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Discutiamo ora le trasformazioni delle variabili d'integrazione nei superintegrali  $(S^*, S, \chi^*, \chi) \mapsto (z^*, z, \zeta^*, \zeta)$ . Consideriamo trasformazioni separate per le variabili bosoniche e fermioniche e inoltre prendiamo in esame solo quelle lineari delle variabili fermioniche, allora lo Jacobiano della trasformazione è

$$\begin{aligned} J \left( \frac{S^*, S, \chi^*, \chi}{z^*, z, \zeta^*, \zeta} \right) &= \det \left( \frac{\partial(S^*, S)}{\partial(z^*, z)} \right) \det \left( \frac{\partial(\chi^*, \chi)}{\partial(\zeta^*, \zeta)} \right)^{-1} \\ &= \text{Sdet} \left( \frac{\partial(S^*, S, \chi^*, \chi)}{\partial(z^*, z, \zeta^*, \zeta)} \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

L'espressione precedente, spesso denominata Bereziniano in onore del matematico russo Felix Berezin pioniere della supermatematica, può essere generalizzata a trasformazioni più generali che "mescolano" le variabili commutanti con quelle anticommutanti. Per un dimostrazione generale della (2.61) si può consultare [9].

Quindi l'uguaglianza (2.60) è valida per supermatrici più generali di quella considerata precedentemente, cioè affinché valga la (2.60) non è necessario che le matrici  $\sigma$  e  $\rho$  siano nulle. Per vedere questo basta operare il cambiamento di variabile  $\Psi = F\Phi$ , usare la (2.61) ed infine notare che l'integrale rimanente è uguale all'unità.

### Trasformazione di Hubbard-Stratonovitch

Concludiamo il capitolo con un'uguaglianza, chiamata trasformazione di Hubbard-Stratonovitch, che ci tornerà utile nel seguito. Presa la supermatrice  $2 \times 2$  non Hermitiana

$$\sigma = \begin{pmatrix} v & \alpha^* \\ \alpha & iy \end{pmatrix} \quad \sigma^\dagger = \begin{pmatrix} v & \alpha^* \\ \alpha & -iy \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

con  $v$  e  $y$  reali, vale la seguente uguaglianza

$$\int \left( \frac{dvdy}{2\pi} d\alpha^* d\alpha \right) \exp[-\text{Str} \sigma^2 - 2i\sqrt{g} \text{Str}(\rho\sigma^\dagger)] = \exp(-g \text{Str} \rho^2) \quad (2.63)$$

per un'arbitraria supermatrice  $2 \times 2$   $\rho$  e uno scalare reale  $g$ .  
Notiamo innanzitutto che

$$\text{Str} \sigma^2 = v^2 + y^2 + 2\alpha^* \alpha = \text{Str} \sigma^{\dagger 2}$$

inoltre, utilizzando le proprietà degli integrali Gaussiani bosonici e fermionici, abbiamo che

$$\int \left( \frac{dvdy}{2\pi} d\alpha^* d\alpha \right) \exp(-\text{Str} \sigma^2) = \int \left( \frac{dvdy}{2\pi} d\alpha^* d\alpha \right) \exp(-\text{Str} \sigma^{\dagger 2}) = 1$$

Completando il quadrato nell'esponenziale e traslando le variabili otteniamo, dalla linearità della traccia,

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{dvdy}{2\pi} d\alpha^* d\alpha \right) \exp[-\text{Str} \sigma^2 - 2i\sqrt{g} \text{Str}(\rho\sigma^\dagger)] \\ &= \int \left( \frac{dvdy}{2\pi} d\alpha^* d\alpha \right) \exp[-\text{Str} \sigma^{\dagger 2} - 2i\sqrt{g} \text{Str}(\rho\sigma^\dagger)] \\ &= \exp(-g \text{Str} \rho^2) \int \left( \frac{dvdy}{2\pi} d\alpha^* d\alpha \right) \exp[-\text{Str}(\sigma^{\dagger 2} + i\sqrt{g}\rho)^2] \\ &= \exp(-g \text{Str} \rho^2) \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. La trasformazione di Hubbard-Stratonovitch può allora essere considerata come una generalizzazione della relazione  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-(ax^2 + bx + c)] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(\frac{b^2}{4a} - c)$ , con  $x$  variabile ordinaria reale, per variabili commutanti e anticommutanti.

## Capitolo 3

# Densità degli autovalori di matrici random a banda

*Usando i metodi super-simmetrici, calcoliamo la densità degli autovalori per matrici random a banda Hermitiane. Dimostreremo che questa densità è data dalla legge del semicerchio di Wigner come nel caso di matrici random “piene” appartenenti all’Ensemble Gaussiano Unitario.*

Inizialmente le proprietà delle matrici random a banda furono studiate in modo numerico a causa della difficoltà d’applicazione di metodi analitici dovuta alla non invarianza rotazionale delle BRM. Nel 1991 Casati, Izraeliv e Molinari [10] tramite simulazioni numeriche trovarono che la densità degli autovalori di matrici random a banda obbediva alla legge del semicerchio di Wigner.

### 3.1 Metodo analitico

In questa sezione vogliamo confermare la conclusione di Casati, Izraeliv e Molinari *analiticamente* con l’ausilio dei metodi super-simmetrici. Il procedimento seguito si basa su [11]

#### 3.1.1 Preliminari

Sia  $P(H)d[H]$  una distribuzione di probabilità in un ensemble(insieme) di matrici random  $H$  e  $\tilde{H}(H)$  un’arbitraria matrice dipendente da  $H$ . La densità degli autovalori  $\rho(x)$ , non normalizzata, per una specifica matrice  $\tilde{H}$  è

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \quad (3.1)$$

dove  $N$  è la dimensione della matrice e  $x_1, \dots, x_N$  indicano gli autovalori di  $\tilde{H}$ .

