



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea Triennale in Fisica

## TEOREMI DI LOCALIZZAZIONE SPETTRALE

*Relatore:*  
Prof. Luca Guido Molinari

*Elaborato di:*  
Tommaso Rossi  
Matr. 811555

PACS:  
02.10.Ud  
02.10.Yn

---

Anno Accademico 2015/2016

# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>ii</b>
<b>Introduzione</b>	<b>iv</b>
<b>1 Insiemi di inclusione per autovalori</b>	<b>1</b>
1.1 Insieme di Bendixson . . . . .	2
1.2 Insieme di Geršgorin . . . . .	5
1.3 Perturbazione degli autovalori . . . . .	10
1.4 Altri insiemi di tipo Geršgorin . . . . .	12
1.4.1 Insieme di Brauer . . . . .	13
1.4.2 Lemniscate di ordine superiore e insieme di Brualdi . . . . .	16
1.5 Range numerico e inviluppo dello spettro . . . . .	20
1.5.1 Disuguaglianza di Adam-Tsatsomeros e inviluppo cubico . . . . .	21
1.5.2 Disuguaglianza di Bergqvist e inviluppi di grado superiore . . . . .	22
<b>2 Teoria spettrale delle matrici random</b>	<b>31</b>
2.1 Convergenza delle distribuzioni spettrali . . . . .	35
2.1.1 Legge del semicerchio . . . . .	35
2.1.2 Legge del cerchio . . . . .	38
2.1.3 Legge dell'ellisse . . . . .	40
2.2 Universalità delle DSE . . . . .	48
2.2.1 Matrici sparse . . . . .	48
2.2.2 Matrici random deformate e non centrali . . . . .	50
2.3 Interludio: il paradosso di May nei sistemi ecologici . . . . .	54
<b>3 Autovalori estremi</b>	<b>57</b>
3.1 Ensemble circolari deformati . . . . .	57
3.1.1 Matrici non centrali: deformazioni di rango uno . . . . .	57
3.1.2 Deformazioni di rango finito . . . . .	60
3.2 Ensemble di Wigner deformati . . . . .	65
<b>Conclusioni</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>71</b>

# Elenco delle figure

1.1	Range numerico . . . . .	3
1.2	Range numerico di una matrice normale. . . . .	4
1.3	Range numerico e insieme di Bendixson . . . . .	5
1.4	Esempi di insiemi di Geršgorin. . . . .	6
1.5	Insiemi di Geršgorin per righe e per colonne . . . . .	7
1.6	Dischi di Geršgorin che non contengono autovalori . . . . .	8
1.7	Insiemi di Geršgorin di matrici a diagonale dominante. . . . .	9
1.8	Insiemi di Ostrowski . . . . .	13
1.9	Insiemi di Brauer . . . . .	14
1.10	Estensione di Kolotilina . . . . .	16
1.11	Grafo orientato fortemente connesso . . . . .	18
1.12	Grafi orientati . . . . .	18
1.13	Insiemi di inclusione a confronto . . . . .	20
1.14	Disuguaglianza di Adam-Tsatsomeros . . . . .	23
1.15	Inviluppo cubico . . . . .	23
1.16	Inviluppo cubico di una matrice non centrale . . . . .	24
1.17	Inviluppi . . . . .	26
1.18	Altri inviluppi . . . . .	27
1.19	Curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ . . . . .	28
1.20	Curve $\gamma_k$ a tutti i gradi . . . . .	28
1.21	Curva $\gamma_4$ . . . . .	29
1.22	Esempi di curve $\gamma_k$ . . . . .	30
2.1	Cerchi di Geršgorin di matrici di grandi dimensioni . . . . .	33
2.2	Range numerico e inviluppo di una matrice di grandi dimensioni	33
2.3	Range numerico e inviluppo cubico di una matrice di grandi dimensioni non centrale . . . . .	34
2.4	Legge del semicerchio . . . . .	36
2.5	Repulsione dei livelli . . . . .	37
2.6	Legge del cerchio . . . . .	38
2.7	Legge dell'ellisse . . . . .	41
2.8	Grafi di matrici sparse . . . . .	50
2.9	Spettro di matrici gaussiane random variamente sparse . . . . .	51
2.10	Spettro di matrici random di Bernoulli variamente sparse . . . . .	52

3.1	Spettro di matrici non centrali e teorema di Bauer-Fike . . . .	59
3.2	Matrice non centrale complessa . . . . .	60
3.3	Fluttuazioni del maggior autovalore di una matrice di Ginibre non centrale . . . . .	61
3.4	Deformazioni di vario rango dell'ensemble di Ginibre . . . . .	62
3.5	Deformazioni di rango finito . . . . .	63
3.6	Altre deformazioni di rango finito . . . . .	64
3.7	Fluttuazioni del maggior autovalore di matrici del GOE e distribuzione di Tracy-Widom . . . . .	66

# Introduzione

Ottenere informazioni indirette sullo spettro di autovalori di una matrice in luogo del calcolo diretto può risultare utile in molte situazioni. Tale approccio, che costituisce il principale argomento di questa tesi, permette di cogliere caratteristiche comuni nello spettro di matrici che condividono certe proprietà, di ottenere risultati analitici e generali, di fornire approssimazioni degli autovalori ove il calcolo non sia possibile o troppo oneroso. Fornire insiemi di inclusione per gli autovalori permette anche un'interpretazione "geometrica" dello spettro che consentirà di avere una visione d'insieme dei comportamenti spettrali e di ricondurli alle opportune caratteristiche delle matrici. Questo approccio fornisce inoltre un ambiente naturale per esaminare problemi perturbativi e saggiare la stabilità dello spettro in relazione alla tipologia di matrice.

Confinare gli autovalori in una parte ben definita del piano complesso (in modo esatto o anche solo probabilistico) è di vitale importanza per lo studio della stabilità di sistemi dinamici [1], sistemi di equazioni differenziali [2], modelli di dinamica di popolazioni (un caso interessante è quello del cosiddetto paradosso complessità-stabilità [3], che verrà brevemente ripreso nella Sezione 2.3), e, come vedremo diffusamente in seguito, problemi di invertibilità.

Il Capitolo 1 sarà dedicato agli insiemi di inclusione di autovalori di matrici generiche: si partirà da un classico come il teorema di Geršgorin, per poi proseguire con alcuni risultati che idealmente continuano i metodi elaborati dallo stesso Geršgorin per ottenere insiemi di inclusione più sofisticati, come l'insieme di Brauer e quello di Brualdi - nei quali l'inclusione avviene non più tramite cerchi bensì tramite curve più particolari, come ovali di Cassini o lemniscate.

Si passerà poi a ragionamenti riguardanti il range numerico, che per sua natura è esso stesso un insieme di inclusione, fino ad arrivare a ritrovati molto recenti come alcuni tipi di involuppi per lo spettro, che possono essere visti quali "miglioramenti" del range numerico, e che vengono ottenuti a partire da disuguaglianze che tutti gli autovalori devono soddisfare. Gli involuppi saranno oggetto di numerosi esempi pratici di carattere numerico, volti a fornire una comprensione diretta degli argomenti trattati.

Nel Capitolo 2 si passerà invece alla localizzazione dello spettro di matrici appartenenti a ensemble statistici. Si entrerà quindi nel campo della teoria delle matrici random, teoria che dagli anni Cinquanta, quando Wigner la utilizzò per spiegare le proprietà statistiche dei livelli energetici dei nuclei pesanti, ha conosciuto una crescita impressionante, arrivando oggi a vantare applicazioni nei rami più disparati. Le più svariate discipline, prima fra tutte la fisica - in ambiti quali fisica nucleare, sistemi caotici (congettura di Bohigas-Giannoni-Schmit [4]), localizzazione di Anderson, trasporti su reticolo, cromodinamica quantistica, reti neurali - ma anche la biologia con alcuni studi sui ripiegamenti dell'RNA, l'ecologia teorica con il paradosso di May, la finanza e altre ancora [5], fanno uso di modellizzazioni molto efficaci tramite gli opportuni ensemble di matrici. Questa grande flessibilità è una delle caratteristiche di questa teoria che hanno portato al suo grande successo, insieme alla sua universalità (concetto che verrà discusso nel corso della tesi), alla sua capacità di predizione partendo da poche ipotesi e alla ricca struttura matematica, e che ne hanno fatto nel corso degli anni una corposa, vivace e prolifica branca della matematica.

Avendo ora a che fare con insiemi statistici di matrici di grandi dimensioni, naturalmente, i metodi sviluppati nel Capitolo 1 si riveleranno poco efficaci (tranne che in qualche caso particolare), e bisognerà occuparsi della convergenza delle distribuzioni spettrali più che della localizzazione certa di uno o più autovalori. A tal fine, verranno elencati e discussi i principali concetti necessari a una formulazione organica e le più importanti leggi che regolano la convergenza dello spettro di matrici random di grandi dimensioni, come le leggi del semicerchio, del cerchio e dell'ellisse, vere e proprie pietre miliari della teoria delle matrici random.

Verrà posto un accento sul principio di universalità (che sancisce, sotto le opportune ipotesi, l'indipendenza delle distribuzioni spettrali limite dalla distribuzione da cui vengono presi gli elementi di matrice) come principio fondante di tutte le leggi di convergenza delle distribuzioni spettrali. Benché la sua formulazione finale - e dimostrazione - risalga appena al 2010, questo principio (esposto in molteplici forme) è stato oggetto di congetture e di tentativi fin dagli anni Cinquanta: le sue conseguenze spaziano dalle leggi di convergenza classiche a generalizzazioni ad ensemble più particolari, come ensemble sparsi (riguardo ai quali vengono proposti riflessioni ed esempi), ensemble traslati o deformati e al caso non centrale.

È proprio partendo dalle osservazioni fatte nel Capitolo 2 riguardo agli ensemble deformati e non centrali che prenderà avvio l'argomentazione del Capitolo 3, il cui principale obiettivo è quello di spiegare il peculiare comportamento spettrale di tali ensemble, in cui si osservano uno o più autovalori che si distaccano dal supporto delle leggi di convergenza per raggiungere posizioni

abbastanza definite nel piano complesso. Verrà illustrato un semplice metodo, dovuto a Silverstein, per spiegare questo comportamento nel caso non centrale facendo uso di teoremi perturbativi enunciati nel Capitolo 1, e verrà proposta una generalizzazione al caso di deformazioni di rango finito grazie alla quale si otterrà un'efficace pittura delle motivazioni che spingono in questo contesto alcuni autovalori a allontanarsi dagli altri.

Dopodiché ci si restringerà al caso hermitiano delle matrici di Wigner - che, rivestendo un particolare interesse nella fisica, sono state oggetto negli anni di studi più approfonditi - e si concluderà con l'esposizione di alcuni recenti risultati relativi alle loro deformazioni, che permetteranno di conoscere la "forza" della deformazione necessaria per staccare autovalori dal supporto, la loro convergenza e le oscillazioni che essi compiono.

# Capitolo 1

## Insiemi di inclusione per autovalori

Chiamiamo  $M_n(\mathbb{T})$ , dove  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{T} = \mathbb{C}$ , l'insieme delle matrici  $n \times n$  con elementi appartenenti a  $\mathbb{T}$ . Se  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , lo *spettro* di  $A$ ,  $\sigma(A)$ , è l'insieme degli autovalori di  $A$ :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0\},$$

mentre il *raggio spettrale* è

$$\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Indicheremo sia le norme matriciali che quelle vettoriali con  $\|\cdot\|$ . Dato  $x = [x_i] \in \mathbb{C}^n$ , indicheremo la sua norma  $\ell^p$  con

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Si può estendere la definizione a  $p = \infty$  definendo

$$\|x\|_\infty := \max_i |x_i|.$$

Le norme matriciali su  $M_n(\mathbb{C})$  indotte dalle norme  $\ell^p$  su  $\mathbb{C}^n$  sono, per  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$ :

$$\|A\|_p := \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p.$$

Diamo l'espressione esplicita in due casi particolari, che useremo in seguito:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, \quad (1.0.1)$$

e la *norma spettrale*

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A), \quad (1.0.2)$$



dove  $\sigma_1(A)$  è il più grande valore singolare di  $A$ . Per mostrare che la norma spettrale è davvero la norma indotta dalla norma  $\ell^2$  (norma euclidea) bastano pochi passaggi:

$$\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} x^* A^* A x = \lambda_{\max}(A^* A) = \sigma_1(A)^2. \quad (1.0.3)$$

Il penultimo passaggio è stato possibile grazie al teorema di Rayleigh [6]; la cosa sarà presto chiarita grazie ad alcune osservazioni sul *range numerico* di una matrice.

Un'altra norma di grande importanza è la *norma di Frobenius*, o di Hilbert-Schmidt, definita come

$$\|A\|_F := \sqrt{\text{Tr}(A^* A)} = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}, \quad (1.0.4)$$

ovvero la norma *vettoriale*  $\ell^2$  su  $M_n(\mathbb{C})$  inteso come spazio vettoriale  $n^2$ -dimensionale  $\mathbb{C}^{n^2}$ , la quale si rivela *anche* essere una norma matriciale,<sup>1</sup> diversa da quella indotta dalla norma  $\ell^2$ , che è la norma spettrale. La diversità tra le due è più evidente scrivendo la norma di Frobenius in termini di valori singolari:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1(A)^2 + \dots + \sigma_n(A)^2}.$$

Le norme matriciali risultino immediatamente utili per lo scopo di localizzare lo spettro: è possibile mostrare che, data una matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , se  $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  è una qualsiasi norma matriciale su  $M_n(\mathbb{C})$  allora  $\rho(A) \leq \|A\|$ , e che inoltre, se  $A$  è non singolare,  $\rho(A) \geq \|A^{-1}\|$  [6, Teorema 5.6.9].

## 1.1 Insieme di Bendixson

Nel 1902, Bendixson dimostrò un semplice teorema che permette di confinare gli autovalori di una matrice in un rettangolo nel piano complesso. Per enunciare il teorema, sono di primaria importanza la definizione di *range numerico*<sup>2</sup> e alcune delle sue proprietà. L'argomento verrà approfondito nella Sezione 1.5.

<sup>1</sup>Ricordiamo che la proprietà supplementare che si richiede a una norma matriciale rispetto a una vettoriale su uno spazio di matrici è la *submoltiplicatività*, ovvero  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . Una norma indotta è sempre una norma matriciale [6].

<sup>2</sup>Questo (francamente brutto) nome deriva dalla letteratura anglosassone, dove viene chiamato *numerical range* o *field of values*. Nella letteratura tedesca, da cui peraltro proviene, questo insieme viene chiamato *Wertebereich*; da qui la lettera  $W$  che verrà usata in seguito per indicarlo.

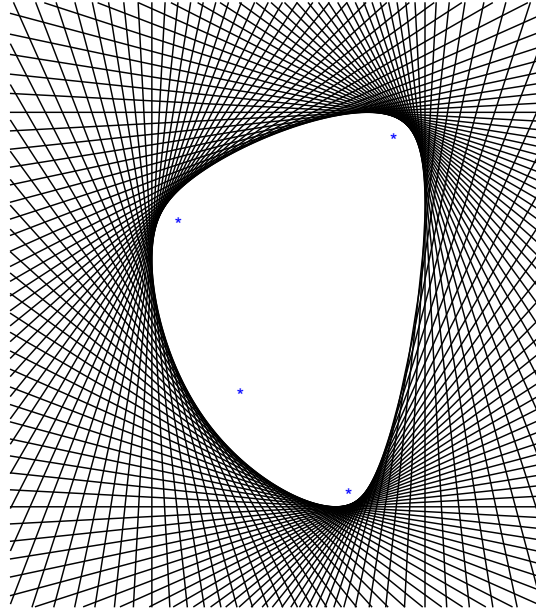


Figura 1.1: Il range numerico di una matrice  $4 \times 4$  complessa. Il metodo usato per calcolarlo verrà illustrato nella Sezione 1.5. I punti indicati con un asterisco sono gli autovalori della matrice.

**Definizione 1.1.1** (Range numerico). Data la matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , il *range numerico* di  $A$  è l'insieme

$$W(A) := \{x^*Ax : x^*x = 1, x \in \mathbb{C}^n\}, \quad (1.1.1)$$

ovvero l'insieme di tutti i quozienti di Rayleigh di  $A$ .

Il range numerico ha alcune notevoli proprietà nei confronti dello spettro di autovalori. Notiamo innanzi tutto che se  $x$  in (1.1.1) è un autovettore di  $A$ , allora il relativo quoziente di Rayleigh è l'autovalore relativo a  $x$ : lo spettro di una matrice è quindi contenuto nel suo range numerico.

Si può dimostrare che  $W(A)$  è un sottoinsieme compatto e convesso di  $\mathbb{C}$  (teorema di Toeplitz-Hausdorff, si veda per esempio [7]), e che se  $A$  è normale allora  $W(A)$  coincide con l'involuppo convesso di  $\sigma(A)$  (Figura 1.2). Se  $A$  è hermitiana, possiamo ordinare i suoi autovalori  $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$ , ed è possibile mostrare che in questo caso  $W(A)$  è l'intervallo reale  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  [6, Teorema 4.2.2 (Rayleigh)].<sup>3</sup>

**Teorema 1.1.1** (Bendixson). *Lo spettro di  $A \in M_n(\mathbb{C})$  è confinato nel rettangolo*

$$B(A) = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} : x \in W\left(\frac{A + A^*}{2}\right), y \in W\left(\frac{A - A^*}{2i}\right) \right\}, \quad (1.1.2)$$

<sup>3</sup>Ecco quindi spiegato il passaggio fatto in (1.0.3): se  $A$  è hermitiana,  $\max_{\|x\|_2=1} x^*Ax = \sup W(A) = \lambda_{\max}(A)$ .

detto insieme di Bendixson.

*Dimostrazione.* Se  $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$  è un autovalore di  $A$  e  $\xi$  il suo autovettore (normalizzato a  $\xi^* \xi = 1$ ), allora

$$\lambda = \xi^* A \xi = \xi^* \frac{A + A^*}{2} \xi + i \xi^* \frac{A - A^*}{2i} \xi.$$

Le matrici  $\frac{A + A^*}{2}$  e  $\frac{A - A^*}{2i}$  sono hermitiane, per cui il loro range numerico è un intervallo reale. Osservando che

$$\xi^* \frac{A + A^*}{2} \xi \in W\left(\frac{A + A^*}{2}\right) \in \mathbb{R},$$

$$\xi^* \frac{A - A^*}{2i} \xi \in W\left(\frac{A - A^*}{2i}\right) \in \mathbb{R},$$

possiamo garantire che  $x = \xi^* \frac{A + A^*}{2} \xi$  e  $y = \xi^* \frac{A - A^*}{2i} \xi$ , per cui vale che  $x \in W\left(\frac{A + A^*}{2}\right)$  e  $y \in W\left(\frac{A - A^*}{2i}\right)$ , ovvero  $\lambda \in B(A)$ . □

Dalla dimostrazione del teorema possiamo anche rimarcare l'utile relazione valida per il range numerico:

$$\operatorname{Re} W(A) = W\left(\frac{A + A^*}{2}\right), \quad \operatorname{Im} W(A) = W\left(\frac{A - A^*}{2i}\right),$$

con  $\operatorname{Re} W(A) = \{\operatorname{Re} s : s \in W(A)\}$ , e analogamente per  $\operatorname{Im} W(A)$  (un esempio si può vedere nella Figura 1.3).

Le quantità  $\frac{A + A^*}{2}$  e  $\frac{A - A^*}{2i}$  vengono chiamate rispettivamente *parte hermitiana* e *parte antihermitiana* di  $A$ , e denotate con  $H(A)$  e  $S(A)$ .

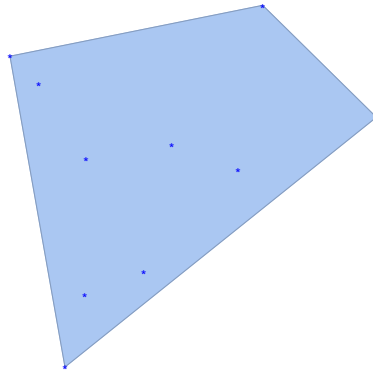


Figura 1.2: Range numerico di una matrice normale.

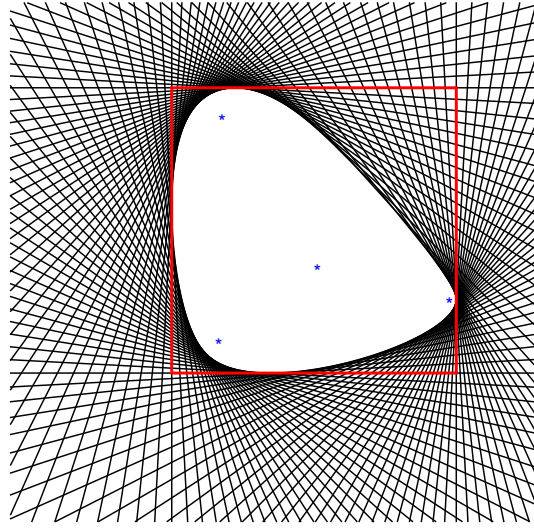


Figura 1.3: Range numerico e insiemi di Bendixson (in rosso).

## 1.2 Insieme di Geršgorin

Un'altra condizione, spesso più stringente, sul confinamento degli autovalori di una matrice  $n \times n$  può essere ottenuta in termini di  $n$  cerchi facilmente calcolabili nel piano complesso. Questo risultato, pubblicato da Geršgorin nel 1931 [8], è facilmente dimostrabile, una volta introdotta l'opportuna notazione. Definiamo

$$N := \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.2.1)$$

e chiamiamo

$$r_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}|, \quad i \in N \quad (1.2.2)$$

la *i-esima somma assoluta per righe*<sup>4</sup> di  $A$  (con la convenzione che  $r_1(A) := 0$  se  $n = 1$ ). Inoltre, definiamo

$$G_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq r_i(A)\}, \quad i \in N, \quad (1.2.3)$$

$$G(A) := \bigcup_{i \in N} G_i(A), \quad (1.2.4)$$

rispettivamente l'*i-esimo disco di Geršgorin* e l'*insieme di Geršgorin*. Per *i-esimo cerchio di Geršgorin*, con  $i \in N$ , si intende la curva

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| = r_i(A)\}.$$

<sup>4</sup> In seguito, per brevità, diremo semplicemente “somma per righe” dove non vi sia possibilità di confusione con gli indici.