Tale quantità può essere calcolata a partire dalla funzione di Green

$$G(x) = \text{Tr} \frac{1}{x - \tilde{H}} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{x - x_j} \quad (3.2)$$

Infatti, considerando  $x$  come una variabile complessa,  $x \mapsto x + i\epsilon = x^+$ , e facendola tendere all'asse reale da sopra, con l'ausilio della formula di Sokhotsky-Plemelj,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - a \pm i\epsilon} = P \frac{1}{x - a} \mp i\pi\delta(x - a)$ , abbiamo che la densità  $\rho(x)$  è proporzionale alla parte immaginaria della funzione di Green  $G(x)$  ( il limite  $\epsilon \rightarrow 0$  è sottointeso)

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G(x^+) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \text{Tr} \frac{1}{x^+ - \tilde{H}} \quad (3.3)$$

Ora introduciamo la cosiddetta funzione generatrice  $Z(j)$ . Sia  $a$  un'ordinaria matrice  $N \times N$  e con  $I$  indichiamo la matrice identità di dimensione  $N \times N$ . Definiamo la funzione generatrice  $Z(j)$  nella seguente maniera

$$Z(j) = \frac{\det i(a + jI)}{\det i(a - jI)} \quad (3.4)$$

dove il fattore  $i$  è posto per futura convenienza. Ma la (3.4) può essere riscritta nel seguente modo

$$\begin{aligned} Z(j) &= \frac{\det(a + jI)}{\det(a - jI)} = \frac{\det[a(I + ja^{-1})]}{\det[a(I - ja^{-1})]} \\ &= \exp \text{Tr}[\ln(I + ja^{-1}) - \ln(I - ja^{-1})] = \exp \text{Tr}(2ja^{-1}) \\ &= \exp(2j \text{Tr} a^{-1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove abbiamo usato il teorema di Binet, la nota identità  $\ln \det(\dots) = \text{Tr} \ln(\dots)$ , lo sviluppo del logaritmo di una matrice e la linearità della traccia.

Derivando quest'ultima espressione rispetto a  $j$  e poi ponendo  $j = 0$ , abbiamo che

$$\left. \frac{\partial}{\partial j} Z(j) \right|_{j=0} = 2 \text{Tr} a^{-1} \quad (3.6)$$

Siamo arrivati a una comoda rappresentazione della traccia dell'inversa di una matrice.

Dunque la funzione di Green (3.2) può essere espressa nella forma

$$G(x^+) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial j} Z(j) \Big|_{j=0} \quad (3.7)$$

con la funzione generatrice  $Z(j)$  così fatta

$$Z(j) = \frac{\det i(x^+ I - \tilde{H} + jI)}{\det i(x^+ I - \tilde{H} - jI)} \quad (3.8)$$

Grazie alla (2.60), la (3.8) è esprimibile come un superintegrale Gaussiano

$$Z(j) = \frac{\det i(x^+I - \tilde{H} + jI)}{\det i(x^+I - \tilde{H} - jI)} = \int d\Psi^* d\Psi \exp[2i\Psi^\dagger(\mathcal{X}^+ - \tilde{\mathcal{H}} + \mathcal{J})\Psi] \quad (3.9)$$

con  $\Psi$  supervettore  $(z_1 \dots z_N \xi_1 \dots \xi_N)^T$  e  $\mathcal{X}^+ = \text{diag}(x^+I, x^+I)$ ,  $\tilde{\mathcal{H}} = \text{diag}(\tilde{H}, \tilde{H})$ ,  $\mathcal{J} = \text{diag}(-jI, jI)$  sono supermatrici  $2N \times 2N$  diagonali a blocchi. Il fattore  $i$  introdotto precedentemente assicura la convergenza dell'integrale ed inoltre abbiamo inserito un fattore 2 poichè ci sarà utile nel seguito.

Tuttavia in questo caso non siamo interessati alla densità degli autovalori di una singola matrice random  $\tilde{H}$ , ma alla sua media  $\overline{\rho(x)}$  sull'intero ensemble, cioè

$$\overline{\rho(x)} = \int d[H]P(H)\rho(x) \quad (3.10)$$

Allora per ottenere  $\overline{\rho(x)}$  medieremo su tutto l'ensemble la funzione generatrice  $Z(j)$ , data da (3.8); dato che  $Z(j)$  ha la forma (3.9) tale media diventa più semplice da svolgere, infatti si ha che

$$\overline{Z(j)} = \int d[H]P(H) \int d\Psi^* d\Psi \exp[2i\Psi^\dagger(\mathcal{X}^+ - \tilde{\mathcal{H}} + \mathcal{J})\Psi] \quad (3.11)$$

Riassumendo per trovare la densità degli autovalori  $\overline{\rho(x)}$  procederemo in tre step

1. Calcoliamo la funzione generatrice  $\overline{Z(j)}$  data da (3.11)
2. Deriviamo  $\overline{Z(j)}$  rispetto a  $j$  e poi poniamo  $j = 0$  per ottenere la funzione di Green  $\overline{G(x^+)}$
3. Prendiamo la parte immaginaria di  $\overline{G(x^+)}$

### 3.1.2 Definizione BRM

Una matrice random a banda (BRM)  $\tilde{H}$ , con banda  $b$ , è una matrice  $N \times N$  tale che i suoi elementi  $\tilde{H}_{jk} = 0$  per  $|j - k| \geq b$ . In questo lavoro consideriamo una particolare classe di BRM:

$$\tilde{H}_{jk} = H_{jk}F_{jk} = H_{jk}F(j - k) \quad (3.12)$$

con  $1 \leq j, k \leq N$  e dove la matrice  $H_{jk}$  appartiene al GUE, ovvero

$$P(H) = \mathcal{N} \exp(-\text{Tr } H^2), \quad H^\dagger = H \quad (3.13)$$

In (3.13)  $\mathcal{N}$  è una costante di normalizzazione imposta dalla condizione  $\int d[H]P(H) = 1$ , mentre  $F(j - k)$  è una funzione liscia a forma di campana

che ha il compito di creare la struttura “a banda” della matrice. Scegliamo la Gaussiana come funzione  $F(j - k)$

$$F_{jk} = F(j - k) = \left( \frac{2}{\pi b^2} \right)^{1/4} \exp \left[ - \frac{(j - k)^2}{4b^2} \right] = F(k - j) = F_{kj} \quad (3.14)$$

con il parametro  $b$  che rappresenta la larghezza della banda; infatti quando  $|j - k| > b$  l'elemento di matrice  $F_{jk}$  diventa trascurabile, a causa della forma Gaussiana, così che  $\tilde{H}_{jk} = 0$  per  $|j - k| > b$ . Però i risultati che otterremo non dipendono dalla particolare scelta di  $F(j - k)$ . Definiamo  $V_{jk} = (F_{jk})^2$  e osserviamo che questa ha sviluppo nella base discreta di Fourier,  $u_\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(-i \frac{2\pi\mu}{N} k)$ , così fatto

$$V(j - k) = \sum_{\mu=0}^{N-1} g(\mu) \frac{\cos[\omega_\mu(j - k)]}{N} = \sum_{\mu=0}^{N-1} g(\mu) \tilde{\epsilon}_\mu(j) \tilde{\epsilon}_\mu(k) \quad (3.15)$$

con

$$\omega_\mu = \frac{2\pi\mu}{N}, \quad g(\mu) = \exp \left( - \frac{b^2 \omega_\mu^2}{2} \right) \quad (3.16)$$

L'espressione di  $g(\mu)$  è valida solo nel limite di grandi  $N$ . Inoltre notiamo che valgono le seguenti relazioni di ortogonalità per gli autovettori della base

$$\sum_{j=1}^N \tilde{\epsilon}_\mu(j) \tilde{\epsilon}_{\mu'}(j) = \delta_{\mu\mu'} \quad (3.17)$$

$$\sum_{j=1}^N \tilde{\epsilon}_\mu(j) = 0 \quad \text{per ogni } \mu \neq 0 \quad (3.18)$$

Banalmente la (3.18) segue dalla (3.17) ponendo  $\mu' = 0$ .

### 3.1.3 Media di ensemble e trasformazione di H-S

Al fine di integrare su  $H$  nella (3.11), osserviamo che

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger \tilde{\mathcal{H}} \Psi &= \sum_{j,k=1}^N (z_j^* \tilde{H}_{jk} z_k + \xi_j^* \tilde{H}_{jk} \xi_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^N H_{jk} F_{kj} (z_k z_j^* - \xi_k \xi_j^*) = \text{Tr}(H \tilde{B}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

dove

$$\tilde{B}_{kj} = F_{kj} (z_k z_j^* - \xi_k \xi_j^*) \quad (3.20)$$

Ma allora, usando la (3.13) e completando il quadrato nell'esponente, otteniamo che

$$\begin{aligned} \int d[H]P(H) \exp(-2i\Psi^\dagger \tilde{\mathcal{H}}\Psi) &= \int d[H]P(H) \exp(-2i \operatorname{Tr} H \tilde{B}) \\ &= \exp(-\operatorname{Tr} \tilde{B}^2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

e così abbiamo svolto la media sull'intero ensemble delle matrici random nella (3.11). Vogliamo rimarcare che la media sull'ensemble è stata svolta con facilità grazie all'ausilio dei metodi super-simmetrici che ci hanno permesso di esprimere la funzione generatrice  $\overline{Z(j)}$  come un superintegrale Gaussiano. Inoltre si può notare l'utilità del fattore 2 precedentemente posto nell'esponente. Perciò la (3.11) diventa

$$\overline{Z(j)} = \int d\Psi^* d\Psi \exp[2i\Psi^\dagger(\mathcal{X}^+ + \mathcal{J})\Psi] \exp(-\operatorname{Tr} \tilde{B}^2) \quad (3.22)$$

Sfortunatamente, questo integrale sui supervettori  $\Psi$  e  $\Psi^\dagger$  non è più Gaussiano poichè la matrice  $\tilde{B}$  è bilineare in  $\Psi, \Psi^\dagger$  così che compaiono nell'esponente dei termini quartici. Tuttavia possiamo manipolare il fattore  $\exp(-\operatorname{Tr} \tilde{B}^2)$  grazie alla *trasformazione di Hubbard-Stratonovitch*. A tal fine definiamo le matrici  $D_\mu$  di dimensione  $N \times N$  e le supermatrici  $2 \times 2$   $\mathcal{B}_\mu$

$$(D_\mu)_{jk} = \tilde{\epsilon}_\mu(j)\delta_{jk} \quad \mathcal{B}_\mu = \begin{pmatrix} z^\dagger D_\mu z & \xi^\dagger D_\mu z \\ z^\dagger D_\mu \xi & \xi^\dagger D_\mu \xi \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

(ricordo che  $z$  è un vettore a  $N$  componenti commutanti e  $\xi$  a  $N$  componenti anticommutanti). Quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \tilde{B}^2 &= \sum_{j,k} \tilde{B}_{jk} \tilde{B}_{kj} = \sum_{j,k} (F_{jk})^2 (z_j z_k^* - \xi_j \xi_k^*) (z_k z_j^* - \xi_k \xi_j^*) \\ &= \sum_\mu \sum_{j,k} g(\mu) \tilde{\epsilon}_\mu(j) \tilde{\epsilon}_\mu(k) (z_j z_k^* - \xi_j \xi_k^*) (z_k z_j^* - \xi_k \xi_j^*) \\ &= \sum_\mu g(\mu) \left[ \left( \sum_j \tilde{\epsilon}_\mu(j) z_j^* z_j \right)^2 + 2 \left( \sum_j \tilde{\epsilon}_\mu(j) \xi_j^* z_j \right) \left( \sum_j \tilde{\epsilon}_\mu(j) z_j^* \xi_j \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \sum_j \tilde{\epsilon}_\mu(j) \xi_j^* \xi_j \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

dove abbiamo usato la (3.20), (3.14), lo sviluppo (3.15) ed infine abbiamo svolto il prodotto tra le variabili  $z$  e  $\xi$  e usato le rispettive algebre di commutazione o anticommutazione. D'altra parte, si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{Str} \mathcal{B}_\mu^2 &= \left( \sum_j \tilde{\epsilon}_\mu(j) z_j^* z_j \right)^2 + 2 \left( \sum_j \tilde{\epsilon}_\mu(j) \xi_j^* z_j \right) \left( \sum_j \tilde{\epsilon}_\mu(j) z_j^* \xi_j \right) \\ &\quad - \left( \sum_j \tilde{\epsilon}_\mu(j) \xi_j^* \xi_j \right)^2 \end{aligned}$$

Dunque otteniamo che

$$\text{Tr } \tilde{B}^2 = \sum_{\mu} g(\mu) \text{Str } \mathcal{B}_{\mu}^2 \quad (3.25)$$