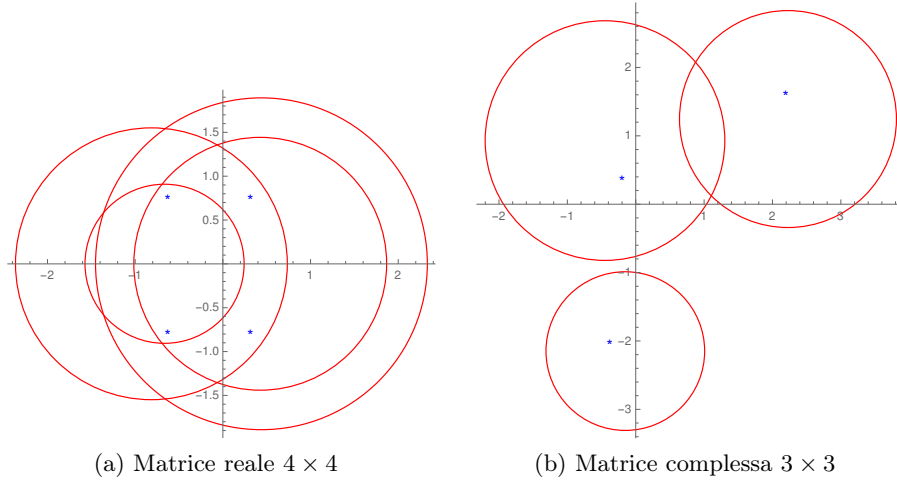


Figura 1.4: Esempi di insiemi di Geršgorin.

**Teorema 1.2.1** (Geršgorin). *Sia  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  e  $\lambda \in \sigma(A)$ . Allora esiste un intero  $k \in N$  tale che*

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq r_k(A), \quad (1.2.5)$$

ovvero  $\lambda \in G_k(A)$ .

*Dimostrazione.* Se  $0 \neq x = [x_i] \in \mathbb{C}^n$  è un autovettore associato a  $\lambda$ , allora  $\sum_{j \in N} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$  per ogni  $i \in N$ . Dato che  $x \neq 0$  esiste un  $k \in N$  per il quale  $0 < |x_k| = \max\{|x_i| : i \in N\}$ . Per questo  $k$ , vale  $\sum_{i \in N} a_{k,i} x_i = \lambda x_k$ , ovvero

$$(\lambda - a_{k,k}) x_k = \sum_{i \in N \setminus \{k\}} a_{k,i} x_i.$$

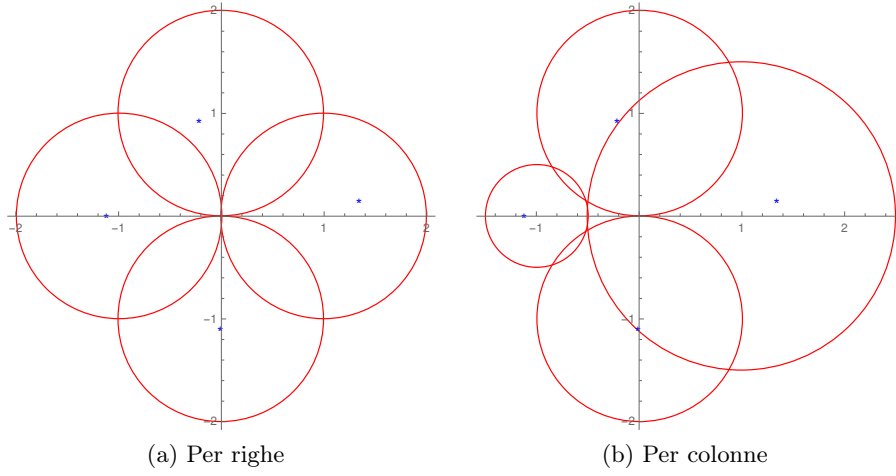
Passando ora ai valori assoluti nella precedente equazione, le assunzioni fatte su  $x_k$  e la disuguaglianza triangolare assicurano che

$$|\lambda - a_{k,k}| |x_k| \leq \sum_{i \in N \setminus \{k\}} |a_{k,i}| |x_i| \leq \sum_{i \in N \setminus \{k\}} |a_{k,i}| |x_k| = |x_k| r_k(A).$$

Ora, dividendo per  $|x_k| > 0$ , si ottiene (1.2.5). □

Abbiamo quindi dimostrato che ogni autovalore di una matrice appartiene ad almeno un disco di Geršgorin, e che quindi appartiene all'insieme di Geršgorin. Dato che questo vale per ogni autovalore, ne concludiamo che, per qualsiasi matrice  $A$ ,  $\sigma(A) \subseteq G(A)$ .

Naturalmente, dato che gli autovalori di  $A \in M_n(\mathbb{C})$  e quelli di  $A^T$  sono gli stessi, applicando il Teorema 1.2.1 ad  $A^T$  possiamo ottenere la versione


 Figura 1.5: Insiemi di Geršgorin della matrice  $B$  in (1.2.8).

“per colonne” del teorema: il risultante insieme di inclusione sarà in termini di cerchi con raggio determinato dalle *somme assolute per colonne*

$$c_j(A) = \sum_{i \in N \setminus \{j\}} |a_{i,j}| = r_j(A^T), \quad j \in N. \quad (1.2.6)$$

**Corollario 1.2.1.** *Gli autovalori di  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  si trovano nell'insieme*

$$\bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq c_i(A)\} = G(A^T). \quad (1.2.7)$$

La Figura 1.5 mostra gli insiemi di Geršgorin per righe e per colonne della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & i & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (1.2.8)$$

Dal punto di vista del raggio spettrale, grazie al Teorema 1.2.1 possiamo concludere che, per  $A \in M_n(\mathbb{C})$  e  $\lambda \in \sigma(A)$ ,

$$|\lambda| \leq |a_{k,k}| + r_k(A) = \sum_{j \in N} |a_{k,j}| \leq \max_{i \in N} \sum_{j \in N} |a_{i,j}|,$$

(dove l'indice  $k$  ha lo stesso significato che nel teorema di Geršgorin), e quindi, dato che ciò vale per ogni  $\lambda \in \sigma(A)$ , che

$$\rho(A) \leq \max_{i \in N} \sum_{j \in N} |a_{i,j}|. \quad (1.2.9)$$

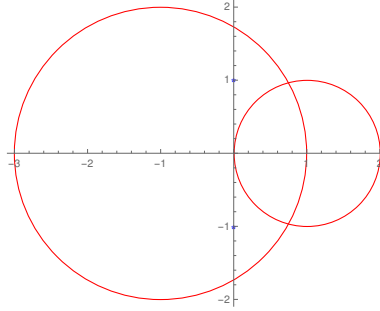


Figura 1.6: Uno dei dischi di Geršgorin della matrice  $A$  di (1.2.10) non contiene nessun autovalore.

In realtà, ciò non è una novità: infatti, si può verificare che il termine a destra in (1.2.9) è la norma matriciale  $\|A\|_\infty$ , definita in (1.0.1), e quindi (1.2.9) vale a prescindere dal teorema di Geršgorin (che comunque fornisce una interessante derivazione geometrica di questo risultato) grazie all’osservazione riportata all’inizio del capitolo.

Sappiamo ora che ogni autovalore è contenuto in almeno un disco di Geršgorin, ma in linea di massima possono esistere dei dischi che non contengono alcun autovalore, come ad esempio nella matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2.10)$$

illustrata in Figura 1.6. Se ora un di questi dischi “vuoti” potesse essere disgiunto dagli altri, potremmo trascurarlo e avremmo così ristretto l’insieme di inclusione. In realtà ciò non è possibile: si può anzi mostrare che, se l’unione di  $p$  dischi di  $G(A)$  è disgiunta dagli altri  $n - p$  dischi, allora in essa sono contenuti esattamente  $p$  autovalori di  $A$ . Formalizziamo meglio la precedente affermazione: preso un sottoinsieme proprio di  $N$ ,  $\emptyset \neq S \subsetneq N$ , chiamiamo  $|S|$  la sua cardinalità e definiamo

$$G^S(A) := \bigcup_{i \in S} G_i(A).$$

Se l’unione dei dischi di Geršgorin con indice appartenente a  $S$  è disgiunta dagli altri dischi, allora

$$G^S(A) \cap G^{N \setminus S}(A) = \emptyset. \quad (1.2.11)$$

**Teorema 1.2.2.** *Sia  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  con  $n \geq 2$ . Se esiste un sottoinsieme proprio  $S$  di  $N$  per cui vale (1.2.11), allora  $G^S(A)$  contiene esattamente  $|S|$  autovalori di  $A$ .*

Per la dimostrazione, si veda per esempio [9, Teorema 1.6] o [6, Teorema 6.1.1].

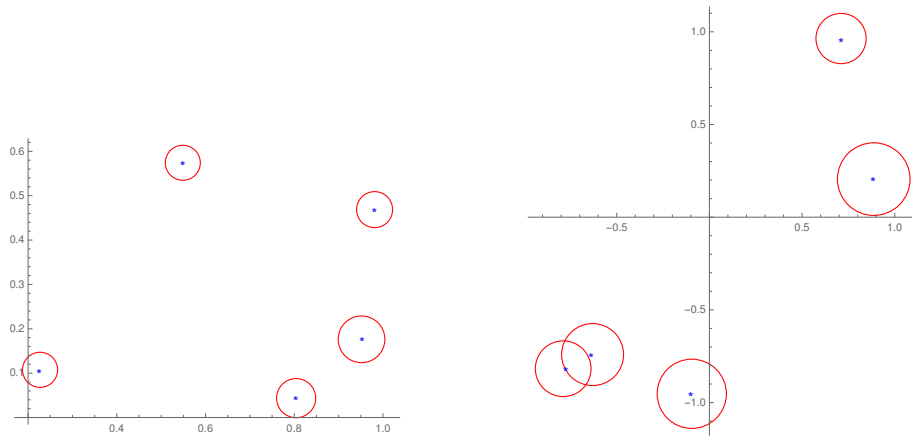


Figura 1.7: Insiemi di Geršgorin di matrici a diagonale dominante.

Introduciamo ora quello che diventerà un tema ricorrente di questo capitolo, ossia lo stretto legame tra insiemi di inclusione di autovalori e teoremi di non singolarità: un insieme di inclusione di autovalori permette sempre di ottenere delle condizioni per garantire che lo zero si trovi al di fuori di esso, assicurando la non singolarità della matrice, e vale anche viceversa.

**Definizione 1.2.1.** Una matrice  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  è *a diagonale dominante* (per righe) se

$$|a_{i,i}| \geq r_i(A) \quad \forall i \in N.$$

È *a diagonale dominante in senso stretto* se

$$|a_{i,i}| > r_i(A) \quad \forall i \in N.$$

È evidente nella definizione il fatto che, se la matrice è a diagonale dominante in senso stretto, nessun disco di Geršgorin può contenere lo zero. Questo risultato viene formalizzato nel seguente

**Teorema 1.2.3** (Levy-Desplanques). *Una matrice a diagonale dominante in senso stretto è non singolare.*

Il Teorema 1.2.3, quindi, segue direttamente dal Teorema 1.2.1, ed è immediato mostrare che vale anche il contrario [9, p. 6].

Tramite la teoria dei grafi, è possibile generalizzare questo risultato. Elenchiamo qui brevemente i due risultati più significativi, dovuti a Taussky:

**Definizione 1.2.2.** La matrice  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  è *irriducibilmente a diagonale dominante* se



- (a)  $A$  è irriducibile;<sup>5</sup>
- (b)  $A$  è a diagonale dominante, ovvero  $|a_{i,i}| \geq r_i(A)$  per ogni  $i \in N$ ;
- (c) Esiste un  $i \in N$  tale che  $|a_{i,i}| > r_i(A)$ .

Vale la pena notare che, secondo la precedente definizione, una matrice può essere a diagonale dominante e irriducibile ma non irriducibilmente a diagonale dominante.

**Teorema 1.2.4** (Taussky). *Se una matrice è irriducibilmente a diagonale dominante, allora è non singolare.*

Inoltre, è possibile mostrare che se ogni elemento diagonale di  $A$  è reale e positivo, allora ogni autovalore di  $A$  ha parte reale positiva, e che se in aggiunta  $A$  è anche hermitiana allora ogni autovalore di  $A$  è positivo [6, Teorema 6.1.10].

Anche in questo caso, il teorema di non singolarità è collegato a un teorema di confinamento degli autovalori:

**Teorema 1.2.5** (Taussky). *Se  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  è irriducibile, allora un punto di frontiera  $\lambda$  di  $G(A)$  può essere un autovalore di  $A$  solo se*

$$|\lambda - a_{i,i}| = r_i(A) \quad \forall i \in N,$$

ovvero se tutti i cerchi di Geršgorin  $\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| = r_i(A)\}$  passano per  $\lambda$ .

### 1.3 Perturbazione degli autovalori

Il problema che ci poniamo in questa sezione è di stabilire dei confini per gli autovalori di una matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  perturbata da una matrice  $E = [e_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $A + E$ , rispetto a quelli della matrice non perturbata  $A$ . Prendiamo inizialmente una matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , e consideriamo la matrice perturbata  $D + E$ : i suoi autovalori sono contenuti nell'insieme di Geršgorin

$$G(D + E) = \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i - e_{i,i}| \leq r_i(E) = \sum_{j \neq i} |e_{i,j}| \right\},$$

il quale è contenuto nell'insieme

$$\bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i| \leq \sum_{j=1}^n |e_{i,j}| \right\}.$$

<sup>5</sup>Una matrice  $A$  è riducibile se esiste una matrice di permutazione  $P$  tale che  $P^{-1}AP$  è una matrice triangolare a blocchi.

Quindi se  $\hat{\lambda}$  è un autovalore di  $D + E$ , esiste un autovalore  $\lambda_i$  di  $D$  tale che  $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq \max_k \sum_{j=1}^n |e_{k,j}|$ , ovvero, richiamando la norma matriciale  $\|\cdot\|_\infty$  definita in (1.0.1),  $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq \|E\|_\infty$ . È ora molto semplice generalizzare questo argomento a matrici diagonalizzabili:

**Proposizione 1.3.1.** *Sia  $A \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice diagonalizzabile,  $A = SAS^{-1}$  con  $S$  non singolare e  $\Lambda$  diagonale. Sia  $E \in M_n(\mathbb{C})$ . Se  $\hat{\lambda}$  è un autovalore di  $A + E$ , allora esiste un autovalore  $\lambda$  di  $A$  tale che*

$$|\hat{\lambda} - \lambda| \leq \|S\|_\infty \|S^{-1}\|_\infty \|E\|_\infty = \kappa_\infty(S) \|E\|_\infty.$$

La quantità  $\kappa_\infty(\cdot)$  viene chiamata numero di condizione rispetto alla norma matriciale  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Dimostrazione.* Dato che gli autovalori di  $A + E$  e  $S^{-1}(A + E)S = \Lambda + S^{-1}ES$  sono gli stessi, il ragionamento fatto in precedenza mostra come esista un autovalore  $\lambda$  di  $A$  per cui  $|\hat{\lambda} - \lambda| \leq \|S^{-1}ES\|_\infty$ ; la submoltiplicatività della norma conclude la dimostrazione.  $\square$

Questo risultato può essere esteso a una qualsiasi norma matriciale invece che alla sola  $\|\cdot\|_\infty$ , purché sia indotta da una norma assoluta<sup>6</sup> su  $\mathbb{C}^n$ :

**Teorema 1.3.1** (Bauer-Fike). *Sia  $A \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice diagonalizzabile,  $A = SAS^{-1}$  con  $S$  non singolare e  $\Lambda$  diagonale. Sia  $E \in M_n(\mathbb{C})$  e sia  $\|\cdot\|$  una norma matriciale su  $M_n(\mathbb{C})$  indotta da una norma assoluta su  $\mathbb{C}^n$ . Se  $\hat{\lambda}$  è un autovalore di  $A + E$ , allora esiste un autovalore  $\lambda$  di  $A$  tale che*

$$|\hat{\lambda} - \lambda| \leq \|S\| \|S^{-1}\| \|E\| = \kappa(S) \|E\|. \quad (1.3.1)$$

$\kappa(\cdot)$  viene chiamato numero di condizione rispetto alla norma matriciale  $\|\cdot\|$ .

Una dimostrazione si può trovare in [6, Teorema 6.3.2].

Un interessante caso particolare si ottiene quando la matrice  $A$  è normale: in questo caso,  $S$  può essere scelta unitaria, e usando la norma spettrale  $\|\cdot\|_2$  (definita in (1.0.2)), che vale 1 per qualsiasi matrice unitaria, si ottiene il seguente

**Corollario 1.3.1.** *Siano  $A, E \in M_n(\mathbb{C})$  e sia  $A$  normale. Se  $\hat{\lambda}$  è un autovalore di  $A + E$ , allora esiste un autovalore  $\lambda$  di  $A$  tale che*

$$|\hat{\lambda} - \lambda| \leq \|E\|_2. \quad (1.3.2)$$

Nel caso in cui sia  $A$  che  $A + E$  siano normali, il confinamento viene stabilito dalla norma di Frobenius, definita in (1.0.4):

<sup>6</sup>Una norma (vettoriale)  $\|\cdot\|$  su  $\mathbb{C}^n$  è detta assoluta se la norma di un qualsiasi vettore  $\xi = [\xi_i] \in \mathbb{C}^n$  è uguale alla norma del vettore che ha per componente  $i$ -esima  $|\xi_i|$ .

**Teorema 1.3.2** (Hoffman e Wielandt). *Siano  $A, E \in M_n(\mathbb{C})$ , con  $A$  e  $A + E$  normali. Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori di  $A$  dati in qualche ordine, e  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$  gli autovalori di  $A + E$  dati in qualche ordine. Esiste una permutazione  $\pi(\cdot)$  degli indici  $1, \dots, n$  tale che*

$$\sum_{i=1}^n \left| \hat{\lambda}_{\pi(i)} - \lambda_i \right|^2 \leq \|E\|_F^2 = \text{Tr}(E^*E).$$

Questo teorema mette in luce la grande stabilità degli autovalori di una matrice normale rispetto alle perturbazioni, ma non dà informazioni sulla permutazione degli autovalori che soddisfa la disuguaglianza; tuttavia, se la matrice  $A$  è hermitiana, questa sarà fornita dal naturale ordinamento dei suoi autovalori:

**Corollario 1.3.2.** *Siano  $A, E \in M_n(\mathbb{C})$ , con  $A$  hermitiana e  $A + E$  normale. Siano  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  gli autovalori di  $A$  e  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$  gli autovalori di  $A + E$  ordinati in modo tale che  $\text{Re } \hat{\lambda}_1 \leq \dots \leq \text{Re } \hat{\lambda}_n$ . Allora*

$$\sum_{i=1}^n \left| \hat{\lambda}_i - \lambda_i \right|^2 \leq \|E\|_F^2.$$

## 1.4 Altri insiemi di tipo Geršgorin

Molti autori, attratti dalla semplicità e dalla eleganza della teoria di Geršgorin, hanno generalizzato le sue idee e metodi per ottenere altri tipi di insiemi di inclusione di autovalori. In questa sezione riportiamo alcuni tra i più significativi di questi insiemi, con i relativi teoremi di non singolarità.

### Insieme di Ostrowski

Il primo teorema di questo tipo, dovuto a Ostrowski, fornisce un continuo di insiemi di inclusione che interpola tra (1.2.4) e (1.2.7).

**Teorema 1.4.1** (Ostrowski). *Sia  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$ , sia  $\alpha \in [0, 1]$ . Allora gli autovalori di  $A$  si trovano nell'unione di  $n$  dischi*

$$\bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq (r_i(A))^\alpha (c_i(A))^{1-\alpha}\}. \quad (1.4.1)$$

**Teorema 1.4.2.** *Siano  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . Se vale*

$$|a_{i,i}| > (r_i(A))^\alpha (c_i(A))^{1-\alpha} \quad \forall i \in N,$$

*allora  $A$  è non singolare.*

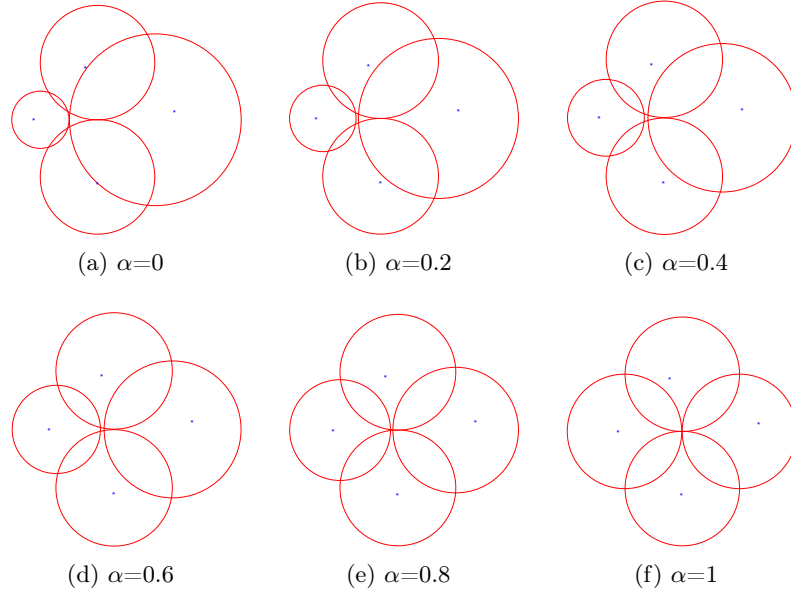


Figura 1.8: Insiemi di Ostrowski della matrice  $B$  in (1.2.8) per diversi valori di  $\alpha$ . I casi  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$  sono gli insiemi di Geršgorin rispettivamente per colonne e per righe (Figura 1.5).

### 1.4.1 Insieme di Brauer

Il prossimo teorema, dovuto a Brauer, contiene i familiari elementi del teorema di Geršgorin, ma in questo caso le somme per righe sono prese due alla volta. Pertanto, gli insiemi di inclusione non saranno più delimitati da cerchi ma da curve note come *ovalità di Cassini*. La dimostrazione è simile a quella del teorema di Geršgorin, con le opportune modifiche dovute al dover considerare i *due* maggiori moduli degli elementi relativi a ogni autovettore [6, p. 415].