Servendoci della trasformazione di Hubbard-Stratonovitch (2.63), la funzione generatrice  $\overline{Z(j)}$  (3.11) diventa

$$\begin{aligned} \overline{Z(j)} &= \int d\Psi^* d\Psi \exp [2i\Psi^{\dagger}(\mathcal{X}^+ + \mathcal{J})\Psi] \exp \left( - \sum_{\mu} g(\mu) \text{Str } \mathcal{B}_{\mu}^2 \right) \\ &= \int d\Psi^* d\Psi \exp [2i\Psi^{\dagger}(\mathcal{X}^+ + \mathcal{J})\Psi] \\ &\quad \times \int \left( \prod_{\mu} d\sigma_{\mu} \right) \exp \left( - \sum_{\mu} \text{Str } \sigma_{\mu}^2 \right) \\ &\quad \times \exp \left( - 2i \sum_{\mu} \sqrt{g(\mu)} \text{Str}(\mathcal{B}_{\mu} \sigma_{\mu}^{\dagger}) \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nella (3.26) abbiamo definito le supermatrici non Hermitiane  $\sigma_{\mu}$  di dimensione  $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} v_{\mu} & \alpha_{\mu}^* \\ \alpha_{\mu} & iy_{\mu} \end{pmatrix} \quad d\sigma_{\mu} = \frac{dv_{\mu} dy_{\mu}}{2\pi} d\alpha_{\mu}^* d\alpha_{\mu} \quad (3.27)$$

L'integrale sul supervettore  $\Psi$  e  $\Psi^{\dagger}$  ha assunto ora una forma Gaussiana. Il suo calcolo è reso più agevole se sostituiamo il supervettore  $\Psi$  a  $(2N)$ -componenti con  $N$  supervettori  $\Phi_j$  a 2 componenti. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \text{Str}(\mathcal{B}_{\mu} \sigma_{\mu}^{\dagger}) &= z^{\dagger} D_{\mu} z v_{\mu} + \xi^{\dagger} D_{\mu} z \alpha_{\mu} - z^{\dagger} D_{\mu} \xi \alpha_{\mu}^* + i \xi^{\dagger} D_{\mu} \xi y_{\mu} \\ &= \Psi^{\dagger} (\sigma_{\mu} \otimes D_{\mu}) \Psi \end{aligned} \quad (3.28)$$

dove  $\otimes$  indica il prodotto di Kronecker tra matrici <sup>1</sup>. Adesso, usando i supervettori  $\Phi_j$  a due componenti, possiamo esprimere l'esponente nella (3.26) come

$$\begin{aligned} &\Psi^{\dagger} (\mathcal{X}^+ + \mathcal{J}) \Psi - \sum_{\mu} \sqrt{g(\mu)} \text{Str}(\mathcal{B}_{\mu} \sigma_{\mu}^{\dagger}) \\ &= \Psi^{\dagger} \left( \mathcal{X}^+ + \mathcal{J} - \sum_{\mu} \sqrt{g(\mu)} (\sigma_{\mu} \otimes D_{\mu}) \right) \Psi \\ &= \sum_{j=1}^N \Phi_j^{\dagger} \left( x^+ I + jE - \sum_{\mu} \sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_{\mu}(j) \sigma_{\mu} \right) \Phi_j \end{aligned} \quad (3.29)$$

<sup>1</sup>Se  $A$  è una matrice  $m \times n$  e  $B$  una matrice  $p \times q$ , allora il loro prodotto di Kronecker  $A \otimes B$  è una matrice  $mp \times nq$  definita a blocchi nel modo seguente:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$



dove

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} z_j \\ \xi_j \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

e  $I$  è la supermatrice identica  $2 \times 2$ . Allora la funzione generatrice assume la forma

$$\begin{aligned} \overline{Z(j)} &= \int \left( \prod_{\mu} d\sigma_{\mu} \right) \exp \left( - \sum_{\mu} \text{Str} \sigma_{\mu}^2 \right) \\ &\quad \times \int \left( \prod_j d\Phi_j \right) \exp \left[ 2i \sum_j \Phi_j^{\dagger} \left( x^+ I + jE - \sum_{\mu} \sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_{\mu}(j) \sigma_{\mu} \right) \Phi_j \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

L'integrale Gaussiano sulle variabili  $\Phi_j$  può essere svolto immediatamente in accordo con la (2.60)

$$\overline{Z(j)} = \int \left( \prod_{\mu} d\sigma_{\mu} \right) \exp \left[ - \sum_{\mu} \text{Str} \sigma_{\mu}^2 - \sum_j \ln \text{Sdet} \left( x^+ I + jE - \sum_{\mu} \sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_{\mu}(j) \sigma_{\mu} \right) \right] \quad (3.32)$$

### 3.1.4 Calcolo della densità

Per calcolare l'integrale (3.32) tratteremo separatamente la variabile  $\sigma_0$  dalle altre variabili  $\sigma_{\mu}$  con  $\mu \neq 0$ . Poniamo  $Y = \sigma_0 - \sqrt{N}(x^+ I + jE)$ , dunque la funzione generatrice assume la forma

$$\begin{aligned} \overline{Z(j)} &= \int dY \left( \prod_{\mu \neq 0} d\sigma_{\mu} \right) \exp \{ - \text{Str} [Y + \sqrt{N}(x^+ I + jE)]^2 \} \\ &\quad \times \exp \left[ - \sum_{\mu \neq 0} \text{Str} \sigma_{\mu}^2 - \sum_j \ln \text{Sdet} \left( \frac{Y}{\sqrt{N}} + \sum_{\mu \neq 0} \sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_{\mu}(j) \sigma_{\mu} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

dove abbiamo usato che  $\sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_0(j) = \frac{1}{\sqrt{N}}$ , la (2.46) e  $\ln \text{Sdet}(-I) = 0$ . Ora cambiamo le variabili d'integrazione diagonalizzando  $Y$

$$Y = U^{-1} S U \quad \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & i s_2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

dove  $U$  è una supermatrice unitaria. Allo stesso tempo cambiamo le variabili  $\sigma_{\mu}$  in  $U^{-1} \sigma_{\mu} U$  mantenendo per esse il vecchio nome  $\sigma_{\mu}$ . Osserviamo che questa trasformazione unitaria di *tutte* le variabili non cambia alcun superdeterminante presente nella (3.33) grazie alla (2.48). Indicando lo Jacobiano della trasformazione (3.34) con  $\mathfrak{D}(S, U)$  ed utilizzando la proprietà ciclica

della supertraccia (2.39) otteniamo che

$$\begin{aligned} \overline{Z(j)} &= \int dS dU \left( \prod_{\mu \neq 0} d\sigma_\mu \right) \mathfrak{D}(S, U) \exp\{-\text{Str}[S + \sqrt{N}U(x^+I + jE)U^{-1}]^2\} \\ &\times \exp \left[ -\sum_{\mu \neq 0} \text{Str} \sigma_\mu^2 - \sum_j \ln \text{Sdet} \left( \frac{S}{\sqrt{N}} + \sum_{\mu \neq 0} \sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_\mu(j) \sigma_\mu \right) \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

dove  $dS = ds_1 ds_2, dU = d\eta_1 d\eta_2$  ( $\eta_1, \eta_2$  sono le variabili nella matrice  $U$ ). Esprimiamo lo Jacobiano  $\mathfrak{D}(S, U)$  della (3.34) come

$$\mathfrak{D}(S, U) = \mathfrak{B}^2(S) \quad \text{con} \quad \mathfrak{B}(S) = \frac{1}{s_1 - is_2} \quad (3.36)$$