**Teorema 1.4.3** (Brauer). *Per ogni  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  con  $n \geq 2$  e ogni  $\lambda \in \sigma(A)$ , esiste una coppia di interi distinti  $i$  e  $j$  in  $N$  tale che*

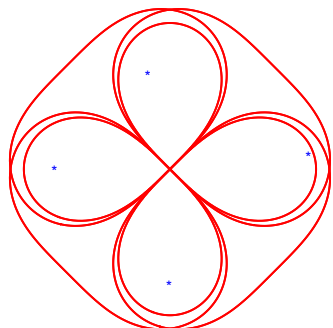
$$\lambda \in K_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| |z - a_{j,j}| \leq r_i(A) r_j(A)\}. \quad (1.4.2)$$

Per cui,

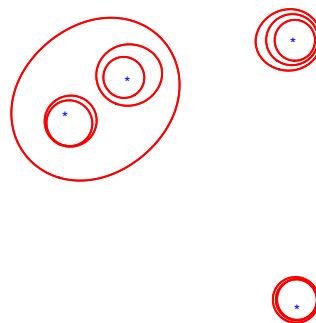
$$\sigma(A) \subseteq K(A) := \bigcup_{\substack{i,j \in N \\ i \neq j}} K_{i,j}(A). \quad (1.4.3)$$

Gli insiemi  $K_{i,j}(A)$  definiti in (1.4.2) sono appunto ovalità di Cassini,<sup>7</sup> mentre  $K(A)$  è chiamato *insieme di Brauer*.

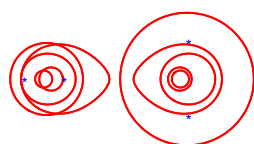
<sup>7</sup> La definizione classica di ovale di Cassini è la curva corrispondente al caso di uguaglianza in (1.4.2); nel presente contesto, per ovale di Cassini si intende l'unione di questa curva con il suo interno.



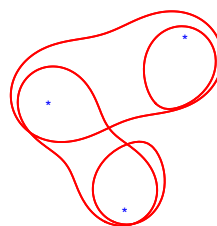
(a) Matrice  $B$  in (1.2.8)



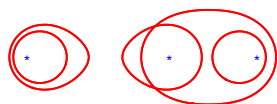
(b) Matrice complessa  $4 \times 4$  a diagonale dominante



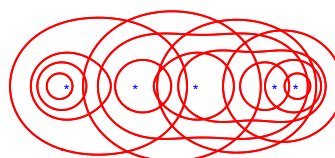
(c) Matrice reale  $4 \times 4$  che soddisfa la condizione di non singolarità di Brauer (1.4.4)



(d) Matrice complessa  $3 \times 3$



(e) Matrice reale  $3 \times 3$



(f) Matrice reale  $5 \times 5$

Figura 1.9: Esempi di insiemi di Brauer.

È interessante notare che  $K_{i,j}(A)$  può essere costituito da due componenti disgiunte (quando  $|a_{i,i} - a_{j,j}| > 2\sqrt{r_i(A)r_j(A)}$  [9, p. 36]).

Rispetto agli  $n$  dischi di Geršgorin, gli ovali di Cassini in (1.4.3) sono in numero  $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ , ma comunque entrambi gli insiemi  $G(A)$  e  $K(A)$  dipendono solamente dagli stessi  $2n$  numeri  $\{a_{i,i}\}_{i=1}^n$  e  $\{r_i(A)\}_{i=1}^n$ .

Si può dimostrare che, per ogni matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  con  $n \geq 2$ , vale [6, Teorema 6.4.7]

$$K(A) \subseteq G(A).$$

Tuttavia è bene osservare che, per quanto l'insieme di Brauer sia sempre un sottoinsieme di quello di Geršgorin, per cui fornisce una migliore stima degli autovalori, per  $n > 3$  ci sono più ovali di Cassini da determinare rispetto ai cerchi di Geršgorin, e che non esiste un analogo del Teorema 1.2.2 nel caso di Brauer.

Segue il teorema di non singolarità relativo all'insieme di inclusione di Brauer, dovuto a Ostrowski e in seguito "riscoperto" da Brauer:<sup>8</sup>

**Teorema 1.4.4.** *Se  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  con  $n \geq 2$ , e se*

$$|a_{i,i}| |a_{j,j}| > r_i(A) r_j(A) \quad \forall i \neq j \in N, \quad (1.4.4)$$

*allora  $A$  è non singolare.*

Non è possibile un analogo del Teorema 1.2.5 adattato all'insieme di Brauer: non sorprende che quest'ultimo, essendo più piccolo di quello di Geršgorin, manchi delle proprietà di bordo necessarie. Per matrici irriducibili esiste comunque una forma più stretta del teorema di Brauer, che localizza gli autovalori in un'unione di un numero spesso minore di ovali di Cassini [10]:

**Teorema 1.4.5** (Kolotilina). *Sia  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  con  $n \geq 2$  una matrice irriducibile. Ogni autovalore di  $A$  si trova nell'insieme*

$$\bigcup_{\substack{i \neq j \\ |a_{i,j}| + |a_{j,i}| \neq 0}} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| |z - a_{j,j}| \leq r_i(A) r_j(A)\}.$$

*Con questa notazione si intende che un ovale corrispondente a righe distinte  $i$  e  $j$  compare nell'unione solo se almeno uno tra  $a_{i,j}$  e  $a_{j,i}$  è diverso da zero.*

Questa estensione è molto efficace soprattutto nel caso di matrici sparse, nel quale riduce considerevolmente il numero di ovali da calcolare. Ad esempio la matrice irriducibile

$$C = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 & 0.5+0.5i \\ 0 & 2i & 0 & 1 & 0 \\ 0.2+0.1i & 0 & 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & i & 4 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 & 2i & 5 \end{pmatrix}, \quad (1.4.5)$$

<sup>8</sup>Questo teorema e il precedente vengono spesso indicati indistintamente come "teorema di Ostrowski-Brauer".

benché piccola, illustra bene come grazie al Teorema 1.4.5 si possa non solo diminuire il numero di ovali di Cassini da calcolare ma anche restringere l'insieme di inclusione (Figura 1.10).



Figura 1.10: Insiemi di Brauer (a sinistra) e estensione di Kolotilina (a destra) della matrice  $C$  in (1.4.5).

## 1.4.2 Lemniscate di ordine superiore e insiemi di Brauer

Il teorema di Geršgorin coinvolge le somme per righe, mentre il teorema di Brauer coinvolge prodotti di somme per righe presi due alla volta. Si potrebbe quindi essere tentati di generalizzare entrambi i casi considerando prodotti di  $m \in \mathbb{N}$  somme per righe, ovvero considerando un'unione di insiemi del tipo

$$\mathcal{L}_{(m)}(A) := \bigcup_{i_1, \dots, i_m \in \mathcal{N}_m} \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{k=1}^m |z - a_{i_k, i_k}| \leq \prod_{k=1}^m r_{i_k}(A) \right\}, \quad (1.4.6)$$

dove

$$\mathcal{N}_m = \{i_1, \dots, i_m \in N : i_1, \dots, i_m \text{ sono distinti}\}.$$

Questa possibilità, molto allettante, darebbe luogo, per ogni  $m$ , a  $\binom{n}{m}$  insiemi compatti in  $\mathbb{C}$

$$\ell_{i_1, \dots, i_m}(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{k=1}^m |z - a_{i_k, i_k}| \leq \prod_{k=1}^m r_{i_k}(A) \right\} \quad (1.4.7)$$

detti *insiemi lemniscati*<sup>9</sup> di ordine  $m$ , di cui gli  $n$  dischi di Geršgorin e i  $\frac{1}{2}n(n-1)$  ovali di Cassini del teorema di Brauer sarebbero solo i casi particolari  $m = 1$  e  $m = 2$ . Inoltre, il fatto che  $K(A) \subseteq G(A)$  potrebbe suggerire che usare più somme per righe dia luogo a migliori insiemi di inclusione. Purtroppo, però, insiemi come quello in (1.4.6) (con  $m \geq 3$ ) possono non

<sup>9</sup>Parleremo invece di *lemniscata* per definire la curva corrispondente al caso di uguaglianza in (1.4.7), che è solitamente quello che si intende per lemniscata [11].

contenere lo spettro della matrice. Per rendersene conto, basta un semplice controesempio: gli insiemi lemniscati per  $m = 3$  e  $m = 4$  della matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.8)$$

collassano nel punto  $z = 1$ , mentre i suoi autovalori sono  $\lambda = 0, 1, 1, 2$ . Tuttavia, con qualche accorgimento, è possibile sfruttare in modo proficuo l'idea in (1.4.6).

Cerchiamo per prima cosa la proprietà che rende  $\mathcal{L}_{(1)}$  (cioè l'insieme di Geršgorin) e  $\mathcal{L}_{(2)}$  (insieme di Brauer) dei veri insiemi di inclusione di autovalori, e che manca in  $\mathcal{L}_{(m)}$  per  $m \geq 3$ . Uno dei problemi di (1.4.6) è che permette a somme per righe nulle di comparire nella produttoria, facendo “collassare” l'insieme come nell'esempio precedente. Questo ovviamente non avviene se la matrice  $A$  è irriducibile, ma in realtà si può mostrare che  $\mathcal{L}_{(m)}(A)$  può non includere tutti gli autovalori di  $A$  anche se  $A$  è irriducibile [6, p. 417]. Il vero problema di  $\mathcal{L}_{(m)}(A)$ , infatti, sono *gli indici* su cui si effettuano l'unione e i prodotti in (1.4.6). Imporre che siano semplicemente distinti, in analogia con l'insieme di Brauer, non è sufficiente: la questione è più profonda, e riguarda la forma del *grafo orientato* associato ad  $A$ , e i *nodi* del grafo su cui effettuare l'unione. Senza addentrarci troppo nell'argomento, elenchiamo semplicemente qualche definizione e infine i risultati ottenuti da Brualdi e le loro estensioni.

**Definizione 1.4.1.** Il *grafo orientato* di una matrice  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$ , denotato da  $\Gamma(A)$ , è il grafo orientato su  $n$  nodi  $P_1, \dots, P_n$  tale che in  $\Gamma(A)$  è presente un arco orientato da  $P_i$  a  $P_j$  se e solo se  $a_{i,j} \neq 0$ .

Un grafo orientato  $\Gamma$  è detto *fortemente connesso* se per ogni coppia di nodi distinti  $P_i, P_j$  è presente in  $\Gamma$  un cammino orientato di lunghezza finita (ovvero una sequenza finita di archi orientati) che inizia in  $P_i$  e finisce in  $P_j$ . Se il grafo orientato di  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\Gamma(A)$ , è fortemente connesso, allora lo è anche  $\Gamma(P^T A P)$  per ogni matrice di permutazione<sup>10</sup>  $P \in M_n(\mathbb{R})$ , dal momento che  $\Gamma(P^T A P)$  è precisamente  $\Gamma(A)$  con una diversa numerazione dei nodi. Da questo è facilmente ricavabile [6, Teorema 6.2.24] che una matrice ha grafo orientato fortemente connesso se e solo se è irriducibile.

Diciamo che un grafo orientato è *debolmente connesso* se ogni nodo è collegato ad almeno un altro nodo da un cammino finito e viceversa, ovvero ogni nodo in  $\Gamma$  appartiene a qualche *circuito* (ovvero cammino orientato

<sup>10</sup>Una matrice  $P = [p_{i,j}] \in M_n(\mathbb{R})$  è detta di permutazione se esiste una permutazione  $\varphi$ , ovvero una mappa  $1-1$  di  $N = \{1, 2, \dots, N\}$ , tale che  $[p_{i,j}] = [\delta_{i,\varphi(j)}]$ . Una matrice di permutazione è quindi una matrice che ha esattamente un elemento in ogni riga e in ogni colonna pari a 1 e tutti gli altri elementi pari a 0.



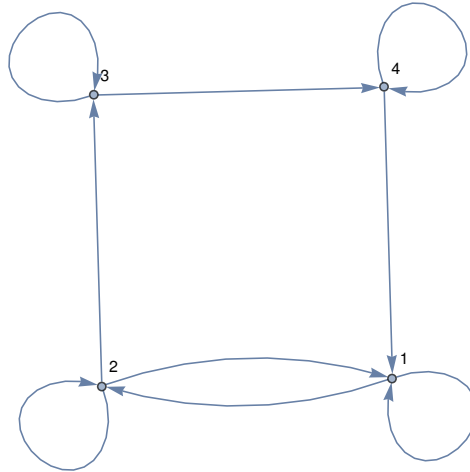


Figura 1.11: Grafo orientato della matrice  $B$  in (1.2.8). Dato che ogni nodo è collegato a tutti gli altri, il grafo è fortemente connesso e la matrice è irriducibile.

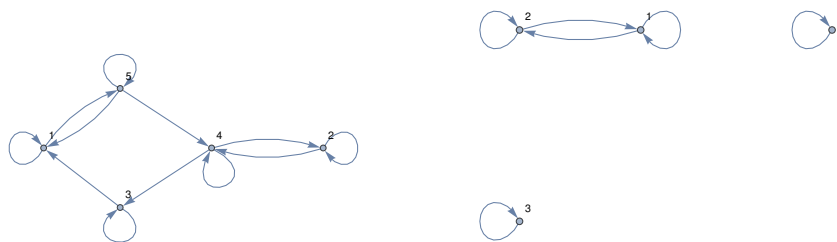


Figura 1.12: Grafi orientati delle matrici  $C$  in (1.4.5) (a sinistra) e  $D$  in (1.4.8) (a destra). Come si può notare, il grafo di  $C$  è fortemente connesso e quindi la matrice è irriducibile, mentre quello di  $D$  non è connesso e la matrice è riducibile.

chiuso) *non banale*. Un *circuito banale* è un cammino orientato di lunghezza uno che inizia e finisce sullo stesso nodo.

Diciamo che una matrice  $A$  è *debolmente irriducibile* se e solo se  $\Gamma(A)$  è debolmente connesso. Quindi,  $A$  è debolmente irriducibile se e solo se per ogni  $i \in N$  la  $i$ -esima riga di  $A$  ha almeno un elemento non diagonale diverso da zero  $a_{i,j_i}$  tale che esiste una sequenza finita  $a_{k_1,k_2}, a_{k_2,k_3}, \dots, a_{k_{m-1},k_m}$  di elementi di  $A$  diversi da zero per cui  $k_1 = j_i$  e  $k_m = i$ .

Denotiamo con  $C(A)$  l'insieme dei circuiti non banali nel grafo orientato  $\Gamma(A)$ .

**Teorema 1.4.6** (Brualdi). *Sia  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  con  $n \geq 2$ . Se  $A$  è debolmente irriducibile, allora ogni autovalore di  $A$  è contenuto nell'insieme*

$$\mathcal{B}(A) = \bigcup_{\gamma \in C(A)} \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{P_i \in \gamma} |z - a_{i,i}| \leq \prod_{P_i \in \gamma} r_i(A) \right\}, \quad (1.4.9)$$

ovvero: se  $\gamma = P_{i_1}P_{i_2}, P_{i_2}P_{i_3}, \dots, P_{i_k}P_{i_{k+1}}$  è un circuito non banale in  $\Gamma(A)$  con  $P_{i_{k+1}} = P_{i_1}$ , allora il corrispondente insieme nell'unione (1.4.9) è definito da un prodotto di  $k$  fattori, dove l'indice  $i$  assume i  $k$  valori  $i_1, \dots, i_k$ .

L'insieme  $\mathcal{B}(A)$  è detto *insieme di Brualdi*. Il teorema di non singolarità associato all'insieme di Brualdi è:

**Teorema 1.4.7** (Brualdi). *Sia  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  con  $n \geq 2$ . Se  $A$  è debolmente irriducibile e vale*

$$\prod_{P_i \in \gamma} |a_{i,i}| > \prod_{P_i \in \gamma} r_i(A)$$

per ogni circuito non banale  $\gamma \in C(A)$ , allora  $A$  è non singolare.

Se la matrice  $A$  è irriducibile, troviamo l'analogo dell'estensione di Tausky al teorema di Geršgorin (Teorema 1.2.4):

**Teorema 1.4.8.** *Se  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  con  $n \geq 2$  è irriducibile, allora un punto di frontiera  $\lambda$  di  $\mathcal{B}(A)$  può essere un autovalore di  $A$  solo se ogni lemniscata*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{P_i \in \gamma} |z - a_{i,i}| = \prod_{P_i \in \gamma} r_i(A) \right\}$$

passa per  $\lambda$  per ogni circuito non banale  $\gamma \in C(A)$ .

Il relativo teorema di non singolarità (analogo del Teorema 1.2.5):

**Teorema 1.4.9.** *Sia  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  con  $n \geq 2$ . Se  $A$  è irriducibile e vale*

$$\prod_{P_i \in \gamma} |a_{i,i}| \geq \prod_{P_i \in \gamma} r_i(A),$$

per ogni circuito non banale  $\gamma \in C(A)$ , con la disuguaglianza stretta che vale su almeno un circuito, allora  $A$  è non singolare.

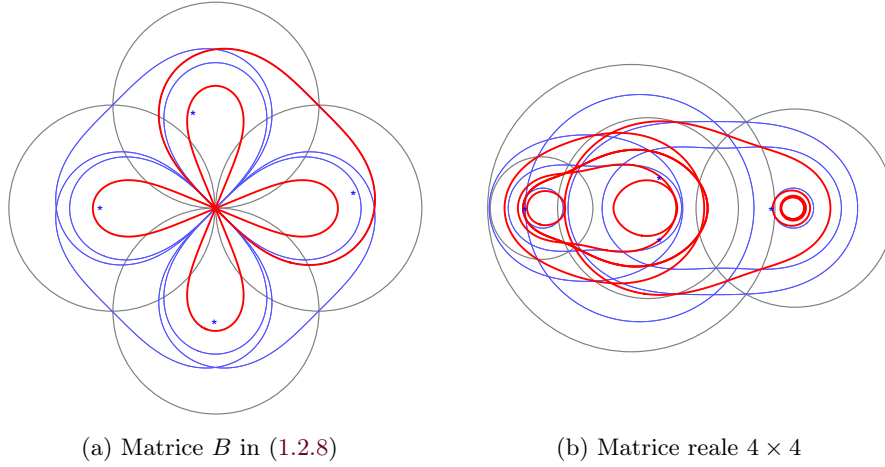


Figura 1.13: Insiemi di inclusione a confronto: insieme di Geršgorin (in grigio), di Brauer (in blu) e di Brualdi (in rosso).

## 1.5 Range numerico e inviluppo dello spettro

Nella Sezione 1.1 abbiamo elencato alcune proprietà del range numerico di una matrice, mettendo in luce come esse siano strettamente legate allo spettro di autovalori. In alcuni lavori recenti, dovuti principalmente a Psarrakos, Tsatsomeros, Adam e Bergqvist, il concetto di range numerico è stato usato per ottenere disequaglianze e inviluppi degli autovalori di una matrice. Riportiamo di seguito le più notevoli proprietà del range numerico  $W(A)$  di una matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  da [12]:

- $W(A)$  è convesso, chiuso e limitato
- $\sigma(A) \subseteq W(A)$
- per ogni matrice unitaria  $U$ ,  $W(U^*AU) = W(A)$
- $W(A + z\mathbb{I}) = W(A) + z$  e  $W(zA) = zW(A)$  per ogni  $z$  complesso
- il bordo di  $W(A)$ ,  $\partial W(A)$ , è una curva algebrica a tratti, e ogni punto in cui  $\partial W(A)$  non è differenziabile è un autovalore di  $A$
- se  $A$  è normale, allora  $W(A)$  è l'inviluppo convesso di  $\sigma(A)$
- $W(A)$  è un segmento sull'asse reale se e solo se  $A$  è hermitiana

Se si vuole calcolare numericamente il range numerico  $W(A)$  di una matrice, si può innanzi tutto partire da alcune considerazioni sui punti di frontiera di  $W(A)$ . Ad esempio, grazie alle proprietà elencate in precedenza si ha che

$$e^{-i\theta}W(e^{i\theta}A) = W(A). \quad (1.5.1)$$

Se denotiamo con  $\lambda_M(B)$  il più grande autovalore di una matrice  $B \in M_n(\mathbb{C})$  hermitiana, sappiamo grazie al Teorema 1.1.1 di Bendixson che  $\lambda_M(H(A))$ , dove  $H(A)$  è la parte hermitiana di  $A$ , limita  $W(A)$ , e quindi un asse a distanza  $\lambda_M(H(A))$  dall'origine è tangente a  $W(A)$ . A questo punto, si può usare (1.5.1) per trovare per rotazione altre tangenti. D'ora in avanti, denotiamo con  $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_n$  gli autovalori di  $H(A)$  e  $u_1, \dots, u_n$  i rispettivi autovettori ortonormali, per cui ad esempio  $\lambda_M(H(A)) = \delta_1(A) = \delta_1$ .

Per un angolo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , definiamo

$$\lambda_\theta := \delta_1(e^{i\theta} A) = \lambda_M(H(e^{i\theta} A))$$

e chiamiamo  $x_\theta \in \mathbb{C}^n$  un suo autovettore associato unitario:

$$H(e^{i\theta} A)x_\theta = \lambda_\theta x_\theta, \quad x_\theta^* x_\theta = 1.$$

Si può dimostrare, sfruttando la convessità di  $W(A)$ , che le rette

$$L_\theta = \left\{ e^{-i\theta}(\lambda_\theta + ti) : t \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.5.2)$$

sono tangenti a  $W(A)$  in  $p_\theta := x_\theta^* A x_\theta$ , che è un punto di frontiera di  $W(A)$  [12]. Inoltre, l'involuppo convesso dei punti  $p_\theta$  approssima dall'interno  $W(A)$  (è quello che viene chiamato talvolta  $W_{\text{int}}(A)$ ), con precisione migliorabile a piacere aumentando il numero di angoli  $\theta$  per cui si effettua il calcolo. In sintesi, si può trovare  $W(A)$  attraverso l'intersezione infinita di semipiani

$$W(A) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \left\{ e^{-i\theta}(s + it) : s, t \in \mathbb{R}, s \leq \lambda_\theta \right\}. \quad (1.5.3)$$

La (1.5.3) non solo fornisce un comodo metodo per calcolare il range numerico di una matrice (le Figure 1.1 e 1.3 viste in precedenza sono state ottenute in questo modo), ma apre la strada a nuovi metodi per ottenere insiemi di inclusione di autovalori, grazie all'utilizzo di altre curve al posto delle rette (1.5.2). In questa direzione sono andati diversi recenti lavori di Psarrakos, Tsatsomeros e Bergqvist.

### 1.5.1 Disuguaglianza di Adam-Tsatsomeros e involuppo cubico

Adam e Tsatsomeros mostrarono in [13] come, usando i due maggiori autovalori  $\delta_1$  e  $\delta_2$  della parte hermitiana di una matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $H(A)$ , e l'autovettore unitario  $u_1$  di  $H(A)$  associato a  $\delta_1$ , si possa trovare una disuguaglianza che ogni autovalore  $\lambda$  di  $A$  deve soddisfare. Definiamo  $\alpha = \text{Im}(u_1^* S(A) u_1)$  e  $K = \|S(A) u_1\|_2^2 - \alpha^2 \geq 0$ , dove  $S(A)$  è la parte antihermitiana di  $A$ . Vale

$$|\lambda - (\delta_1 + i\alpha)|^2 (\text{Re } \lambda - \delta_2) \leq K(\delta_1 - \text{Re } \lambda). \quad (1.5.4)$$

Nel caso di uguaglianza in (1.5.4) abbiamo una curva  $\gamma(A)$  che confina  $\sigma(A)$ . Chiamiamo  $E(A)$  la regione delimitata da  $\gamma(A)$  in cui si trovano gli autovalori di  $A$ . Usando un ragionamento analogo a quello sfruttato per determinare il range numerico, ovvero applicando una rotazione  $e^{-i\theta}$  alla regione  $E$  della matrice ruotata  $e^{i\theta}A$  e applicando un'intersezione su tutti i possibili angoli  $\theta$ , si ottiene un involuppo per lo spettro di  $A$ :

$$\mathcal{E}(A) := \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} E(e^{i\theta} A), \quad (1.5.5)$$

risultato ottenuto da Psarrakos e Tsatsomeros in [14]. Di seguito alcune tra le più importanti proprietà di  $\gamma$  e di  $\mathcal{E}$ , esposte dal trio di matematici greci Adam, Psarrakos e Tsatsomeros nella serie di lavori [13, 14, 15]:

- $\sigma(A) \subseteq \mathcal{E}(A)$ ;
- $\mathcal{E}(A) \subseteq W(A)$ ;
- $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \delta_2\}$  è un asintoto verticale di  $\gamma$ ;
- $\gamma$  è simmetrica rispetto alla linea orizzontale  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \alpha\}$ , e può intercettare questa linea in fino a tre punti distinti;
- se  $\gamma$  ha un cammino chiuso, allora all'interno si trova esattamente un autovalore semplice;
- $\mathcal{E}$  è sempre compatto.

### 1.5.2 Disuguaglianza di Bergqvist e involuppi di grado superiore

Una generalizzazione della disuguaglianza (1.5.4) è stata ottenuta da Bergqvist in [16] considerando i primi  $k + 1$  più grandi autovalori della parte hermitiana di una matrice al posto dei primi due. Seguendo [16], chiamiamo  $U \in M_n(\mathbb{C})$  la matrice che ha per colonne  $u_j$ , e  $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n) \in M_n(\mathbb{R})$ . Si ha quindi

$$U^* H(A) U = \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_k & 0 \\ 0 & \tilde{\Delta}_k \end{pmatrix},$$

con  $\Delta_k = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_k)$  e  $\tilde{\Delta}_k = \operatorname{diag}(\delta_{k+1}, \dots, \delta_n)$ . Definiamo ora la matrice antihermitiana

$$Y = U^* S(A) U = \begin{pmatrix} Y_k & -V^* \\ V & \tilde{Y}_k \end{pmatrix},$$

dove  $Y_k \in M_k(\mathbb{C})$  e  $\tilde{Y}_k \in M_{n-k}(\mathbb{C})$  sono antihermitiane, e  $V \in M_{n-k, k}(\mathbb{C})$ . Consideriamo ora, per  $z \in \mathbb{C}$ , la matrice

$$U^*(A - z\mathbb{I}_n)U = U^*(H(A) + S(A) + z\mathbb{I}_n)U = \Delta + Y + z\mathbb{I}_n,$$

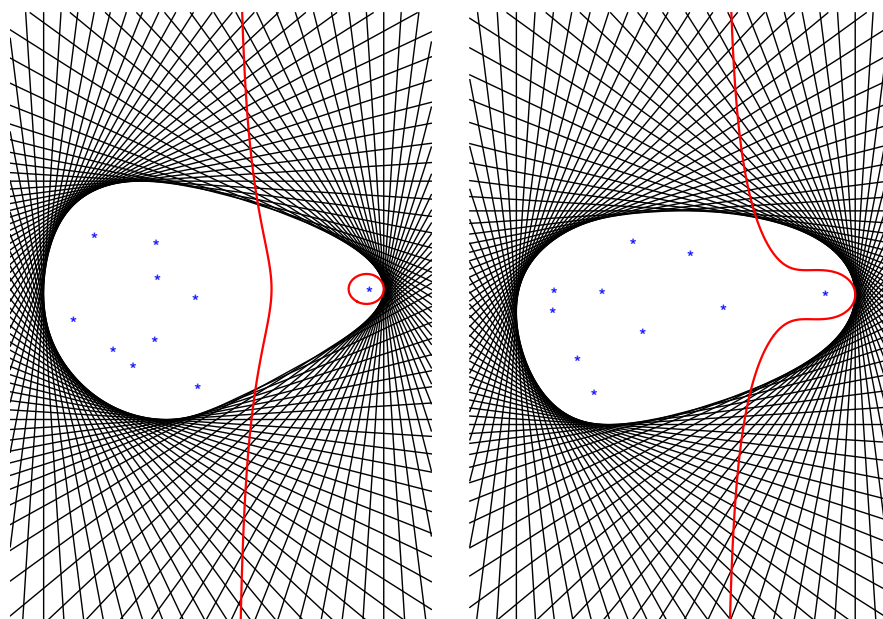


Figura 1.14: La disuguaglianza di Adam-Tsatsomeros applicata a due matrici complesse generate con distribuzione uniforme nel rettangolo di vertici  $-i$  e  $1+i$ : le condizioni per cui la curva  $\gamma$  (in rosso) riesce a isolare un autovalore sono spiegate in [13].

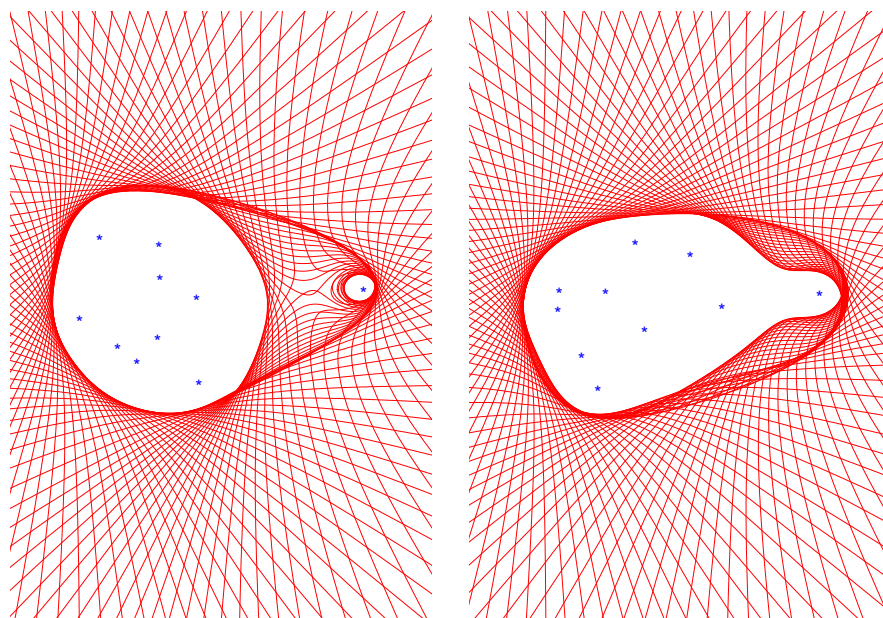


Figura 1.15: L'involuppo cubico delle stesse matrici della Figura 1.14.

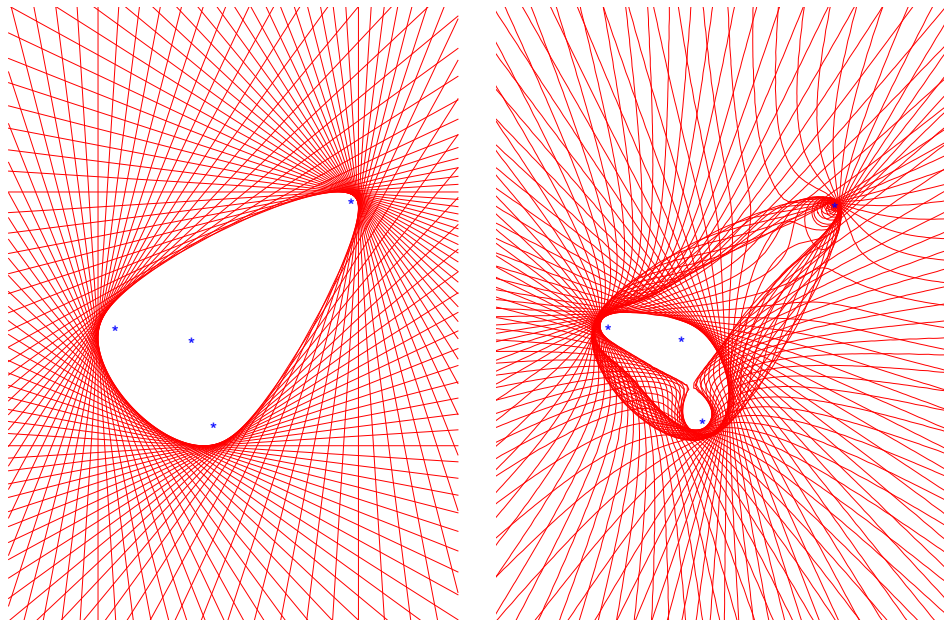


Figura 1.16: Per matrici random generate con una distribuzione con media diversa da 0, si nota che un autovalore si trova isolato a una certa distanza dal restante “bulk” di autovalori (queste osservazioni verranno formalizzate nel Capitolo 3). In questi casi, è facile che l’involuppo cubico della matrice sia estremamente efficace nel confinare l’autovalore isolato, oltre che restringere molto l’insieme di inclusione rispetto al range numerico. Questo ragionamento vale per la matrice in figura, generata con distribuzione uniforme nel rettangolo di vertici  $0$  e  $1 + i$ , e per le matrici delle Figure 1.14 e 1.15.

e chiamiamo  $X_z$  la sua submatrice superiore  $k \times k$ ,

$$X_z = \Delta_k + Y_k + z\mathbb{I}_k.$$

Si può dimostrare che per ogni  $\lambda \in \sigma(A)$  vale la disuguaglianza

$$|\det X_\lambda|^2 (\operatorname{Re} \lambda - \delta_{k+1}) \leq (\sigma_1(V))^2 \lambda_M \left( H((\det X_\lambda) \operatorname{adj}(X_\lambda^*)) \right), \quad (1.5.6)$$

dove  $\sigma_1(A)$  indica il più grande valore singolare di  $A$  e  $\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T$ .

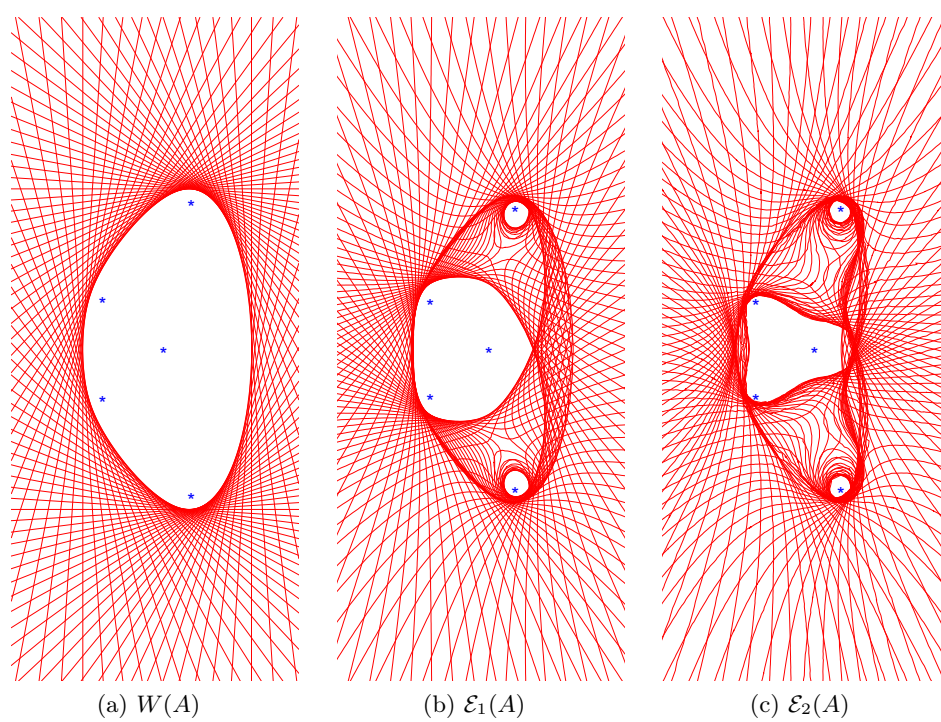
Questa disuguaglianza individua una regione  $E_k(A)$  nel piano complesso delimitata da una curva  $\gamma_k(A)$  corrispondente al caso di uguaglianza in (1.5.6). Utilizzando il consueto procedimento delle rotazioni si ottiene l'inviluppo

$$\mathcal{E}_k(A) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} E_k(e^{i\theta} A), \quad (1.5.7)$$

per il quale vale  $\sigma(A) \subseteq \mathcal{E}_k(A)$ . Chiameremo  $k$  il “grado” dell'inviluppo. Ponendo  $k = 1$  in (1.5.6) si torna alla disuguaglianza di Adam-Tsatsomeros (1.5.4), per cui la curva  $\gamma$  corrisponde alla curva  $\gamma_1$ .

Alcune delle proprietà valide per  $\gamma_1$  non valgono più per curve di grado superiore: ad esempio, un cammino chiuso di  $\gamma_k$  in generale può contenere più di un autovalore (come nelle Figure 1.20 e 1.22). Inoltre, nonostante numerosi esempi favorevoli come nelle Figure 1.17 e 1.18, niente garantisce che inviluppi di grado superiore siano contenuti in quelli di grado inferiore: come in Figura 1.19, a volte può capitare il contrario. Comunque, se dagli esempi si volesse evincere una tendenza generale nell'aumentare il grado degli inviluppi, sarebbe proprio quella di avere un miglior confinamento degli autovalori (Figura 1.22). Come viene messo in luce in [16], i rapporti esistenti tra le curve  $\gamma_k$  all'aumentare di  $k$  sono ancora da esplorare.



Figura 1.17: Involuppi di una matrice  $A \in M_5(\mathbb{R})$ .

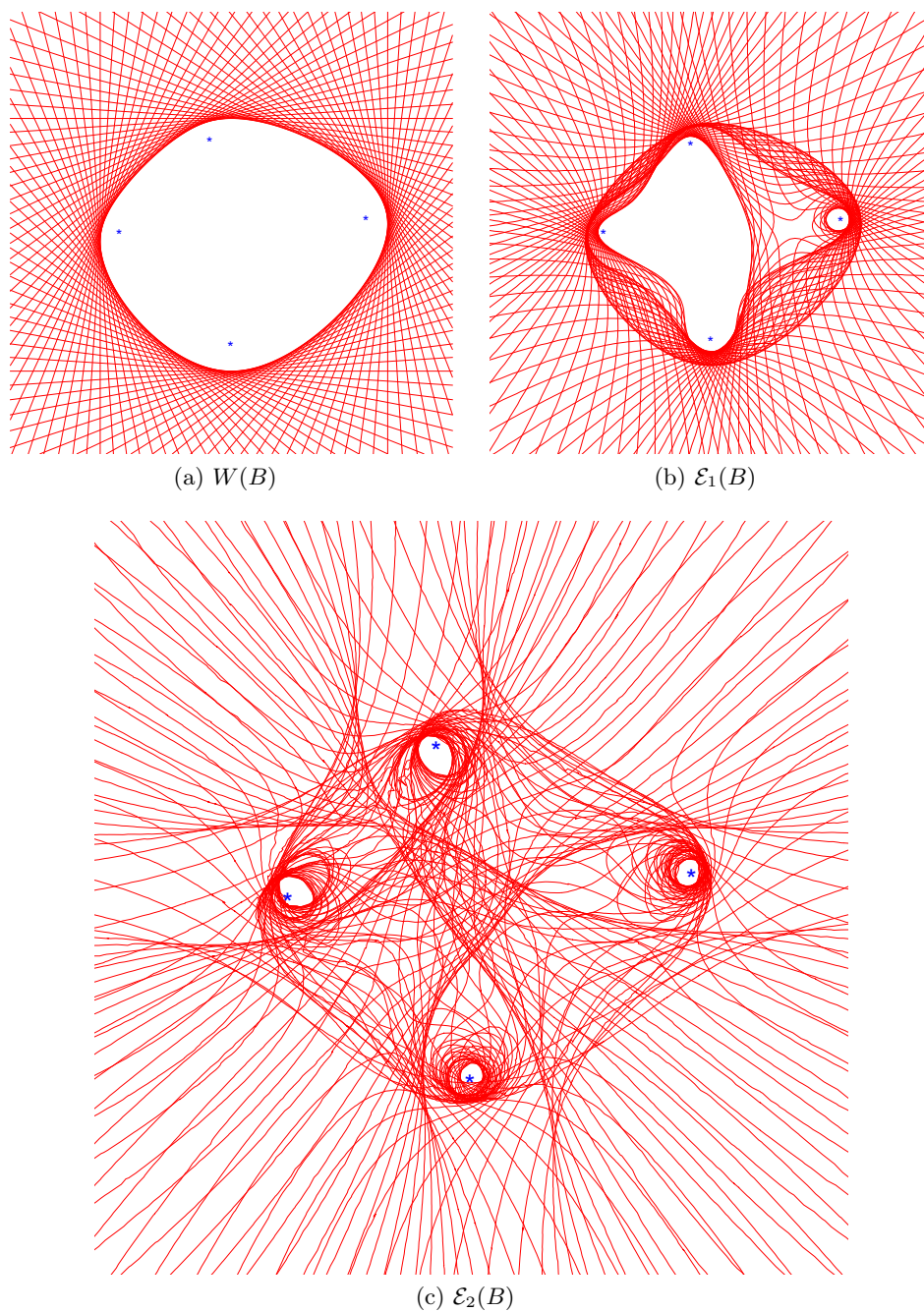


Figura 1.18: Involuppi della ormai familiare matrice  $B$  definita in (1.2.8).

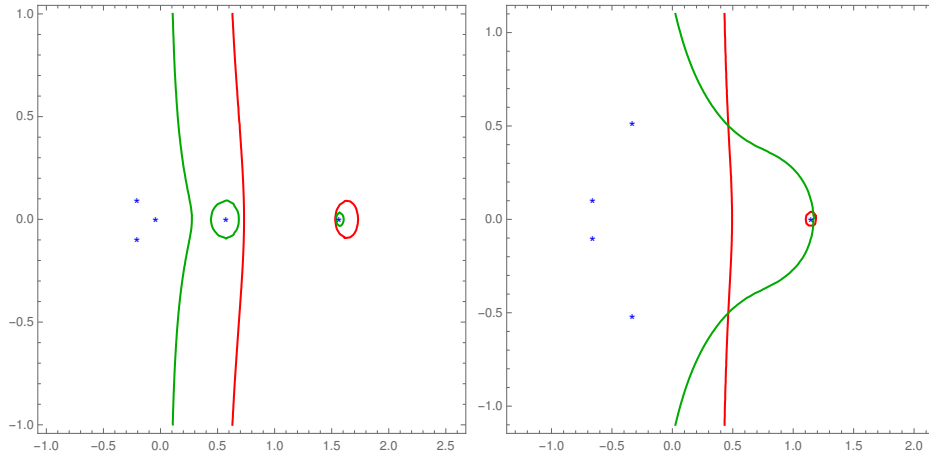


Figura 1.19: Comportamento incostante delle curve  $\gamma_1$  (in rosso) e  $\gamma_2$  (in verde) per due matrici reali  $5 \times 5$ : mentre per la matrice mostrata nel caso a sinistra  $\gamma_2$  è completamente contenuta nella regione  $E_1$  delimitata da  $\gamma_1$  e riesce addirittura a isolare un autovalore in più, nel caso mostrato a destra  $\gamma_2$  ha una parte esterna a  $E_1$  e fallisce nell'isolare l'autovalore con parte reale maggiore.

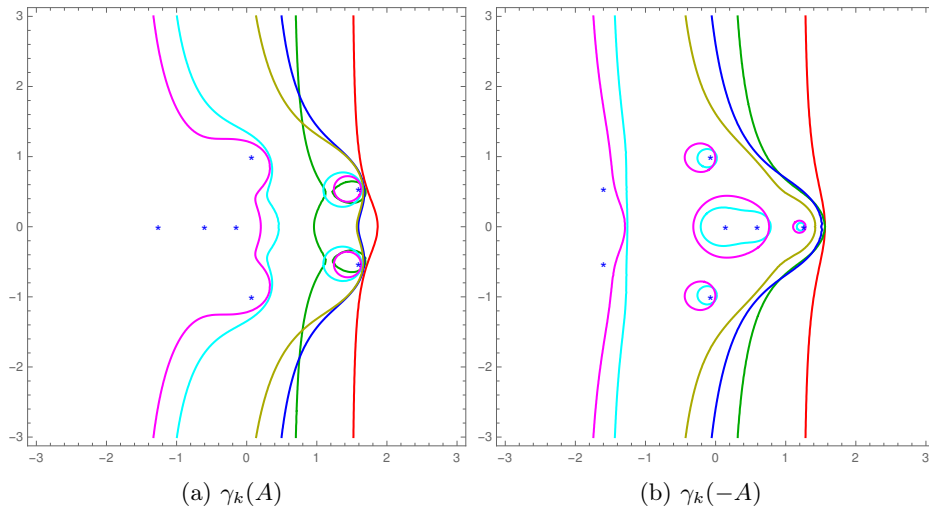


Figura 1.20: Curve  $\gamma_k$  a tutti i gradi possibili  $1 \leq k \leq 6$  per una matrice  $A \in M_7(\mathbb{R})$ . In rosso  $k = 1$ , in verde  $k = 2$ , in blu  $k = 3$ , in giallo  $k = 4$ , in azzurro  $k = 5$ , in viola  $k = 6$ .