L'integrazione sulla supermatrice  $U$  può essere effettuata usando la generalizzazione della formula di Itzykson-Zuber riguardante gli integrali su gruppi unitari [12, AppendiceB]. Riscaldando le variabili  $s_1 \mapsto \sqrt{N}s_1$  e  $s_2 \mapsto \sqrt{N}s_2$  otteniamo che

$$\overline{Z(j)} = N \int dS \frac{\mathfrak{B}(S)}{\pi \mathfrak{B}(x^+I + jE)} \exp[-N \text{Str}(S + x^+I + jE)^2] \mathcal{F}(S) \quad (3.37)$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$\mathcal{F}(S) = \int \left( \prod_{\mu \neq 0} d\sigma_\mu \right) \exp \left[ -\sum_{\mu \neq 0} \text{Str} \sigma_\mu^2 - \sum_j \ln \text{Sdet} \left( S + \sum_{\mu \neq 0} \sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_\mu(j) \sigma_\mu \right) \right] \quad (3.38)$$

La scrittura  $\mathfrak{B}(x^+I + jE)$  è dev'essere intesa come la (3.36) con  $s_1$  e  $s_2$  autovalori di  $x^+I + jE$ , dunque avremo che

$$\mathfrak{B}(x^+I + jE) = -\frac{1}{2j} \quad (3.39)$$

Per semplificare la notazione introduciamo la supermatrice  $2 \times 2$ , che chiameremo  $\sigma(j)$ , così fatta

$$\sigma(j) = \begin{pmatrix} v(j) & \alpha^*(j) \\ \alpha(j) & iy(j) \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

dove

$$v(j) = \sum_{\mu \neq 0} \sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_\mu(j) v_\mu, \quad y(j) = \sum_{\mu \neq 0} \sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_\mu(j) y_\mu \quad (3.41)$$

$$\alpha(j) = \sum_{\mu \neq 0} \sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_\mu(j) \alpha_\mu, \quad \alpha^*(j) = \sum_{\mu \neq 0} \sqrt{g(\mu)} \tilde{\epsilon}_\mu(j) \alpha_\mu^* \quad (3.42)$$

Allora il logaritmo del superdeterminante presente nella (3.38) è riscrivibile come

$$\begin{aligned} \ln \text{Sdet}[S + \sigma(j)] &= \text{Str} \ln[S + \sigma(j)] \\ &= \text{Str} \ln \left[ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\alpha^*(j) \\ b^{-1}\alpha(j) & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \ln a - \ln b + \text{Str} \ln \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\alpha^*(j) \\ b^{-1}\alpha(j) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.43)$$

dove abbiamo posto  $a = s_1 + v(j)$ ,  $b = is_2 + iy(j)$  e usato la (2.45),(2.41) ed infine la definizione di supertraccia. Per valutare il secondo termine della (3.43) si utilizza lo sviluppo in serie del logaritmo e si osserva che contribuisce solo il secondo termine dello sviluppo poichè  $\alpha^2(j) = 0$ ,  $[\alpha^*(j)]^2 = 0$ , quindi si ottiene che

$$\ln \text{Sdet}[S + \sigma(j)] = \ln[s_1 + v(j)] - \ln[is_2 + iy(j)] - \frac{\alpha^*(j)\alpha(j)}{[s_1 + v(j)][is_2 + iy(j)]} \quad (3.44)$$

Sostituendo la (3.44) nella (3.38) ed esplicitando  $\text{Str} \sigma_\mu^2$ , giungiamo a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N-1} \int \left( \prod_{\mu \neq 0} dv_\mu dy_\mu d\alpha_\mu^* d\alpha_\mu \right) \\ &\times \exp \left\{ - \sum_{\mu \neq 0} (v_\mu^2 + y_\mu^2) - \sum_j [\ln[s_1 + v(j)] - \ln[is_2 + iy(j)]] \right\} \\ &\times \exp \left\{ - \sum_{\mu \neq 0} 2\alpha_\mu^* \alpha_\mu + \sum_j \frac{\alpha^*(j)\alpha(j)}{[s_1 + v(j)][is_2 + iy(j)]} \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Integrando sulle variabili anticommutanti  $\alpha_\mu, \alpha_\mu^*$ , in accordo con (2.57), e ponendo

$$v_\mu = \sqrt{\frac{N}{2}} v_\mu \quad y_\mu = \sqrt{\frac{N}{2}} y_\mu \quad \epsilon_\mu(j) = \sqrt{\frac{N}{2}} \tilde{\epsilon}_\mu(j) \quad (3.46)$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S) &= \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{N-1} \int \left( \prod_{\mu \neq 0} dv_\mu dy_\mu \right) \exp \left( - \frac{N}{2} \sum_{\mu \neq 0} (v_\mu^2 + y_\mu^2) \right) \\ &\times \exp \left\{ - \sum_j \left[ \ln \left( s_1 + \sqrt{\frac{N}{2}} v(j) \right) - \ln \left( is_2 + i \sqrt{\frac{N}{2}} y(j) \right) \right] + \ln \det M \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

dove  $M$  è una matrice ordinaria  $(N-1) \times (N-1)$  data da

$$M_{\mu\mu'} = \delta_{\mu\mu'} - \frac{1}{N} \sum_j \frac{\sqrt{g(\mu)}\epsilon_\mu(j)\sqrt{g(\mu')}\epsilon_{\mu'}(j)}{\left(s_1 + \sum_{\mu'' \neq 0} \sqrt{g(\mu'')}\epsilon_{\mu''}(j)v_{\mu''}\right)\left(is_2 + \sum_{\mu'' \neq 0} \sqrt{g(\mu'')}\epsilon_{\mu''}(j)iy_{\mu''}\right)} \quad (3.48)$$

### 3.1.5 Metodo del punto sella

L'integrale sulle variabili commutanti  $v_\mu, y_\mu$  è difficile da svolgere in generale. Dunque assumeremo che la banda  $b$  ha l'andamento  $b \propto N^\beta$ , con  $0 < \beta \leq 1$ , in modo che il rapporto  $b/N \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Per ottenere il valore dell'integrale (3.47) ci serviamo del metodo di punto sella. Nell'appendice, sviluppando l'esponente dell'integranda fino ai termini quadratici in  $v_\mu$  e  $y_\mu$ , mostreremo che il punto di sella corrisponde a  $v_\mu = y_\mu = 0$  e qui troveremo anche l'espressione delle fluttuazioni attorno al punto sella.