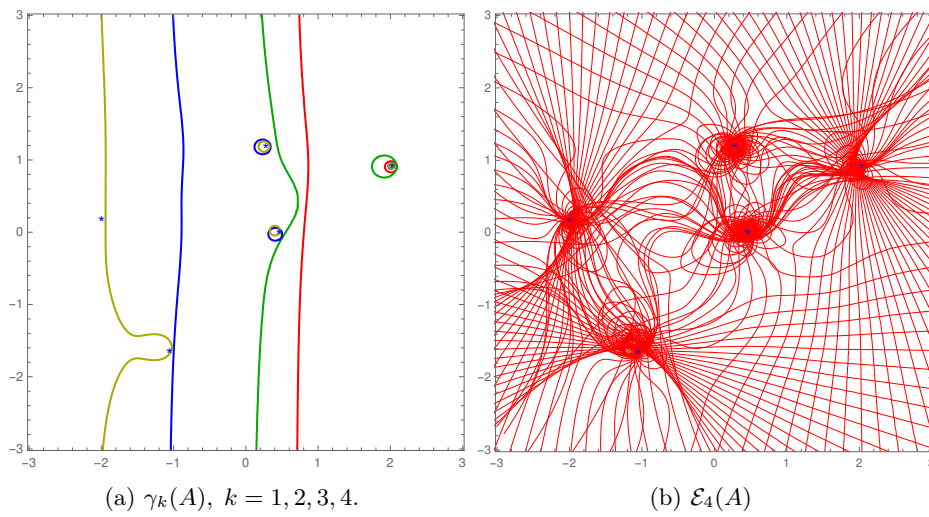


Figura 1.21: Per questa matrice complessa  $5 \times 5$ , la curva e l'involuppo di grado 4 mostrano una spettacolare efficacia nel confinare gli autovalori.

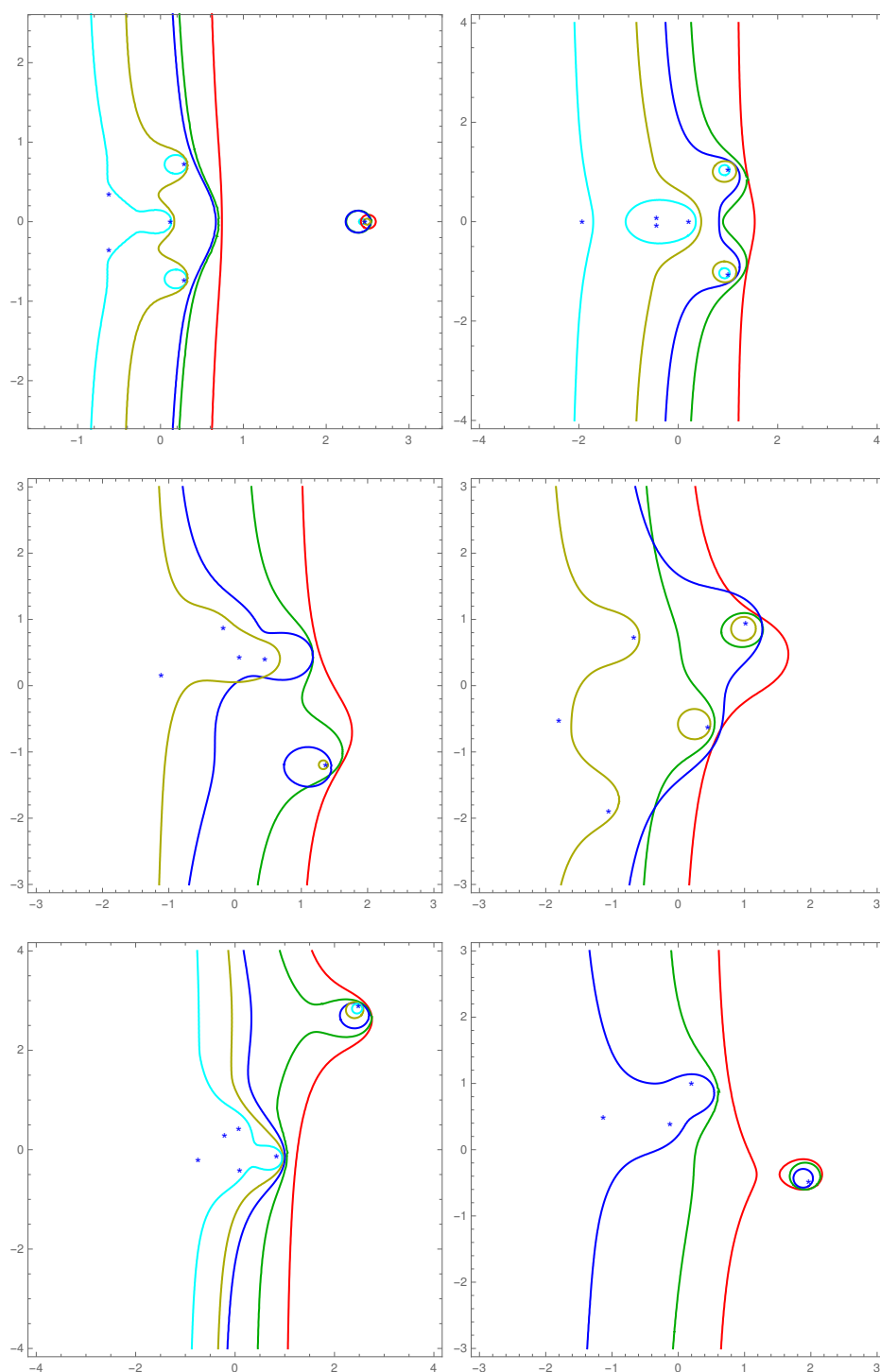


Figura 1.22: Altri esempi di curve  $\gamma_k$  per matrici reali e complesse. Benché non sia sempre vero che curve di grado più alto confinano meglio gli autovalori, si può notare che la tendenza generale è questa.

## Capitolo 2

# Teoria spettrale delle matrici random

In questo capitolo ci occuperemo di alcuni aspetti fondamentali della teoria delle matrici random (RMT).

Bohigas e Weidenmüller [5] hanno individuato le radici dell'uso della RMT nella fisica nell'idea di Bohr di *compound nucleus*, che risale agli anni Trenta. Il nucleo viene visto come un problema a molti corpi "estremo", per il quale un approccio che si basa su approssimazioni di combinazioni di problemi a un corpo perde ogni validità; bisogna quindi trattare certi aspetti del nucleo in modo collettivo. L'hamiltoniana del sistema è sconosciuta, ma anche se fosse nota sarebbe impossibile ricavarne gli autovalori: Wigner iniziò così a studiarne le proprietà statistiche, quali la media e le fluttuazioni intorno alla media in termini di distribuzione dei livelli energetici. Questo punto di vista motivò lo stesso Wigner, negli anni Cinquanta, a introdurre le matrici random, che "rimpiazzano" l'hamiltoniana del sistema, e i cui autovalori hanno, come egli ipotizzò, proprietà statistiche identiche a quelle dei livelli energetici dei nuclei. Wigner iniziò così a studiare particolari ensemble di matrici, come quelli hermitiani gaussiani e quelli di Wishart (composti matrici  $H = AA^T$ , con  $A$  reale e distribuita gaussianamente), ottenendo risultati di primaria importanza come la legge del semicerchio (di cui parleremo più avanti) e la distribuzione degli spazamenti tra i livelli (la cosiddetta *Wigner surmise*).

Passarono diversi anni prima di una conferma, perché i dati sperimentali a disposizione all'epoca non erano sufficienti. Dati più precisi iniziarono ad arrivare negli anni Sessanta dal gruppo di Rainwater, ma ancora in numero troppo basso per un paragone statistico significativo con le predizioni della RMT. Nel corso degli anni Settanta affluiva una mole di dati sempre maggiore, finché nel 1982 Bohigas, Haq e Pandey combinarono tutti quelli disponibili e verificarono una grande concordanza tra essi e le misure statistiche della RMT [5].

Poco dopo, nel 1984, usando risultati numerici sui livelli del biliardo di

Sinai (un particolare tipo di sistema caotico), Bohigas, Giannoni e Schmit [4] mostrarono il notevole accordo tra le fluttuazioni di tali livelli e le predizioni della RMT, e formularono la congettura (ancora non dimostrata, ma suffragata da numerosi e precisi calcoli numerici) che le misure di fluttuazione spettrale di un generico sistema caotico coincidano con quelle dell'ensemble di matrici canonico che ha la stessa simmetria - GUE, GOE o GSE, che introdurremo più avanti.

Nel frattempo la RMT aveva trovato spazio anche nella teoria dei numeri: nel 1973, Montgomery avanzò la congettura che la *two-points correlation function* degli zeri della funzione zeta di Riemann sia identica a quella degli autovalori di una matrice random hermitiana; "... his idea embedded random matrices deeply in the purest of pure mathematics".<sup>1</sup> Anche in questo caso, non appena arrivarono i risultati di Odlyzko negli anni Ottanta, che calcolò numericamente un gran numero di zeri (che seguono tutti l'ipotesi di Riemann), fu possibile un paragone statistico che diede prova di coerenza con le predizioni della RMT.

Oggi gli ambiti in cui la teoria delle matrici random viene applicata sono innumerevoli; tra questi, oltre a quelli già citati, i più noti sono: fisica della materia condensata, localizzazione di Anderson, cromodinamica quantistica, teoria delle stringhe, gravità quantistica bidimensionale, teoria dei campi, reti neurali, statistica multivariata, modelli finanziari, di crescita di popolazioni, biologici e ecologici.

Un curioso e divertente esempio di applicazione della teoria riguarda il sistema di trasporto pubblico di Cuernavaca, in Messico. In questa città non esiste un sistema centralizzato, non esistono orari e ogni autobus è proprietà del guidatore. A ogni fermata, il guidatore ottiene informazioni sull'orario di partenza del precedente autobus dalle persone in attesa, e regola la sua velocità in modo da massimizzare il numero di passeggeri che potrà ospitare a bordo nel minor tempo possibile, e quindi il suo profitto. Questo porta a una competizione tra i guidatori, una mutua interazione che allontana la distribuzione di probabilità del tempo di attesa degli autobus da quella di Poisson che sarebbe altrimenti, la quale porterebbe a frequenti incontri e "clustering" di autobus. I matematici cechi Krbálek e Seba registrarono gli orari di partenza degli autobus della linea 4 a varie fermate per un mese, e trovarono [17] che gli intervalli di tempo tra un autobus e l'altro sono descritti accuratamente da un ensemble di matrici hermitiane!

Cerchiamo quindi di addentrarci in questa vasta teoria. Per prima cosa, è

---

<sup>1</sup>Freeman Dyson, prefazione a *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory*, 2011 [5].

evidente che i metodi descritti nel Capitolo 1 non saranno utilizzabili in tale ambito, soprattutto per il fatto che ottenere confini certi per gli autovalori ha ora poco senso. È facile capire come, aumentando la dimensione della matrice in questione, gli insiemi di inclusione si svuotino di significato (Figure 2.1 e 2.2). Un'interessante eccezione in Figura 2.3.

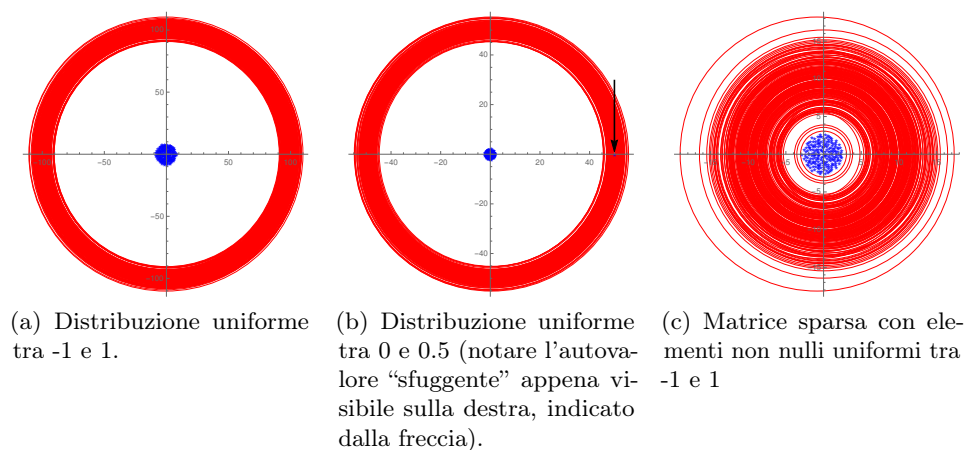


Figura 2.1: Cerchi di Geršgorin per matrici reali  $200 \times 200$ .

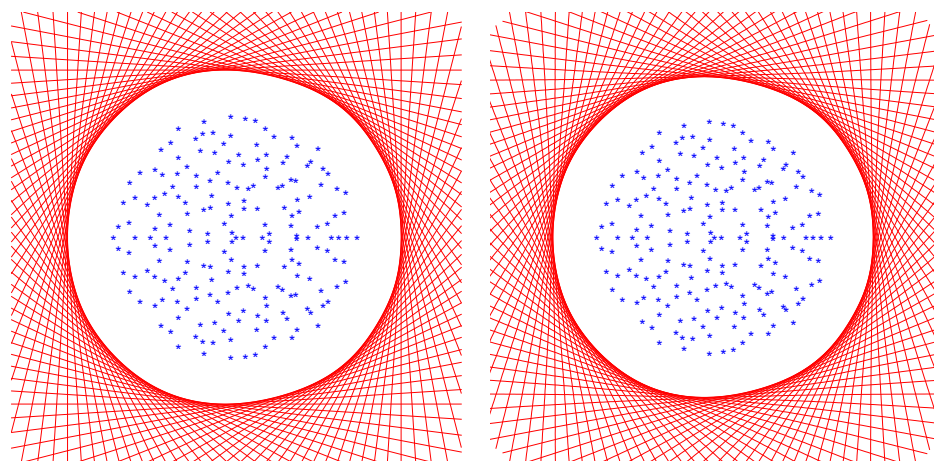


Figura 2.2: Range numerico (a sinistra) e involuppo cubico  $\mathcal{E}_1$  (a destra) di una matrice reale  $200 \times 200$  generata con distribuzione uniforme tra  $-1$  e  $1$ . Con l'aumentare della dimensione della matrice, i miglioramenti che gli involuppi di qualsiasi grado danno rispetto al range numerico diventano impercettibili.



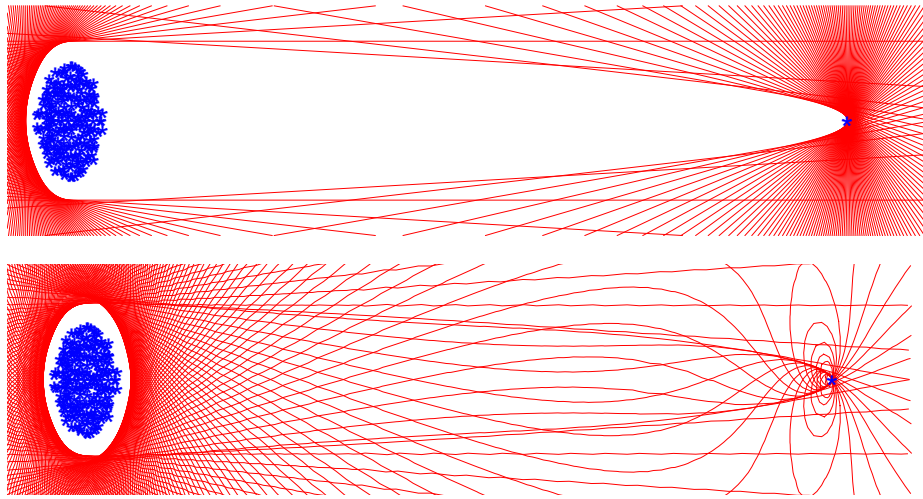


Figura 2.3: Il ragionamento fatto per la Figura 1.16 riguardo a matrici generate con una distribuzione con media diversa da zero vale a maggior ragione per matrici di grande dimensione: per la matrice reale  $200 \times 200$  generata con distribuzione uniforme tra 0 e 1 mostrata in figura, l’involuppo cubico (in basso) può essere utile rispetto al range numerico (in alto) in quanto riesce a “prevedere” con grande precisione l’autovalore isolato. Involuppi di grado superiore non portano migliorie apprezzabili rispetto a quello cubico (di grado 1).

## 2.1 Convergenza delle distribuzioni spettrali

Uno dei più importanti e impegnativi problemi della teoria delle matrici random è quello di studiare il limite della distribuzione degli autovalori di una certa classe di matrici quando la dimensione tende ad infinito. L'oggetto di studio è quindi la *distribuzione spettrale empirica* (DSE) di una matrice  $X_n \in M_n(\mathbb{C})$  con autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , definita come

$$\mu_{X_n}(x, y) := \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n : \operatorname{Re}(\lambda_j) \leq x, \operatorname{Im}(\lambda_j) \leq y\}. \quad (2.1.1)$$

Vogliamo quindi capire come  $\mu_{X_n}$  converga a  $\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{X_n}$  e quale sia la forma di  $\mu$ .

**Definizione 2.1.1** (Modi di convergenza). Per ogni  $n$ , sia  $F_n$  una variabile aleatoria a valori in uno spazio topologico di Hausdorff  $X$  e sia  $F$  un altro elemento di  $X$ :

- diciamo che  $F_n$  converge in probabilità a  $F$ ,  $F_n \xrightarrow{p} F$ , se, per ogni intorno  $V$  di  $F$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(F_n \in V) = 1$ ;
- diciamo che  $F_n$  converge quasi certamente (q.c.) a  $F$ ,  $F_n \xrightarrow{q.c.} F$ , se  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F) = 1$ .

La convergenza quasi certa implica la convergenza in probabilità, ma non viceversa [18].

### 2.1.1 Legge del semicerchio

Come già detto, gli studi in questo campo sono iniziati negli anni Cinquanta, quando Wigner studiò la DSE limite per una classe di matrici simmetriche i cui elementi diagonali e sopra la diagonale sono distribuiti in modo indipendente [19], trovando, sotto particolari assunzioni sui momenti, la famosa *legge del semicerchio*. Questo risultato fu presto generalizzato a matrici hermitiane e migliorato riducendo le ipotesi sui momenti, fino ad arrivare alla versione attuale:

**Teorema 2.1.1** (Legge del semicerchio). Sia  $X_n \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice hermitiana i cui elementi sopra la diagonale sono variabili aleatorie complesse indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) con media zero e varianza uno e i cui elementi sulla diagonale sono variabili aleatorie i.i.d. (senza alcuna assunzione sulla distribuzione). Allora,  $\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}X_n} \xrightarrow{q.c.} \mu_{sc}$ , dove  $\mu_{sc}$  ha densità

$$\rho_{sc}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}, & |x| \leq 2, \\ 0 & |x| > 2, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

ed è chiamata legge del semicerchio.

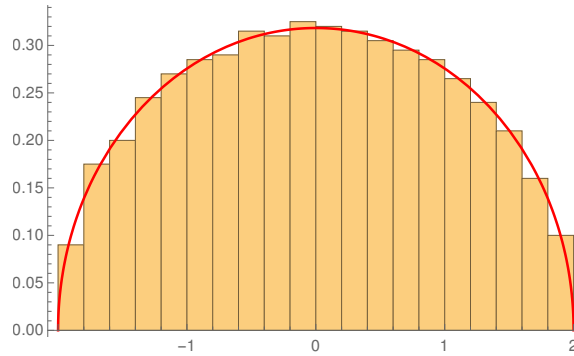


Figura 2.4: Istogramma riempito con gli autovalori di una matrice  $1000 \times 1000$  del GOE. In rosso  $\rho_{sc}$  in (2.1.2).

Le matrici del tipo esposto in questo teorema costituiscono l'*ensemble di Wigner*.

*Osservazione.* Come in questo caso, tutti i risultati sulla convergenza coinvolgeranno la DSE  $\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}X_n}$ , a cui talvolta ci riferiremo come *DSE normalizzata*. Inoltre, i teoremi verranno esposti per comodità per distribuzioni che hanno varianza pari a 1. Naturalmente, una varianza  $\sigma^2 < \infty$  ha solo l'effetto di riscaldare tutte le leggi di convergenza, che continuano a valere se in esse si sostituisce  $\mu_{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}X_n}$  a  $\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}X_n}$ . Si potrebbe quindi dire che nella normalizzazione della DSE bisogna tenere conto anche della varianza, per cui la DSE normalizzata diventa  $\mu_{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}X_n}$ . Il Teorema 2.1.1 pertanto continua a valere per la convergenza della DSE normalizzata anche se la distribuzione degli elementi sopra la diagonale ha varianza finita. Nel caso in cui nella normalizzazione non si voglia includere  $\sigma$ , naturalmente, (2.1.2) diventa

$$\rho_{sc,\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} \quad \text{se } |x| \leq 2\sigma$$

e 0 altrimenti.

Dyson [20] mostrò come il più generico ensemble di matrici definite da un gruppo di simmetria per inversione temporale sia sempre esprimibile in termini di ensemble di matrici a coefficienti reali, complessi o quaternionici. Sono quindi di grande importanza i tre tipi particolari di ensemble di Wigner:

- *ensemble gaussiano ortogonale* (GOE), costituito da matrici gaussiane reali;
- *ensemble gaussiano unitario* (GUE), costituito da matrici gaussiane complesse;
- *ensemble gaussiano simplettico* (GSE), costituito da matrici gaussiane quaternioniche.

Questa divisione in base alle simmetrie per inversione temporale è la cosiddetta *threefold way* di Dyson; molti risultati su questi tre ensemble possono essere unificati usando l'*indice di Dyson*  $\beta$ , che vale 1, 2 e 4 rispettivamente. Ad esempio, la densità di probabilità congiunta degli autovalori è

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z_\beta} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \exp\left(-\frac{\beta}{4} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right), \quad (2.1.3)$$

dove  $Z_\beta$  è una costante di normalizzazione.

Il termine  $\prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$  fa in modo che gli autovalori non si avvicinino troppo gli uni agli altri (la probabilità che lo facciano tende a zero): è la *repulsione dei livelli*, concetto di fondamentale importanza nella teoria delle matrici random. Infatti, come già delineato nell'introduzione a questo capitolo, molti fenomeni che mostrano particolari tipi di repulsione tra le proprie componenti - dai livelli energetici dei nuclei e gli zeri della funzione zeta di Riemann ai tempi di attesa per l'autobus a Cuernavaca - sono modellizzabili con grande precisione dall'ensemble con l'opportuno indice di Dyson.

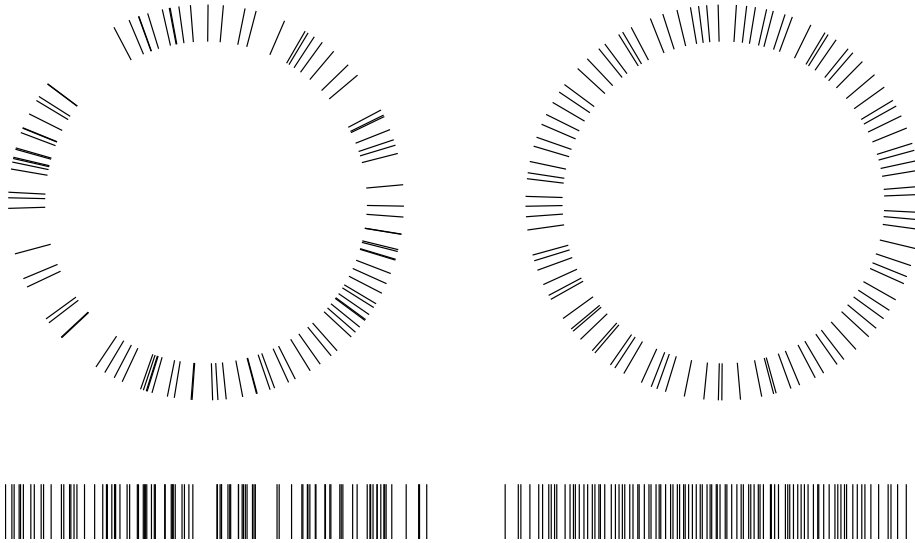


Figura 2.5: Un esempio di repulsione dei livelli: a sinistra 100 numeri generati uniformemente sulla circonferenza unitaria (in alto) e sul segmento  $[-2, 2]$  (in basso), a destra gli autovalori di una matrice  $100 \times 100$  random gaussiana unitaria (quello che viene talvolta chiamato CUE; in alto) e hermitiana (GUE; in basso). Come si può notare, gli autovalori delle due matrici random si evitano vicendevolmente con maggior successo, seguendo una distribuzione ben equispaziata senza creare cluster e buchi come avviene per la distribuzione uniforme.

### 2.1.2 Legge del cerchio

Unitamente ai risultati ottenuti sulle matrici hermitiane, iniziarono gli studi sulle matrici non hermitiane. Si iniziò a ipotizzare la *legge del cerchio*:

**Congettura 1** (Legge del cerchio). *La DSE normalizzata di matrici i cui elementi sono variabili aleatorie complesse i.i.d. con media zero e varianza finita converge q.c. alla distribuzione uniforme nel disco unitario.*

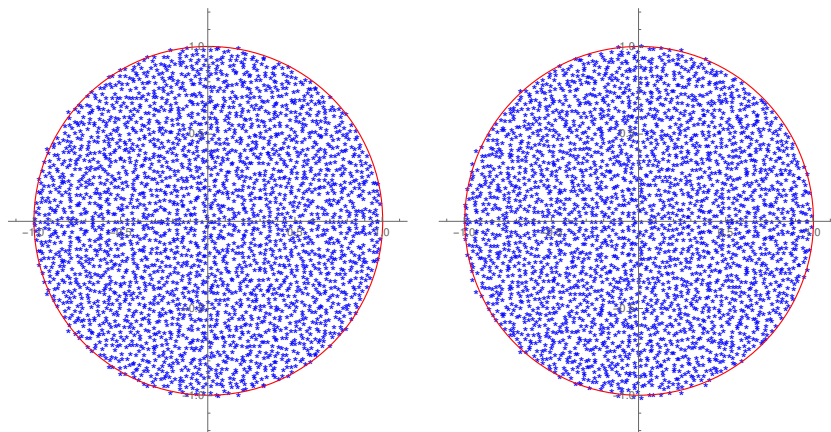


Figura 2.6: Lo spettro (normalizzato) di due matrici random  $3000 \times 3000$ : a sinistra una matrice di Ginibre, a destra una matrice i cui elementi sono  $-1$  o  $1$  con probabilità  $1/2$  (ovvero i cui elementi sono variabili di Bernoulli su  $\{-1, 1\}$ ). In rosso il cerchio unitario.

L'evidenza numerica di questa legge è molto forte (Figura 2.6), ma la dimostrazione rigorosa presenta notevoli difficoltà. I primi risultati quantitativi arrivarono nel caso gaussiano da Ginibre [21], che trovò la densità congiunta degli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  di matrici gaussiane reali, complesse o quaternioniche:

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \exp \left( - \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right). \quad (2.1.4)$$

La somiglianza con (2.1.3) è forte, ma in questo caso i  $\lambda_j$  sono complessi. Questo risultato fu usato da Mehta per dimostrare la congettura della legge del cerchio nel caso gaussiano complesso [22]. Una versione nel caso reale arrivò da Edelman [23]. Le matrici ad elementi gaussiani i.i.d. formano l'*ensemble di Ginibre*.

Nel caso generale, però, non esiste una formula per la densità congiunta e il problema si complica notevolmente: iniziò così un lungo cammino, fatto di grandi e piccoli passi avanti (a volte anche indietro!), risultati parziali e anche qualche colpo di scena, per avvicinarsi sempre di più a una dimostrazione

della Congettura 1 (per una esposizione dell'argomento e una bella discussione di carattere storico si veda [24]). Importanti tappe verso l'indipendenza dalla distribuzione sono stati i metodi sviluppati da Girko in numerosi lavori a partire da [25]: le innovative tecniche di hermiticizzazione (o hermitianizzazione) da lui ideate sono state e sono tuttora un caposaldo della letteratura sull'argomento. Basandosi sulle idee di Girko, Bai<sup>2</sup> dimostrò la congettura sotto le ipotesi di momento sesto finito e densità della distribuzione limitata [27]. Successivamente Bai e Silverstein migliorarono questo risultato restringendo le richieste sui momenti alla finitezza del  $(2 + \eta)$ -esimo momento, con  $\eta > 0$  [28]. Götze e Tikhomirov eliminarono la richiesta di densità limitata, dimostrando la legge del cerchio nella sua versione detta talvolta *debole*, ovvero in cui la DSE converge in probabilità e non quasi certamente, prima per distribuzioni che hanno code sub-gaussiane [29], poi per distribuzioni con  $(2 + \eta)$ -esimo momento limitato [30], in entrambi i casi senza assumere l'esistenza di una densità della distribuzione. Arrivarono poi i lavori di Pan e Zhou [31], in cui la legge del cerchio viene dimostrata per distribuzioni con momento quarto finito (assunzione che, come vedremo in seguito, permette alla norma spettrale della matrice di convergere q.c.), e di Tao e Vu [32], in cui si richiede solo la finitezza del  $(2 + \eta)$ -esimo momento, questa volta per la convergenza q.c. Furono sempre Tao e Vu che, in [33], arrivarono alla meta finale riuscendo a eliminare quello scomodo  $\eta$ , e dimostrarono dopo più di mezzo secolo la Congettura 1:

**Teorema 2.1.2** (Legge del cerchio). *Sia  $X_n \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice i cui elementi sono variabili aleatorie i.i.d. con media zero e varianza uno. Allora,  $\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}X_n} \xrightarrow{q.c.} \mu_c$ , dove  $\mu_c$  è la distribuzione uniforme nel disco unitario con densità*

$$\rho_c(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & |\omega| \leq 1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ed è detta legge del cerchio.

Vale la pena notare che la proiezione di  $\rho_c(\omega)$  sull'asse reale

$$\rho_{c,x}(x) := \int dy \rho_c(\omega) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} \quad (2.1.5)$$

segue una versione “risalata” della legge del semicerchio (2.1.2).

---

<sup>2</sup>“... I worked for 13 years from 1984 to 1997, which was eventually published in *Annals of Probability*. It was the hardest problem I have ever worked on”. Zhidong Bai, intervista con Atanu Biswas del 2006, riportata da [24]. Bai dovette cercare di aggirare alcuni “salti” contenuti nell'articolo di Girko, la cui dimostrazione poggiava implicitamente su alcuni risultati relativi al comportamento del minore valore singolare delle matrici random che all'epoca non erano ancora dimostrati e che divennero da quel momento oggetto di numerosi articoli (si veda ad esempio [26]).

Le matrici che soddisfano le ipotesi del Teorema 2.1.2 fanno parte del cosiddetto *ensemble circolare*.<sup>3</sup> L'ensemble di Ginibre, ad esempio, è un particolare ensemble circolare.

### 2.1.3 Legge dell'ellisse

Generiamo una matrice  $X = [X_{i,j}] \in M_n(\mathbb{R})$  di grandi dimensioni, diciamo  $n = 1000$ , in cui le coppie  $(X_{i,j}, X_{j,i})$  con  $i \neq j$  sono prese in modo identico e indipendente da una distribuzione, ad esempio, normale bivariata (ma il lettore avrà già intuito che il risultato non dipenderà dal tipo particolare di distribuzione scelto) con correlazione  $\tau = \mathbb{E}[X_{i,j}X_{j,i}]$ ,  $-1 \leq \tau \leq 1$ . Poniamo inizialmente  $\tau = 0$  e rappresentiamo nel piano complesso lo spettro di  $\frac{1}{\sqrt{n}}X$  calcolato numericamente. Quello che vedremo, naturalmente, sarà il cerchio unitario occupato uniformemente dagli autovalori, dato che ci siamo ridotti al caso della legge del cerchio (Teorema 2.1.2). Ora ripetiamo il procedimento aumentando gradualmente  $\tau$ : osserveremo così il cerchio che si “schiaccia” sempre più sull'asse reale, formando un'ellisse con semiasse reale sempre più grande e semiasse immaginario sempre più piccolo, fino ad arrivare, per  $\tau = 1$ , a sistemarsi completamente sull'asse reale occupando l'intervallo  $[-2, 2]$ . In questo caso limite, infatti, la matrice è simmetrica e vale la legge del semicerchio (Teorema 2.1.1). Andando a diminuire  $\tau$  da 0 fino a  $-1$ , invece, osserveremo lo stesso fenomeno ma con lo spettro che si schiaccia sull'asse immaginario, fino al caso antisimmetrico  $\tau = -1$  in cui tutti gli autovalori sono immaginari puri e si sistemano secondo una legge del semicerchio ruotata sull'asse immaginario. Una rappresentazione di questo esempio si trova in Figura 2.7.

Fu Girko che negli anni Ottanta, contemporaneamente ai suoi sforzi sulla legge del cerchio, iniziò a preoccuparsi del problema mostrato nell'esempio numerico fatto sopra, pubblicando, nell'arco di vent'anni, numerosi lavori sull'argomento, da [34] a [35]. Il modello, che interpola tra modelli simmetrici, asimmetrici e antisimmetrici, è costituito da matrici  $X_n \in M_n(\mathbb{R})$  a elementi aleatori i.i.d. con un certa correlazione  $\tau \in (-1, 1)$  tra gli elementi  $X_{1,2}$  e  $X_{2,1}$ ,  $\tau = \mathbb{E}[X_{1,2}X_{2,1}]$ . Gli autovalori convergono alla distribuzione uniforme

<sup>3</sup>Questo termine potrebbe generare delle ambiguità: nella terminologia introdotta da Dyson nell'ambito della *threefold way* studiando le misure di Haar del gruppo unitario, per ensemble circolari si intendono gli ensemble di matrici unitarie, i cui più celebri esempi sono l'*ensemble circolare ortogonale* (COE), costituito da matrici simmetriche unitarie, l'*ensemble circolare unitario* (CUE), costituito da matrici unitarie e l'*ensemble circolare simplettico* (CSE), costituito da matrici unitarie auto-duali quaternioniche. Questo nome deriva dal fatto che gli autovalori delle matrici unitarie si sistemano *sul* cerchio unitario, e non *all'interno* di esso, nel disco unitario, come le matrici che seguono la legge del cerchio. Nel presente contesto, invece, usiamo “circolare” in relazione alla legge del cerchio (che forse potrebbe essere più efficacemente denominata legge del disco), estendendo la terminologia “ensemble ellittico” che viene effettivamente usata in letteratura per designare matrici che seguono la legge dell'ellisse.

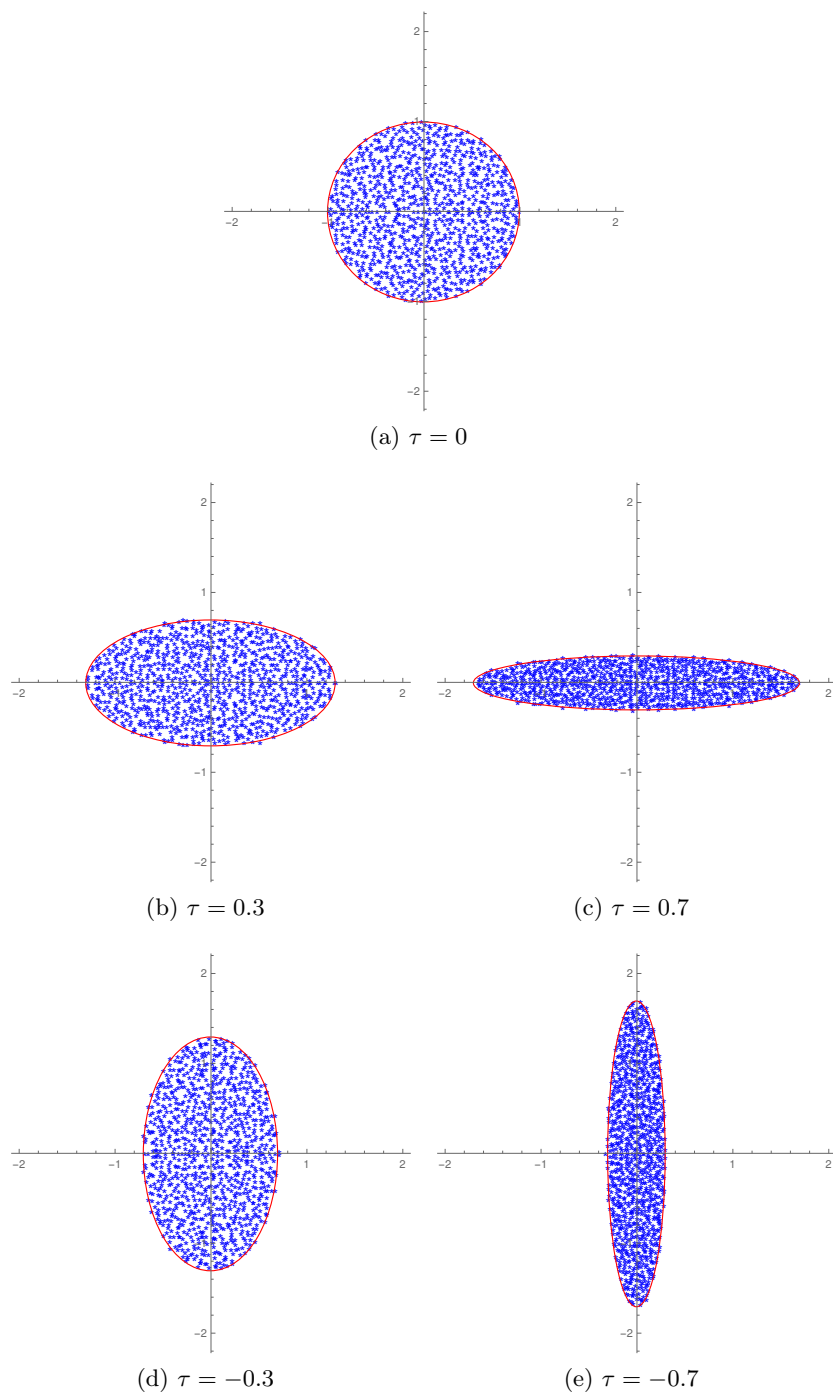


Figura 2.7: Implementazione dell'esempio introduttivo alla legge ellittica. In rosso le ellissi con semiassi  $1 + \tau$  e  $1 - \tau$  (2.1.7).



nell'ellisse con semiassi dati  $1 + \tau$  e  $1 - \tau$ : è quella che viene chiamata *legge dell'ellisse di Girko*, o, più brevemente, *legge dell'ellisse*.

Anche in questo caso, come in quello circolare, l'evidenza numerica è schiacciante, ma una dimostrazione nel caso più generale è arrivata solo dopo trent'anni dal primo articolo di Girko.

Una derivazione della legge ellittica nel caso gaussiano viene da Sommers, Crisanti, Sompolinsky e Stein in [36] e verrà esposta più avanti. Alcuni recenti lavori hanno generalizzato i precedenti risultati: in [37], Naumov dimostra la legge ellittica sotto assunzione di finitezza del momento quarto per matrici reali, mentre in [38] Nguyen e O'Rourke la dimostrano nella sua generalità, cioè assumendo solo i primi due momenti.

**Definizione 2.1.2** (Condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{R}}$ ). Diciamo che una matrice  $X_n = [X_{i,j}] \in M_n(\mathbb{R})$  soddisfa le condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{R}}$  se:

- a) le coppie  $(X_{i,j}, X_{j,i})$ ,  $i \neq j$  sono vettori aleatori di  $\mathbb{R}^2$  i.i.d.;
- b)  $X_{1,2}$  e  $X_{2,1}$  hanno media zero e varianza uno;
- c)  $\mathbb{E}[X_{1,2}X_{2,1}] = \tau$  con  $|\tau| < 1$ ;
- d) gli elementi diagonali  $X_{i,i}$  sono variabili aleatorie, indipendenti dagli elementi non diagonali, con media zero e varianza uno.

Le matrici che soddisfano le condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{R}}$  formano l'*ensemble ellittico reale* (con parametro  $\tau$ ).

**Teorema 2.1.3** (Legge dell'ellisse per matrici reali). *Sia  $X_n$  una matrice che soddisfa le condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{R}}$ . Allora, la DSE di  $\frac{1}{\sqrt{n}}X_n$  converge quasi certamente alla legge dell'ellisse  $\mu_e$ , dove  $\mu_e$  ha densità*

$$\rho(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-\tau^2)}, & \omega \in \mathcal{E}_\tau, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2.1.6)$$

con

$$\mathcal{E}_\tau := \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{x^2}{(1+\tau)^2} + \frac{y^2}{(1-\tau)^2} \leq 1 \right\}. \quad (2.1.7)$$

Osservando la proiezione di  $\rho$  sull'asse reale si può generalizzare la legge del semicerchio e la proiezione circolare (2.1.5):

$$\rho_x(x) = \int dy \rho(\omega) = \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a = 1 + \tau.$$

Questa legge del semicerchio generalizzata si riduce alla legge del semicerchio (2.1.2) nel limite  $\tau \rightarrow 1$ , ovvero per matrici simmetriche ( $\rho(\omega) = \delta(y)\rho_x(x) = \delta(y)\rho_{sc}(x)$ ) e si riduce a (2.1.5) per  $\tau = 0$  (matrici reali completamente asimmetriche).

L'osservazione fatta nella sezione precedente riguardo alle distribuzioni con varianza finita vale anche per la legge ellittica se si sostituisce la varianza  $\sigma^2$  nel punto b) delle condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{R}}$ ; in quel caso, esattamente come in precedenza, cambia solo la normalizzazione della DSE, da  $\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}X_n}$  a  $\mu_{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}X_n}$ .

Per la versione complessa bisogna generalizzare le condizioni che la matrice deve soddisfare:

**Definizione 2.1.3** (Condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{C}}$ ). Dati i parametri reali  $0 \leq \nu \leq 1$  e  $-1 < \tau < 1$ , diciamo che la matrice  $X_n = [X_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  soddisfa le condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{C}}$  se:

- a) le coppie  $(X_{i,j}, X_{j,i})$ ,  $i \neq j$  sono vettori aleatori di  $\mathbb{C}^2$  i.i.d.;
- b)
  - $X_{1,2}$  e  $X_{2,1}$  hanno media zero e varianza uno,
  - $\mathbb{E}[(\operatorname{Re} X_{1,2})^2] = \mathbb{E}[(\operatorname{Re} X_{2,1})^2] = \nu$ ,
  - $\mathbb{E}[(\operatorname{Im} X_{1,2})^2] = \mathbb{E}[(\operatorname{Im} X_{2,1})^2] = 1 - \nu$ ,
- c)
  - $\mathbb{E}[\operatorname{Re}(X_{1,2}) \operatorname{Re}(X_{2,1})] = \nu\tau$ ,
  - $\mathbb{E}[\operatorname{Im}(X_{1,2}) \operatorname{Im}(X_{2,1})] = -(1 - \nu)\tau$ ,
  - $\mathbb{E}[\operatorname{Re}(\xi_i) \operatorname{Im}(\xi_j)] = 0$  per ogni  $i, j \in \{1, 2\}$ ;
- d) gli elementi diagonali  $X_{i,i}$  sono variabili aleatorie, indipendenti dagli elementi non diagonali, con media zero e varianza uno.

Notiamo che se  $X_n$  soddisfa le condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{C}}$ , allora  $\mathbb{E}[X_{1,2}X_{2,1}] = \tau$ . Le matrici che soddisfano le condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{C}}$  formano l'*ensemble ellittico complesso* (con parametro  $\tau$ ).

**Teorema 2.1.4** (Legge dell'ellisse per matrici complesse [38]). *Sia  $X_n$  una matrice che soddisfa le condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{C}}$ . Allora, la DSE di  $\frac{1}{\sqrt{n}}X_n$  converge quasi certamente alla legge dell'ellisse  $\mu_e$  con densità (2.1.6), con ellisse  $\mathcal{E}_{\tau}$  dato da (2.1.7).*

La congettura che viene fatta in [38] è che il Teorema 2.1.4 valga con le sole ipotesi di media zero,  $\mathbb{E}[|X_{1,2}|^2] = \mathbb{E}[|X_{2,1}|^2] = 1$  e  $\mathbb{E}[X_{1,2}X_{2,1}] = \tau$ , con  $\tau \in \mathbb{C}$  tale che  $|\tau| < 1$ , con ellisse ruotato  $\tilde{\mathcal{E}}_{\tau}$  dato da

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\tau} := \left\{ x, y \in \mathbb{R} : \frac{(x \cos \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2})^2}{(1 + |\tau|^2)} + \frac{(x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2})^2}{(1 - |\tau|^2)} \leq 1 \right\},$$

dove  $\theta = \arg(\tau)$ : infatti, moltiplicando la matrice per  $e^{-i\theta/2}$ ,  $X_{1,2}$  e  $X_{2,1}$  risultano avere correlazione reale.