In definitiva  $\mathcal{F}(S)$  risulta essere

$$\mathcal{F}(S) = \exp \left[ -N \ln s_1 + N \ln is_2 + \sum_{\mu \neq 0} \ln \left( 1 - \frac{g(\mu)}{2s_1 is_2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq 0} \ln \det [I + g(\mu)a(\mu, S)] \right] \quad (3.49)$$

dove la forma esplicita della matrice  $a(\mu, S)$  si può trovare nell'appendice.

Sostituendo l'espressione appena trovata (3.49) nella (3.37), la funzione generatrice  $\overline{Z}(j)$  è

$$\overline{Z}(j) = - \int dS \frac{2jN}{\pi(s_1 - is_2)} \times \exp \left\{ -N[(s_1 + x - j)^2 - (is_2 + x + j)^2 + \ln s_1 - \ln is_2 - \frac{1}{b}\mathcal{L}(s_1, is_2)] \right\} = \quad (3.50)$$

Per calcolare questo integrale ricorriamo ancora al punto sella. Ricordiamo che data la funzione  $g(s_1, s_2) \exp[-Nf(s_1, s_2)]$  il metodo del punto sella ci permette di calcolare il suo integrale nel limite di  $N \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 g(s_1, s_2) \exp[-Nf(s_1, s_2)] = \frac{2\pi}{N} g(\overline{s}_1, \overline{s}_2) (\det \Lambda)^{-1/2} \times \exp[-Nf(\overline{s}_1, \overline{s}_2)] \quad (3.51)$$

dove  $(\overline{s}_1, \overline{s}_2)$  è un estremo della funzione  $f(s_1, s_2)$  e  $\Lambda$  è la matrice Hessiana di  $f(s_1, s_2)$  valutata in  $(\overline{s}_1, \overline{s}_2)$ . Nel valutare il punto sella manterremo

solamente i termini di correzione di ordine  $1/b$ ; tuttavia i risultati possono essere generalizzati per qualsiasi ordine di  $1/b$ .

L'espansione di  $\mathcal{L}$  può essere scritta come

$$\mathcal{L}(s_1, is_2) = \frac{b}{2N} \sum_{\mu \neq 0} \ln \left( \frac{\left(1 - \frac{g(\mu)}{2s_1 is_2}\right)^2}{\left(1 - \frac{g(\mu)}{2s_1^2}\right) \left(1 - \frac{g(\mu)}{2(is_2)^2}\right)} \right) + O\left(\frac{1}{b}\right) + \dots \quad (3.52)$$

Notiamo che  $\mathcal{L}$  è simmetrica nello scambio di  $s_1$  con  $s_2$  ed inoltre  $\mathcal{L}(s, s) = 0$  per qualunque  $s$ .

L'equazioni per trovare il punto sella  $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$  sono

$$\begin{cases} 2(\bar{s}_1 + x - j) + \frac{1}{\bar{s}_1} + \frac{1}{b} \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{s}_1, \bar{is}_2)}{\partial s_1} = 0 \\ -2(\bar{is}_2 + x + j) - \frac{1}{\bar{is}_2} - \frac{1}{b} \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{s}_1, \bar{is}_2)}{\partial is_2} = 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

Ora sviluppiamo il punto sella

$$\begin{cases} \bar{s}_1 = \bar{s}_{10} + \frac{1}{b} \bar{s}_{11} + \dots \\ \bar{is}_2 = \bar{is}_{20} + \frac{1}{b} \bar{is}_{21} + \dots \end{cases} \quad (3.54)$$

Allo stesso tempo per risolvere le (3.53) è sufficiente sviluppare ogni termine presente nella (3.54) fino al termine lineare in  $j$ ; in questo modo otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{s}_{10} &= s(x) + \frac{2j}{2 - 1/s^2(x)} \\ \bar{is}_{20} &= s(x) - \frac{2j}{2 - 1/s^2(x)} \\ \bar{s}_{11} = \bar{s}_{21} &= \frac{2bj}{N} \frac{1}{s^4(x)[2 - 1/s^2(x)]} \sum_{\mu \neq 0} \frac{g(\mu)}{\left(1 - \frac{g(\mu)}{2s^2(x)}\right)^2} \end{aligned} \quad (3.55)$$

dove

$$s(x) = -\frac{1}{2}x \pm \frac{i}{2}\sqrt{2 - x^2} \quad (3.56)$$

Notiamo che

$$s(x) + x = -s^*(x) \quad |s(x)|^2 = \frac{1}{2} \quad (3.57)$$

Fra le due possibili scelte di  $s(x)$  quella con parte immaginaria negativa contribuisce al punto sella. Ora non ci resta che valutare l'integranda della (3.50) e il determinante della matrice Hessiana nel punto sella (3.55). Allora abbiamo che

$$\frac{2jN}{\pi(s_1 - is_2)} \Big|_{s_1 = \bar{s}_1, s_2 = \bar{s}_2} = \frac{N}{2\pi} \left(2 - \frac{1}{s^2(x)}\right) \quad (3.58)$$

$$\left[ (s_1+x-j)^2 - (is_2+x+j)^2 + \ln s_1 - \ln is_2 - \frac{1}{b} \mathcal{L}(s_1, is_2) \right]_{s_1=\bar{s}_1, s_2=\bar{s}_2} = -4js^*(x) \quad (3.59)$$

Il contributo all'esponente di  $\mathcal{L}$  nel punto sella è nullo a causa della simmetria di  $\mathcal{L}$ . Il resto della (3.59) è stata ottenuta prendendo in considerazione i termini al massimo lineari in  $j$ .