**Ensemble gaussiani e analogia con l'elettrostatica piana**

Seguendo [36], studiamo un ensemble di matrici  $n \times n$  reali asimmetriche  $J = [J_{i,j}]$  definite da probabilità gaussiane

$$P(J) \propto \exp \left[ -\frac{n}{2(1-\tau^2)} \text{Tr}(JJ^T - \tau JJ) \right], \quad (2.1.8)$$

si può verificare [39] che questa distribuzione ha momenti

$$\mathbb{E}[J_{i,j}] = 0, \quad \mathbb{E}[J_{i,j}^2] = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{E}[J_{i,j}J_{j,i}] = \frac{\tau}{n}, \quad (2.1.9)$$

con  $i \neq j$  e  $-1 \leq \tau \leq 1$ . Tre casi particolari degni di nota si hanno per  $\tau = -1$ ,  $\tau = 0$  o  $\tau = 1$ , che corrispondono a matrici antisimmetriche (completamente anticorrelate), matrici completamente asimmetriche (completamente scorrelate) e matrici simmetriche (completamente correlate).

Quello che ci interessa è studiare la densità media di autovalori in ogni punto  $\omega = x + iy$ ,  $\rho(\omega)$ , nel limite  $n \rightarrow \infty$ .

Definiamo la funzione di Green

$$G(\omega) = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[ \text{Tr} \left( \frac{1}{\mathbb{I}_n \omega - J} \right) \right], \quad (2.1.10)$$

che è definita per tutti i valori di  $\omega$ , tranne che per gli autovalori di  $J$ . Espandendo  $J$  tramite un set di autovettori, si ottiene

$$G(\omega) = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[ \sum_{\lambda} \frac{1}{\omega - \lambda} \right] = \int d^2\lambda \frac{\rho(\lambda)}{\omega - \lambda}. \quad (2.1.11)$$

Questa equazione suggerisce un'analogia con l'elettrostatica bidimensionale. Per mostrarlo, integriamo  $G(\omega)$  intorno a una regione  $R$ , assumendo che nessun autovalore si trovi sul bordo  $\partial R$ :

$$\int_{\partial R} \frac{d\omega}{2\pi i} G(\omega) = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \sum_{\lambda} \int_{\partial R} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - \lambda} \right] = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[ \sum_{\lambda \in R} 1 \right] = \int_R d^2\lambda \rho(\lambda).$$

Notando che  $d\omega/i = dy - idx$  è il vettore normale a  $\partial R$  e applicando la legge di Gauss, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_R d^2\omega \left( \frac{\partial}{\partial x} G(\omega) + i \frac{\partial}{\partial y} G(\omega) \right) = \int_R d^2\omega \rho(\omega).$$

Dato che la regione  $R$  è arbitraria, il vettore  $\mathbf{E}$ ,

$$E_x := 2 \text{Re } G, \quad E_y := -2 \text{Im } G, \quad (2.1.12)$$

obbedisce alle equazioni dell'elettrostatica classica, cioè esiste un potenziale  $\Phi$  per cui vale

$$2 \operatorname{Re} G = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad -2 \operatorname{Im} G = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.1.13)$$

e che obbedisce all'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = -\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi\rho. \quad (2.1.14)$$

Per valutare  $\rho(\omega)$  bisogna conoscere  $G(\omega)$  nella regione dove  $\rho$  non è zero. In generale non è possibile valutare  $G(\omega)$  per continuazione analitica fuori da questa regione perché, nel linguaggio dell'elettrostatica, la distribuzione di carica non è completamente determinata dal valore del campo elettrico all'esterno della regione dove è presente la carica. Ciò implica che  $G(\omega)$  non può essere calcolata con metodi perturbativi. Per determinare lo spettro delle matrici asimmetriche, il punto di partenza è il calcolo del potenziale elettrostatico  $\Phi$  definito come

$$\Phi(\omega) = -\frac{1}{n} \mathbb{E} \left[ \ln \det((\mathbb{I}_n \omega^* - J^T)(\mathbb{I}_n \omega - J)) \right]. \quad (2.1.15)$$

Con l'uso delle proprietà  $\det(AB) = \det A \det B$  e  $\det A^T = \det A$ , è facile rendersi conto che  $\Phi$  dato da (2.1.15) soddisfa (2.1.10) e (2.1.13). Dato che  $J$  è reale, la matrice nel determinante in (2.1.15) è semidefinita positiva. Perciò, per evitare gli autovalori nulli, che semplicemente corrispondono al caso in cui  $\omega$  sia un autovalore di  $J$ , aggiungiamo una matrice diagonale  $\varepsilon[\delta_{i,j}]$ , dove  $\varepsilon$  è positivo e infinitesimo. Possiamo, perciò, rappresentare il determinante con un integrale gaussiano [40, pp. 78-82]:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{n} \ln \mathbb{E} \left[ \int \left( \prod_i \frac{d^2 z_i}{\pi} \right) \exp \left\{ -\varepsilon \sum_i |z_i|^2 - \sum_{i,j,k} z_i^* (\omega^* \delta_{i,k} - J_{i,k}) (\omega \delta_{k,j} - J_{k,j}) z_j \right\} \right],$$

dove si è dato per assunto che la media e l'operazione  $\ln$  commutino nel limite  $n \rightarrow \infty$ . Calcoliamo la media nella distribuzione (2.1.8):

$$\exp(n\Phi) = \int \left( \prod_i \frac{d^2 z_i}{\pi} \right) \exp \left\{ -n \left( \varepsilon r + \ln(1+r) + \frac{rx^2}{1+r(1+\tau)} + \frac{ry^2}{1+r(1-\tau)} \right) \right\},$$

dove  $r := \frac{1}{n} \sum_i z_i z_i^*$  e  $\omega = x + iy$ .

Ora, essendo l'integranda puramente radiale, possiamo sostituire l'integrale

sulle  $2n$  variabili  $d^2 z_i = dx_i dy_i$  con un integrale radiale su  $R^2 := \sum_i z_i z_i^* = x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2$  e poi su  $r = R^2/n$ :

$$\int \left( \prod_i \frac{d^2 z_i}{\pi} \right) \rightarrow \frac{1}{\pi^n} S_{2n-1} \int_0^\infty dR R^{2n-1} \rightarrow \frac{n^n}{2\pi^n} S_{2n-1} \int_0^\infty dr r^{n-1}$$

dove  $S_{2n-1}$  è la superficie della  $(2n-1)$ -sfera,  $S_{2n-1} = \frac{2\pi^n}{\Gamma(n)}$ . Otteniamo così, con  $\sigma := 1/r$ :

$$\begin{aligned} \exp(n\Phi) &= \frac{n^n}{\Gamma(n)} \int \frac{d\sigma}{\sigma^2} \frac{1}{\sigma^{n-1}} \\ &\quad \exp \left\{ -n \left( \frac{\varepsilon}{\sigma} + \ln \left( 1 + \frac{1}{\sigma} \right) + \frac{x^2}{\sigma+1+\tau} + \frac{y^2}{\sigma+1-\tau} \right) \right\} \end{aligned}$$

poi, dato che  $\exp(-n \ln(1+1/\sigma)) = \sigma^n \exp(-n \ln(\sigma+1))$ ,

$$\begin{aligned} \exp(n\Phi) &= \frac{n^n}{\Gamma(n)} \int \frac{d\sigma}{\sigma} \\ &\quad \exp \left\{ -n \left( \frac{\varepsilon}{\sigma} + \ln(\sigma+1) + \frac{x^2}{\sigma+1+\tau} + \frac{y^2}{\sigma+1-\tau} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Si può osservare che per la convergenza dell'integrale è necessario che  $\varepsilon > 0$ .

L'integrale (2.1.16) può essere valutato nel limite  $n \rightarrow \infty$  grazie al metodo dei punti di sella. L'equazione dei punti di sella per  $\sigma$  è

$$\frac{\varepsilon}{\sigma^2} = \frac{1}{1+\sigma} - \frac{x^2}{(\sigma+1+\tau)^2} - \frac{y^2}{(\sigma+1-\tau)^2}. \quad (2.1.17)$$

Da (2.1.13), la funzione di Green è data da

$$G(\omega) = \frac{x}{\sigma+1+\tau} - \frac{iy}{\sigma+1-\tau} \quad (2.1.18)$$

nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Si può notare da (2.1.17) che esiste un unico punto di sella tra i due limiti  $\sigma = 0$  e  $\sigma = \infty$ . Siamo interessati solo al valore di questo punto di sella per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Il comportamento in questo limite dipende dal valore di  $x$  e di  $y$ .

L'espansione in serie di potenze di  $\sigma$  porta a

$$\varepsilon = \sigma^2 \left( 1 - \frac{x^2}{(1+\tau)^2} - \frac{y^2}{(1-\tau)^2} \right) + O(\sigma^3).$$

Per cui, all'interno dell'ellisse i cui semiassi sono  $1+\tau$  e  $1-\tau$ , il punto di sella è in  $\sigma \sim \sqrt{\varepsilon}$  e  $G$  è dato da (2.1.18) con  $\sigma = 0$ :

$$G^{in}(\omega) = \frac{x}{1+\tau} - \frac{iy}{1-\tau}.$$

D'altra parte, per  $(x, y)$  fuori dall'ellisse,  $\sigma$  rimane finito per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , ed è dato dalla soluzione di (2.1.17) con  $\varepsilon = 0$ . Si può verificare da (2.1.17) e (2.1.18) che le derivate parziali di  $G$  soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann: per cui, per valutare  $\sigma$  e  $G$  fuori dall'ellisse, si risolvono (2.1.17) e (2.1.18) con  $\varepsilon = 0$  nel caso particolare in cui  $y = 0$ , e poi si usa l'analiticità di  $G$  in quel regime per sostituire  $\omega$  a  $x$ : (2.1.17) diventa

$$\frac{1}{1 + \sigma} - \frac{x^2}{(\sigma + 1 + \tau)^2} = 0,$$

ovvero

$$\sigma = \frac{x^2}{2} - (1 + \tau) + \frac{1}{2}\sqrt{x^4 - 4\tau x^2} = \frac{x^2}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4\tau}{x^2}} \right) - (1 + \tau),$$

che sostituita in (2.1.18) con  $\varepsilon = 0$  e  $y = 0$  porta a

$$G^{out}(x) = \frac{2/x}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\tau}{x^2}}} = \frac{x}{2\tau} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\tau}{x^2}} \right).$$

Quindi:

$$G(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{2\tau} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\tau}{\omega^2}} \right), & \text{fuori,} \\ \frac{x}{1 + \tau} - \frac{iy}{1 - \tau}, & \text{dentro.} \end{cases}$$

Inseriamo questo risultato in (2.1.12) e (2.1.14),

$$4\pi\rho = 2\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} G(\omega) - 2\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} G(\omega).$$

all'interno dell'ellisse, si ottiene

$$2\pi\rho^{in}(\omega) = \frac{1}{1 + \tau} + \frac{1}{1 - \tau} = \frac{2}{1 - \tau^2},$$

mentre all'esterno il fatto che  $G(\omega)$  soddisfi le condizioni di Cauchy-Riemann garantisce che  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Per cui, vale (2.1.6):

$$\rho(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1 - \tau^2)}, & \text{se } \omega \in \mathcal{E}_\tau, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

## 2.2 Universalità delle DSE

Nella precedente sezione abbiamo esposto le più note leggi di convergenza delle DSE, e abbiamo messo in luce il fatto che la DSE limite dipenda solo dalle proprietà di simmetria della matrice, ovvero dalla correlazione  $\tau$  (definita nell'ambito della legge ellittica) tra elementi sopra e sotto la diagonale, e le uniche assunzioni necessarie sulla distribuzione con cui vengono generati gli elementi della matrice sono media zero e varianza finita. Il fatto che la DSE non dipenda dalla particolare distribuzione degli elementi della matrice va sotto il nome di *universalità*, e viene formalizzato nel modo seguente [33]:

**Teorema 2.2.1** (Principio di universalità). *Siano  $x$  e  $y$  variabili aleatorie complesse con media zero e varianza uno. Siano  $X_n, Y_n \in M_n(\mathbb{C})$  matrici random i cui elementi  $X_{i,j}$  e  $Y_{i,j}$  sono copie i.i.d. rispettivamente di  $x$  e  $y$ . Per ogni  $n$ , sia  $K_n \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice deterministica tale che*

$$\sup_n \frac{1}{n^2} \|K_n\|_F^2 < \infty, \quad (2.2.1)$$

dove  $\|\cdot\|_F$  è la norma di Frobenius definita in (1.0.4). Siano  $A_n := K_n + X_n$  e  $B_n := K_n + Y_n$ . Allora,

$$\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}A_n} - \mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}B_n} \xrightarrow{p} 0.$$

Sotto l'ipotesi aggiuntiva che

$$\mu_{(\frac{1}{\sqrt{n}}K_n - z\mathbb{I}_n)(\frac{1}{\sqrt{n}}K_n - z\mathbb{I}_n)^*} \quad (2.2.2)$$

converga a un limite per quasi ogni<sup>4</sup>  $z \in \mathbb{C}$ , allora

$$\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}A_n} - \mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}B_n} \xrightarrow{q.c.} 0.$$

In realtà, è stata proprio la dimostrazione di questo teorema a permettere la dimostrazione del Teorema 2.1.2! Infatti, basta scegliere come  $K_n$  la matrice nulla, per la quale l'ipotesi (2.2.1) e l'ipotesi aggiuntiva per garantire la convergenza q.c. sono banalmente soddisfatte, dopodiché si prende come  $X_n$  una matrice per cui sia provata la legge del cerchio, ad esempio l'ensemble di Ginibre (matrici ad elementi gaussiani i.i.d.), e il principio di universalità assicura che qualsiasi  $Y_n$  nel Teorema 2.2.1 avrà la stessa DSE limite di quella di  $X_n$ ; la legge del cerchio è quindi dimostrata in tutta la sua generalità.

### 2.2.1 Matrici sparse

Il principio di universalità trova applicazioni anche oltre l'ensemble circolare. Uno dei casi notevoli è quello delle matrici sparse, di cui diamo ora una definizione rigorosa:

<sup>4</sup>Nel senso della misura di Lebesgue.

**Definizione 2.2.1** (Ensemble delle matrici sparse). Sia  $0 < \alpha \leq 1$  una costante, e sia  $\mathbf{1}_\eta$  la variabile aleatoria booleana che assume il valore 1 con probabilità  $\eta$  e il valore 0 con probabilità  $1 - \eta$ . Sia  $q = n^{-1+\alpha}$ , e  $\xi$  una variabile aleatoria complessa indipendente da  $\mathbf{1}_q$ . L'ensemble delle matrici sparse  $n \times n$  per  $\xi$  con parametro  $\alpha$  è definito dalle matrici  $X_n \in M_n(\mathbb{C})$  che hanno per elementi copie i.i.d. di  $\mathbf{1}_q \xi$ .

Alcuni dei lavori visti in precedenza riguardo alla legge del cerchio [29, 30, 32] si sono soffermati a dimostrare, nei rispettivi casi particolari, una versione “sparsa” di tale legge. Il risultato a oggi migliore riguardo alle matrici sparse è dovuto a Matchett Wood, che in [41] segue i metodi di [33] per dimostrare il principio di universalità debole (ovvero con convergenza in probabilità e non q.c.) e la conseguente legge del cerchio debole per matrici sparse.

**Teorema 2.2.2** (Principio di universalità debole per matrici sparse). Siano  $0 < \alpha \leq 1$  una costante e  $x$  una variabile aleatoria complessa con media zero e varianza uno. Siano  $X_n \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice sparsa per  $x$  con parametro  $\alpha$ , e  $Y_n = [Y_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice i cui elementi  $Y_{i,j}$  sono copie di  $x$  (si noti che  $Y_n$  non è sparsa). Per ogni  $n$ , sia  $K_n \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice deterministica tale che

$$\sup_n \frac{1}{n^2} \|K_n\|_F^2 < \infty.$$

Siano  $A_n := K_n + \frac{1}{\sqrt{q}} X_n$  e  $B_n := K_n + Y_n$ . Allora,

$$\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}} A_n} - \mu_{\frac{1}{\sqrt{n}} B_n} \xrightarrow{p} 0.$$

**Teorema 2.2.3** (Legge del cerchio debole per matrici sparse). Siano  $0 < \alpha \leq 1$  una costante e  $x$  una variabile aleatoria complessa con media zero e varianza uno. Sia  $X_n \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice sparsa per  $x$  con parametro  $\alpha$ . Allora, la DSE di  $\frac{1}{\sqrt{qn}} X_n$  converge in probabilità alla distribuzione uniforme nel disco unitario.

Alcune interessanti osservazioni sulle matrici sparse si possono fare guardando il grafo associato alla matrice: dato il gran numero di zeri, il grafo potrebbe mostrare una scarsa connettività e tendere a decomporsi in un gran numero di cluster, cioè di insiemi di nodi connessi tra di loro e disconnessi da tutti gli altri nodi del grafo.

Dimentichiamoci per un momento della legge del cerchio e della condizione  $q = n^{-1+\alpha}$ . Consideriamo una matrice sparsa con  $q = p/n$ , con  $p > 0$ . Se  $p < 1$  la matrice è talmente sparsa che tutti i nodi appartengono a piccoli cluster. A  $p = 1$  avviene una transizione di percolazione [42]: si osserva che il grafo della matrice si decompone in un enorme cluster che contiene un numero finito di nodi, mentre tutti gli altri nodi appartengono a piccoli cluster, soprattutto alberi (Figura 2.8); la densità spettrale mostra picchi corrispondenti agli autovalori degli alberi [39]. Naturalmente, teoria dei



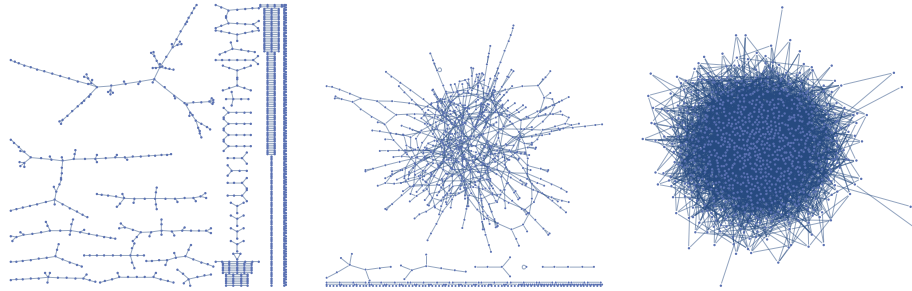


Figura 2.8: Grafi di matrici sparse simmetriche di dimensione  $n = 1000$  con  $q = p/n$  per crescenti valori di  $p$ :  $p = 0.5$  (a sinistra) mostra una scarsa connettività con un gran numero di piccoli cluster; a  $p = 1$  (al centro) avviene la transizione di percolazione con un enorme cluster più altri piccoli cluster; a  $p = 4$  (a destra) la connettività è completa e tutti i nodi sono collegati (per cui la matrice è irriducibile).

grafi e teoria spettrale delle matrici sono legate a filo doppio, e non è un caso che la Definizione 2.2.1 prenda in esame solo il caso  $q = n^{-1+\alpha}$  con  $0 < \alpha \leq 1$ , ovvero  $q > 1/n$ : quello che si richiede, cioè, è di avere *superato* (in un ottica di aumento di  $q$  da 0 a 1) la transizione di percolazione e avere perciò una connettività a lungo raggio, anche se non completa. In caso contrario, la maggior parte degli autovalori saranno nulli e la legge del cerchio non potrebbe valere. Ma anche nell’ambito della Definizione 2.2.1, quello sparso è uno spettro particolarmente instabile, e i valori di  $\alpha$  vicini a zero, in cui siamo prossimi a tornare nel regime di connettività troppo scarsa, sono molto “pericolosi” e possono mostrare comportamenti spettrali fortemente dipendenti dalla distribuzione (Figure 2.9 e 2.10).

## 2.2.2 Matrici random deformate e non centrali

Il Teorema 2.2.1 fa uso di matrici random “traslate” da matrici deterministiche; in letteratura si usa spesso il termine “deformazione” in luogo di “traslazione” o “perturbazione” riguardo agli ensemble statistici. Ci si potrebbe chiedere se matrici di questo tipo, prese singolarmente, seguano la legge del cerchio, e, in caso affermativo, fino a che punto possa essere forte la deformazione perché la legge del cerchio continui a valere.

Parleremo di *matrici random deformate* per riferirci a matrici del tipo  $K_n + X_n$ , dove  $K_n \in M_n(\mathbb{C})$  è una matrice deterministica che soddisfa (2.2.1) e  $X_n$  è una matrice random a elementi distribuiti con media zero e varianza finita. Nel caso in cui  $X_n$  sia una matrice dell’ensemble circolare si ha l’*ensemble circolare deformato*, che riproduce il set del Teorema 2.2.1.