Per quanto riguarda il determinante della matrice Hessiana  $\Lambda$  osserviamo che i termini fuori diagonale valutati nel punto sella sono dell'ordine  $O(1/b^2)$  e quindi possono essere trascurati. Invece, servendoci ancora della simmetria di  $\mathcal{L}$ , i termini diagonali risultano essere

$$\Lambda_{11}(x) = 2 - \frac{1}{s^2(x)} - \frac{1}{b} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(s(x), s(x))}{\partial s_1^2} \quad (3.60)$$

$$\Lambda_{22}(x) = 2 - \frac{1}{s^2(x)} + \frac{1}{b} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(s(x), s(x))}{\partial s_1^2} \quad (3.61)$$

così che

$$(\det \Lambda)^{1/2} = \left( 2 - \frac{1}{s^2(x)} \right) + O\left(\frac{1}{b^2}\right) \quad (3.62)$$

Ricapitolando la funzione generatrice  $\overline{Z(j)}$  è

$$\overline{Z(j)} = -\exp[4Njs^*(x)] \quad (3.63)$$

di conseguenza la funzione di Green  $G(x)$  diviene

$$\overline{G(x)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{Z(j)}}{\partial j} \Big|_{j=0} = -2Ns^*(x) \quad (3.64)$$

e perciò giungiamo alla seguente espressione per la densità media degli stati, ora normalizzata,  $\overline{\rho(x)}$

$$\frac{\overline{\rho(x)}}{N} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \overline{G(x)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{2-x^2} \quad (3.65)$$

Ovvero, la densità degli autovalori di matrici random a banda con  $b \propto N^\beta$  obbedisce alla legge del semicerchio di Wigner.

# Conclusioni

In questo lavoro abbiamo dimostrato con l'ausilio delle tecniche super-simmetriche che vale la legge del semicerchio di Wigner per la densità degli autovalori di matrici random a banda. Vogliamo sottolineare che in questo ambito i metodi super-simmetrici usati sono solamente degli strumenti matematici e non bisogna cercare di dargli un significato fisico, come invece avviene nel campo della fisica delle alte energie (partner supersimmetrici). Degno di nota il fatto che la legge di Wigner sembra essere molto generale nella teoria delle matrici random, infatti tale legge vale per ensemble Gaussiani, per le BRM e per altre tipologie di matrici random caratterizzate da elementi indipendenti; tuttavia non sappiamo dare una motivazione profonda di questa generalità.

## Appendice A

# Calcolo del punto sella

In questa appendice mostreremo che il punto sella dell'integrale (3.47) è dato da  $v_\mu = y_\mu = 0$ . Inoltre calcoleremo anche l'integrale Gaussiano dovuto alle fluttuazioni attorno al punto sella.

Prima di tutto sviluppiamo i logaritmi presenti nell'esponente dell'integranda in (3.47)

$$\sum_{j=1}^N \ln \left( s_1 + \sqrt{\frac{N}{2}} v(j) \right) = N \ln s_1 + \sqrt{\frac{N}{2}} \sum_{j=1}^N \frac{v(j)}{s_1} - \frac{N}{4} \sum_{j=1}^N \left( \frac{v(j)}{s_1} \right)^2 + \dots \quad (\text{A.1})$$

Ora, utilizzando l'ortogonalità degli autovettori  $\tilde{\epsilon}_\mu(j)$  (3.18) e la definizione di  $v(j)$  (3.41), possiamo facilmente dimostrare che il termine al primo ordine s'annulla

$$\sum_j v(j) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Invece il termine del secondo ordine risulta pari a

$$\frac{N}{4} \sum_j \left( \frac{v(j)}{s_1} \right)^2 = N \sum_\mu \frac{g(\mu) v_\mu^2}{4s_1^2} \quad (\text{A.3})$$

dove ci siamo serviti dell'altra relazione d'ortogonalità (3.17). In definitiva otteniamo che

$$\sum_{j=1}^N \ln \left( s_1 + \sqrt{\frac{N}{2}} v(j) \right) = N \ln s_1 - N \sum_\mu \frac{g(\mu) v_\mu^2}{4s_1^2} \quad (\text{A.4})$$

Un termine analogo si trova per il secondo logaritmo nell'esponente.

Ora ci occupiamo del termine  $\ln \det M$ . Espandiamo la matrice fino ai termini di secondo ordine in  $v_\mu$  e  $y_\mu$

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + \dots \quad (\text{A.5})$$



dove

$$M_{0,\mu\mu'} = \left(1 - \frac{g(\mu)}{2s_1 i s_2}\right) \delta_{\mu\mu'} = f(\mu, S) \delta_{\mu\mu'} \quad (\text{A.6})$$

$$M_{1,\mu\mu'} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_j \frac{\sqrt{g(\mu)} \epsilon_\mu(j) \sqrt{g(\mu')} \epsilon_{\mu'}(j)}{s_1 i s_2} \left( \frac{v(j)}{s_1} + \frac{i y(j)}{i s_2} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$M_{2,\mu\mu'} = -\frac{1}{2} \sum_j \frac{\sqrt{g(\mu)} \epsilon_\mu(j) \sqrt{g(\mu')} \epsilon_{\mu'}(j)}{s_1 i s_2} \quad (\text{A.8})$$

$$\times \left[ \left( \frac{v(j)}{s_1} \right)^2 + \left( \frac{i y(j)}{i s_2} \right)^2 + \frac{v(j) i y(j)}{s_1 i s_2} \right] \quad (\text{A.9})$$

Per trovare le seguenti espressioni si è utilizzato lo sviluppo di  $\frac{1}{1+v}$  e ancora la relazione d'ortogonalità (3.17). Allora il logaritmo del determinante di  $M$  può essere scritto come

$$\ln \det M = \text{Tr} \ln M = \text{Tr} \ln(M_0 + M_1 + M_2 + \dots) \quad (\text{A.10})$$

$$= \text{Tr} \ln M_0 + \text{Tr} \ln \left[ I + \frac{M_1 + M_2}{M_0} \right] \quad (\text{A.11})$$

$$= \ln \det M_0 + \text{Tr} \frac{M_1 + M_2}{M_0} - \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \frac{M_1}{M_0} \right)^2 + \dots \quad (\text{A.12})$$

dove abbiamo usato la relazione  $\ln \det(\dots) = \text{Tr} \ln(\dots)$ , l'espansione della matrice  $M$  (A.5) ed infine lo sviluppo del logaritmo di una matrice.

Il termine d'ordine zero è

$$\ln \det M_0 = \sum_{\mu \neq 0} \ln \left( 1 - \frac{g(\mu)}{2s_1 i s_2} \right) \quad (\text{A.13})$$

poichè  $M_0$  è una matrice diagonale.

Il termine del primo ordine invece risulta

$$\text{Tr} \frac{M_1}{M_0} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_j \sum_{\mu \neq 0} \frac{g(\mu) \epsilon_\mu^2(j)}{s_1 i s_2 f(\mu, S)} \left( \frac{v(j)}{s_1} + \frac{i y(j)}{i s_2} \right) \quad (\text{A.14})$$

La somma su  $\mu$  può essere svolta in questo modo

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 0} \frac{g(\mu) \epsilon_\mu^2(j)}{f(\mu, S)} = \frac{1}{2} \left( G(0, S) - \frac{g(0)}{N f(0, S)} \right) \quad (\text{A.15})$$

dove abbiamo definito

$$G(k, S) = \frac{1}{N} \sum_{\mu} \frac{g(\mu)}{f(\mu, S)} \exp -i\omega_{\mu} k \quad (\text{A.16})$$

Allora (A.15) è indipendente da  $j$  così che la traccia (A.14) è proporzionale a  $\sum_j v(j)$  o a  $\sum_j y(j)$  e dunque è nulla per la (A.2). Perciò tutti i termini del primo ordine nell'esponente dell'integranda sono nulli e di conseguenza esiste un punto sella in  $v_\mu = y_\mu = 0$ .

Ci resta da calcolare i termini del secondo ordine. Questi termini sono

$$\begin{aligned} \text{Tr} \frac{M_2}{M_0} = & -\frac{N}{4s_1 i s_2} \left( G(0, S) - \frac{g(0)}{Nf(0, S)} \right) \\ & \times \sum_{\mu \neq 0} g(\mu) \left[ \left( \frac{v_\mu}{s_1} \right)^2 + \left( \frac{i y_\mu}{i s_2} \right)^2 + \frac{v_\mu i y_\mu}{s_1 i s_2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( \frac{M_1}{M_0} \right)^2 = & \frac{N}{8(s_1 i s_2)^2} \sum_{j,k} \left( G(j-k, S) - \frac{g(0)}{Nf(0, S)} \right)^2 \\ & \times \left( \frac{v(j)}{s_1} + \frac{i y(j)}{i s_2} \right) \left( \frac{v(k)}{s_1} + \frac{i y(k)}{i s_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Definendo la funzione  $h(\mu, S)$  come

$$h(\mu, S) = \sum_k \left( G(k, S) - \frac{g(0)}{Nf(0, S)} \right)^2 \exp i \omega_\mu k \quad (\text{A.19})$$

ed utilizzando la definizione di  $v(j)$  (3.41), possiamo riscrivere la (A.18) come

$$\text{Tr} \left( \frac{M_1}{M_0} \right)^2 = \frac{N}{8(s_1 i s_2)^2} \sum_{\mu \neq 0} g(\mu) h(\mu, S) \left( \frac{v_\mu}{s_1} + \frac{i y_\mu}{i s_2} \right)^2 \quad (\text{A.20})$$

Inserendo tutti i termini trovati nell'esponente dell'integranda (3.47) abbiamo che i termini d'ordine zero possono essere portati fuori dal segno di integrale, mentre i termini quadratici formano un integrale Gaussiano che può essere facilmente calcolato. Questo integrale Gaussiano darà un contributo della forma

$$\prod_{\mu \neq 0} \frac{2\pi}{N} (\det \Delta(\mu))^{-1/2} = \left( \frac{2\pi}{N} \right)^{N-1} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\mu \neq 0} \ln \det \Delta(\mu) \right] \quad (\text{A.21})$$

dove  $\Delta(\mu) = I + g(\mu)a(\mu, S)$  ha la seguente forma

$$1 + g(\mu)a_{11}(\mu, S) = 1 - \frac{g(\mu)}{2s_1^2} \left( 1 - \frac{G(0, S) - \frac{g(0)}{Nf(0, S)}}{s_1 i s_2} - \frac{h(\mu, S)}{4(s_1 i s_2)^2} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$1 + g(\mu)a_{22}(\mu, S) = 1 - \frac{g(\mu)}{2(i s_2)^2} \left( 1 + \frac{G(0, S) - \frac{g(0)}{Nf(0, S)}}{s_1 i s_2} + \frac{h(\mu, S)}{4(s_1 i s_2)^2} \right) \quad (\text{A.23})$$

$$g(\mu)a_{12}(\mu, S) = i \frac{g(\mu)}{4s_1 i s_2} \left( \frac{G(0, S) - \frac{g(0)}{Nf(0, S)}}{s_1 i s_2} + \frac{h(\mu, S)}{2(s_1 i s_2)^2} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$g(\mu)a_{12}(\mu, S) = g(\mu)a_{21}(\mu, S) \quad (\text{A.25})$$

# Bibliografia

- [1] E. Wigner, *Ann. Math.* **62**, 548 (1955); **65**, 203 (1957).
- [2] O. Bohigas, M.J. Giannoni and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
- [3] M. V. Berry, M. Tabor, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **356**, 357, (1977)
- [4] G. Casati, B. Chirikov, *Quantum Chaos* (Cambridge University Press, 1995)
- [5] G. Casati, L. Molinari, F. Izrailev, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1851 (1990)
- [6] Y. Fyodorov, A. Mirlin, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2405 (1991)
- [7] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer, Berlin, 2001)
- [8] K. Efetov, *Supersymmetry in disorder and chaos* (Cambridge University press, 1997)
- [9] F.A. Berezin, *Introduction to Superanalysis* (Reidel, Dordrecht, 1987)
- [10] G. Casati, F. Izrailev, L. Molinari, *J. Phys. A: Math. Gen* **24**, 4755 (1991)
- [11] M. Kus, M. Lewenstein, and F. Haake, *Phys. Rev. A* **44**, 2800 (1991).
- [12] T. Guhr, *J. Math. Phys.* **32**, 336 (1991).

# Ringraziamenti

*Desidero innanzitutto ringraziare il Professor Luca Molinari per l'aiuto nella preparazione del seguente elaborato e per le ore e la pazienza che mi ha dedicato. Inoltre un sentito ringraziamento va a Marina per avermi spronato in questi tre anni e per i suoi consigli durante il periodo di tesi. Intendo poi ringraziare con affetto tutta la mia famiglia per il sostegno che mi ha sempre dato ed infine vorrei esprimere la mia sincera gratitudine ai genitori di Marina, Diego e Antonella, per la loro gentilezza e generosità.*