Per *matrici random non centrali* intenderemo invece matrici a elementi distribuiti con media finita  $\theta$  (uguale per tutti gli elementi) e varianza finita. Una matrice di questo tipo si può ottenere deformando una matrice random a elementi con media zero con una matrice deterministica  $K_n$  a elementi

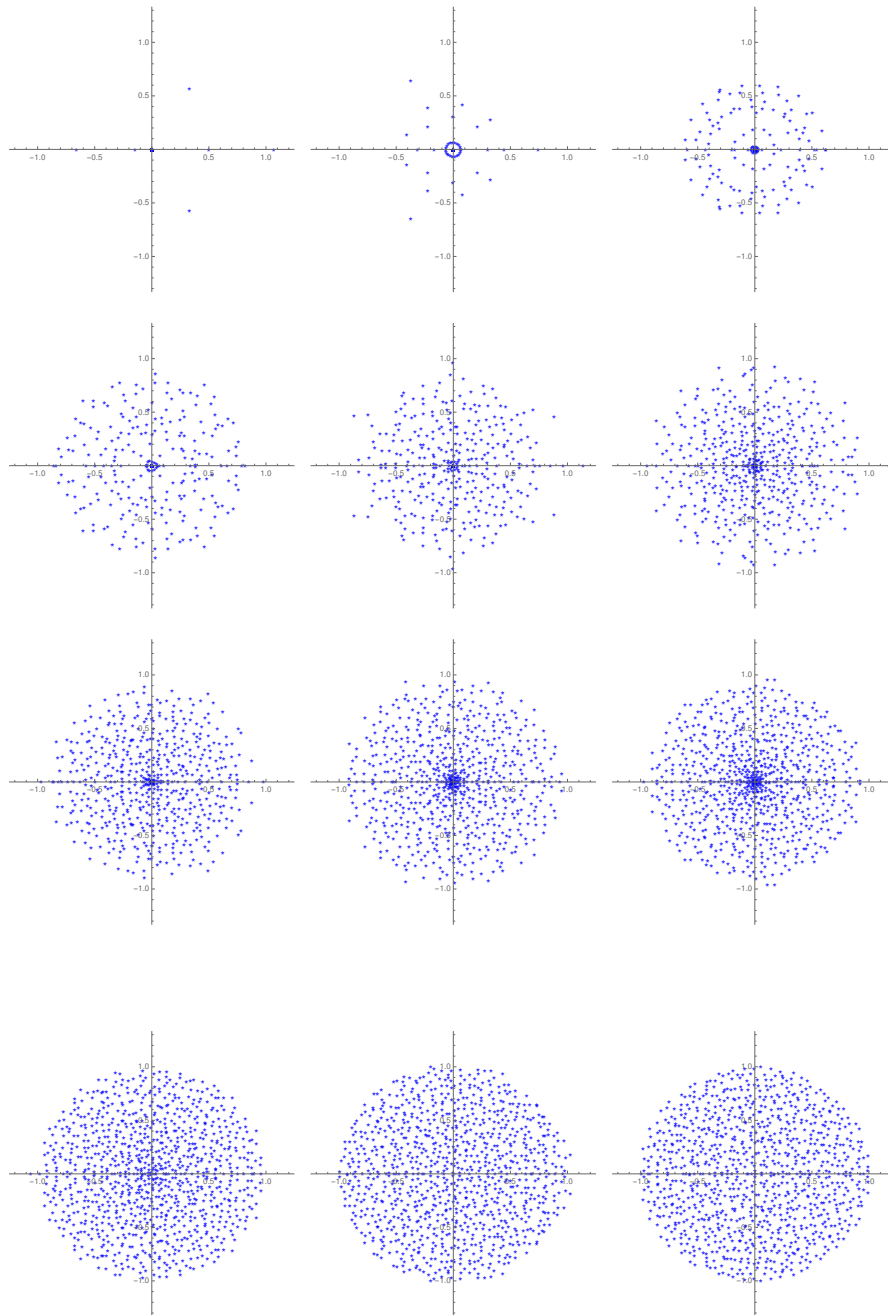


Figura 2.9: Spettro di matrici sparse  $\frac{1}{\sqrt{qn}} X_n$  con parametro  $\alpha$  crescente. Gli elementi non nulli di  $X_n$  sono presi dalla distribuzione normale standard. Gli spettri delle prime tre righe hanno valori di  $\alpha$  da  $\sim 0$  a 0.2, quelli dell'ultima riga sono per  $\alpha = 0.3, 0.4$  e 0.5.

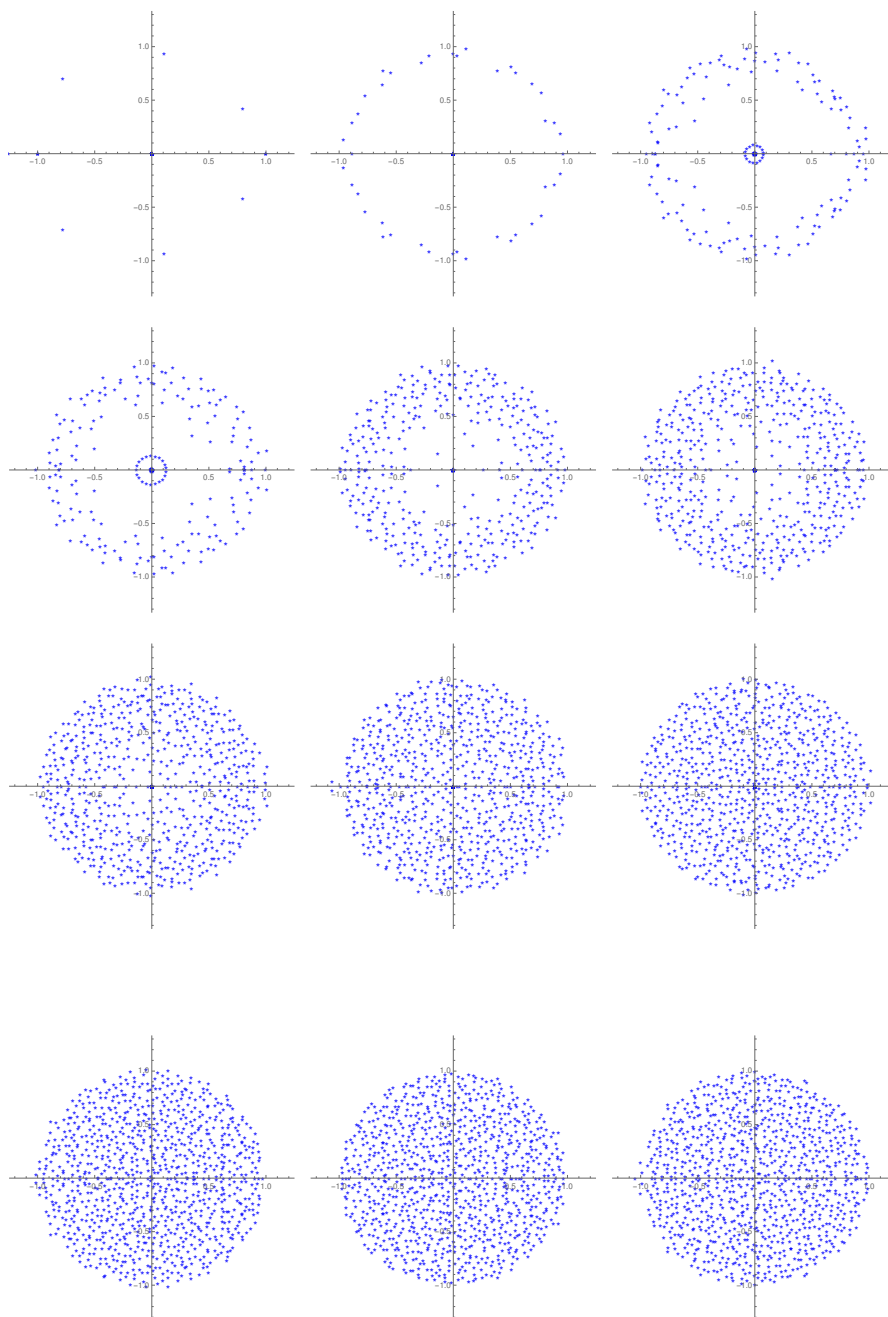


Figura 2.10: Analogo della Figura 2.9, ma con  $X_n$  i cui elementi non nulli sono presi dalla distribuzione di Bernoulli su  $\{-1, 1\}$ . Si può notare il comportamento completamente differente dall'analogo gaussiano, come il fatto che una legge del cerchio stabile si può considerare raggiunta già per  $\alpha \sim 0.2$ , che in 2.9 mostra invece una non trascurabile non uniformità.

costanti tutti pari a  $\theta$ , per cui rappresenta un caso particolare di matrice random deformata. Si può verificare che  $K_n$  soddisfa (2.2.1), ricordando che è una matrice simmetrica di rango uno che ha autovalori  $n\theta$  con molteplicità 1 e 0 con molteplicità  $n - 1$ , per cui si può scrivere  $K_n = UD_nU^{-1}$  con  $U$  unitaria e  $D_n = \text{diag}(n\theta, 0, \dots, 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \|K_n\|_F^2 &= \frac{1}{n^2} \text{Tr}(K_n^2) = \frac{1}{n^2} \text{Tr}(UD_nU^{-1}UD_nU^{-1}) = \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Tr}(D_n^2) = \theta^2 < \infty. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Quindi, le matrici random non centrali sono un caso particolare di matrici random deformate, con matrice di deformazione di rango uno.

La dimostrazione della legge del cerchio per matrici circolari deformate discende naturalmente, per come è stato posto il problema, da alcune osservazioni sul principio di universalità. Prima di tutto, in [33] viene dimostrato che se le matrici deterministiche  $K_n$  e  $K'_n$  obbediscono a (2.2.1) e hanno la proprietà delle DSE (2.2.2) che

$$\mu_{(\frac{1}{\sqrt{n}}K_n - z\mathbb{I}_n)(\frac{1}{\sqrt{n}}K_n - z\mathbb{I}_n)^*} - \mu_{(\frac{1}{\sqrt{n}}K'_n - z\mathbb{I}_n)(\frac{1}{\sqrt{n}}K'_n - z\mathbb{I}_n)^*}$$

converge a 0 per quasi ogni  $z$ , allora il Teorema 2.2.1 vale con  $A_n = K_n + X_n$  e  $B_n = K'_n + Y_n$ . Quindi, scegliamo come  $K_n$  una matrice di piccolo rango, diciamo  $o(n)$ . La DSE (2.2.2)

$$\mu_{(\frac{1}{\sqrt{n}}K_n - z\mathbb{I}_n)(\frac{1}{\sqrt{n}}K_n - z\mathbb{I}_n)^*}$$

si concentra in  $|z|^2$ , essendo la DSE di una perturbazione di piccolo rango della matrice  $|z|^2 \mathbb{I}_n$ . Ora prendiamo come  $K'_n$  la matrice nulla, la cui DSE (2.2.2) è anch'essa banalmente  $|z|^2$ . Abbiamo quindi [33, Corollario 1.12]:

**Corollario 2.2.1** (Legge del cerchio per matrici random deformate). *Sia  $X_n \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice dell'ensemble circolare (cioè i cui elementi sono variabili aleatorie i.i.d. con media zero e varianza uno) e sia  $K_n$  una matrice deterministica di rango  $o(n)$  che soddisfa (2.2.1). Sia  $A_n := K_n + X_n$ . Allora, la DSE di  $\frac{1}{\sqrt{n}}A_n$  converge q.c. alla distribuzione uniforme nel disco unitario.*

In [38], che segue da vicino i metodi di Tao e Vu riguardo all'universalità, viene esposto un analogo per ensemble ellittici:

**Corollario 2.2.2** (Legge dell'ellisse per matrici random deformate). *Sia  $X_n \in M_n(\mathbb{R})$  (o  $X_n \in M_n(\mathbb{C})$ ) una matrice dell'ensemble ellittico con parametro  $\tau$ , cioè che soddisfa le condizioni  $\mathbf{C0}_{\mathbb{R}}$  (o  $\mathbf{C0}_{\mathbb{C}}$ ), e sia  $K_n$  una matrice deterministica di rango  $o(n)$  che soddisfa (2.2.1). Sia  $A_n := K_n + X_n$ . Allora, la DSE di  $\frac{1}{\sqrt{n}}A_n$  converge q.c. alla distribuzione uniforme nell'ellisse  $\mathcal{E}_{\tau}$  (2.1.7).*

Naturalmente, essendo deformazioni di rango uno dell'ensemble circolare (o ellittico), le matrici circolari (o ellittiche) non centrali soddisfano le ipotesi del corollario e quindi seguono la legge del cerchio (o dell'ellisse).

Benché soggette al principio di universalità e alla propria legge di convergenza, le matrici circolari o ellittiche deformate hanno un comportamento spettrale peculiare e per certi versi sorprendente: si nota che uno o più autovalori si distaccano anche di molto dal supporto della legge di convergenza, come abbiamo già osservato in precedenza nelle Figure 1.16 e 2.3. Alcuni autovalori possono anche disporsi in modo da formare un'altra piccola "legge del cerchio" distaccata da quella del Corollario 2.2.1! Nel caso non centrale, invece, l'autovalore che si distacca è uno solo: come vedremo in seguito, è proprio il rango della deformazione a determinare il numero di autovalori che si distaccano. Questo argomento verrà trattato in dettaglio nella Sezione 3.1. In ogni caso, finché il rango della deformazione rimane  $o(n)$ , il contributo di questi autovalori "esterni" deve rimanere trascurabile nella DSE limite.

## 2.3 Interludio: il paradosso di May nei sistemi ecologici

Vogliamo ora proporre a grandi linee una interessante applicazione della teoria delle matrici random a un problema dell'ecologia teorica, che affascina il mondo scientifico da più di quarant'anni: il cosiddetto dibattito stabilità-complessità, o paradosso di May.

Fino agli anni Settanta, era opinione comune nel mondo dell'ecologia che la complessità, o diversità, di un sistema ecologico, ovvero il numero di specie che esso comprende e che interagiscono tra di loro, favorisse la stabilità di un sistema. Le osservazioni e i ragionamenti che portano a questa conclusione sono molti e validi: le comunità piccole sarebbero più vulnerabili a oscillazioni delle popolazioni, invasioni e altri fenomeni distruttivi, che invece sarebbero più facilmente assorbiti in un sistema molto complesso [43]. Ad esempio, terre coltivate dove l'intervento umano ha prodotto delle comunità ecologiche estremamente semplificate sono spesso bersaglio di invasioni, e le foreste boreali sono più soggette a fenomeni distruttivi o a crescite di popolazione esplosive di insetti infestanti di quanto accada alle molto più ricche foreste tropicali.

Queste idee intuitive furono messe in crisi da May nel 1972 [3] con un semplice modello basato sulla dinamica linearizzata all'equilibrio e le matrici random.

Consideriamo un sistema composto da un gran numero di specie  $n$ , in cui  $n_i(t)$  rappresenta il numero di individui della specie  $i$  al tempo  $t$ . Il tasso di

crescita di una popolazione è descritto da

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = h_i(n_1(t), \dots, n_n(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

In un punto di equilibrio vale  $h_i(n_1^*, \dots, n_n^*) = 0$ ,  $n_i^* \geq 0$ . Chiamiamo  $x_i(t) = n_i(t) - n_i^*$  le deviazioni dal punto di equilibrio, e linearizziamo la dinamica intorno all'equilibrio:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \sim \sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j(t), \quad M_{i,j} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial n_j} \right|_{n_r = n_r^*}$$

La matrice  $M$  viene chiamata *matrice di comunità* e descrive le interazioni tra le popolazioni: l'elemento  $M_{i,j}$  misura l'“impatto” della popolazione  $j$  sulla popolazione  $i$ . Per la stabilità del sistema all'equilibrio, è necessario che tutti gli autovalori di  $M$  abbiano parte reale negativa [1].

L'innovativo approccio di May fu quello di considerare come matrice di comunità una matrice random. Perché la specie  $i$  sia auto-regolata, è necessario che  $M_{i,i}$  sia minore di zero; May scelse tutti gli elementi diagonali uguali,  $M_{i,i} = -\theta$ ,  $\theta > 0$ . Gli elementi fuori dalla diagonale possono essere scelti i.i.d. con media zero e varianza  $\sigma^2$ , ovvero un ensemble circolare deformato da un multiplo dell'identità. In questo caso, naturalmente, la DSE converge alla distribuzione uniforme nel disco di raggio  $\sigma\sqrt{n}$  centrato in  $-\theta$ , per cui, una volta posto  $-\theta + \sigma\sqrt{n} \leq 0$ , gli autovalori sono con grande probabilità nella metà sinistra del piano complesso. Ora, però, se per un valore fissato di  $\theta$  si aumenta la complessità del sistema, cioè  $n$ , inevitabilmente il supporto della legge del cerchio sforerà nella metà destra del piano, rendendo il sistema instabile.

Il paradosso è generato dal fatto che in realtà si tende tutt'oggi a considerare, tutto sommato, la complessità di un sistema come un fattore accrescitivo della sua stabilità.

Si potrebbe fare l'ipotesi molto sensata che non tutte le specie interagiscano con tutte le altre, e che la maggior parte degli elementi della matrice di comunità siano pertanto nulli. Abbiamo quindi una matrice sparsa: la stabilità del sistema è aumentata, dato che il raggio del disco di convergenza è ora minore, dato da  $\sigma\sqrt{qn}$ , con  $q = n^{-1+\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , ma anche in questo caso l'aumento di  $n$  provocherebbe l'instabilità del sistema.

Esistono molti altri metodi per aumentare la stabilità: ad esempio, Allesina e Tang scelsero matrici di comunità appartenenti a ensemble ellittici sparsi con parametro di correlazione negativo [44], cosa che, come abbiamo visto, causa una riduzione dell'intervallo reale occupato dallo spettro. L'anticorrelazione degli elementi opposti alla diagonale, nel modello ecologico, significa competizione tra le specie: a tal proposito, Cicuta e Molinari introdussero in [39] le matrici *antagoniste*, cioè matrici i cui elementi opposti alla diagonale hanno segno opposto. Questa generalizzazione dell'ensemble antisimmetrico

modellizza sistemi completamente competitivi (senza interazioni mutualistiche), e le sue proprietà spettrali controllate la rendono molto utile al fine di garantire la stabilità.

Una considerazione interessante viene da [2], dove ci si pone il problema che la condizione di elementi di matrice i.i.d. sia troppo stringente e non modellizzi nessun sistema reale. Gli autori cercano quindi di mostrare come sia necessario fare delle assunzioni supplementari sulle distribuzioni, e considerare ensemble di matrici molto specifici, “condizionali”, calati al sistema che si vuole studiare.

A oggi, il paradosso di May non ha una vera e propria soluzione, ma il solido corpus di studi che sono stati svolti nell’arco di più di quarant’anni permette oggi quantomeno delle spiegazioni:

- con opportuni metodi, è possibile, se non garantire, almeno migliorare la stabilità del sistema anche restando nel cammino tracciato da May (come in [44, 39]);
- secondo alcuni autori, l’approccio puramente i.i.d. è troppo poco specifico e non fornisce una buona modellizzazione del sistema [2];
- l’instabilità potrebbe non portare necessariamente a cambiamenti catastrofici: quando un punto di equilibrio diventa instabile, un sistema può rispondere in molti modi diversi. Potrebbe iniziare ad avere dei cicli, o a muoversi verso un altro attrattore, o perdere solo qualche specie, senza manifestare dei cambiamenti drastici. In quest’ottica, il paradosso perde un po’ delle sue motivazioni [43, 44].

A oggi, l’opinione comune è che la stabilità non dipenda in modo quantificabile dalla diversità, ma che ne sia comunque, in media, influenzata positivamente.

## Capitolo 3

# Autovalori estremi

Abbiamo già osservato incidentalmente, grazie a qualche esempio numerico prima e riguardo alla legge del cerchio deformata poi (Paragrafo 2.2.2), come le matrici non centrali mostrino un comportamento peculiare dell'autovalore maggiore in modulo, che si trova a distanze anche notevoli dal restante “bulk” di autovalori (che invece rimane concentrato nel cerchio unitario, dato che matrici di questo tipo seguono comunque la legge del cerchio Corollario 2.2.1). Cerchiamo ora di capire le ragioni di questo comportamento.

### 3.1 Ensemble circolari deformati

#### 3.1.1 Matrici non centrali: deformazioni di rango uno

Ci occuperemo per prima cosa di fornire una spiegazione di carattere generale sulle ragioni che portano al distacco di autovalori dal supporto delle leggi di convergenza. Il caso più semplice è quello delle matrici  $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{R})$  a elementi non negativi (ad esempio, distribuiti uniformemente in un intervallo positivo), dato che possiamo usare noti argomenti della teoria di Perron-Frobenius: il più grande (in modulo) autovalore di  $A$ ,  $\lambda_1$  (autovalore o radice di Perron), è reale, semplice e positivo (teorema di Perron-Frobenius), e vale (si veda ad esempio [45])

$$\min_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq \lambda_1 \leq \max_i \sum_{j=1}^n a_{i,j},$$

relazione dalla quale è evidente come, se gli elementi  $a_{i,j}$  sono i.i.d. con media  $\theta$ , l'autovalore di Perron sia confinato in una regione intorno a  $n\theta$ . Questa spiegazione non è certo sufficiente: non confina in modo efficace  $\lambda_1$ , non giustifica il fatto che sia esattamente uno l'autovalore a distaccarsi dal “bulk” e non spiega nemmeno il fatto che il comportamento del maggiore autovalore sia comune a tutte le matrici non centrali e non solo a quelle non negative. Benché quest'ultimo problema possa forse essere superato in qualche



caso particolare da alcune recenti estensioni della teoria di Perron-Frobenius a matrici complesse [46], a matrici con qualche elemento negativo [45] e altre ancora, la difficoltà di questo approccio e la permanenza degli altri problemi irrisolti spingono verso un diverso punto di vista, basato sulla teoria delle perturbazioni, esposto da Silverstein in [47].

Partiamo dal caso di matrici reali con media positiva che, come già detto, verranno ottenute tramite una deformazione di rango uno dell'ensemble circolare reale. Qui, assumeremo anche la finitezza del momento quarto, ipotesi che permetterà di avvalersi del seguente risultato [47, 48]:

**Lemma 3.1.1.** *Sia  $X_n = [X_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$ , i cui elementi  $X_{i,j}$  sono variabili aleatorie i.i.d. con media 0 e varianza  $\sigma^2$ . Allora:*

- se  $\mathbb{E}[X_{1,1}^4] < \infty$ ,

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} X_n \right\|_2 \xrightarrow{q.c.} 2\sigma; \quad (3.1.1)$$

- se  $\mathbb{E}[X_{1,1}^4] = \infty$ ,

$$\limsup_n \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} X_n \right\|_2 = \infty \quad q.c.$$

Prendiamo quindi una matrice  $X_n \in M_n(\mathbb{R})$  i cui elementi  $X_{i,j}$  sono variabili aleatorie reali i.i.d. con momenti  $\mathbb{E}[X_{1,1}] = 0$ ,  $\mathbb{E}[X_{1,1}^2] = \sigma^2$  e  $\mathbb{E}[X_{1,1}^4] < \infty$ , che trasliamo con una matrice deterministica i cui elementi siano tutti pari a  $\theta > 0$ : consideriamo cioè la matrice  $A_n = N_n + X_n$ , dove  $N_n = n\theta e_n e_n^T$  con  $e_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)^T$ . A questo punto,  $X_n$  viene trattata come una perturbazione<sup>1</sup> di  $N_n$ : questo ci permette di usare il Teorema 1.3.1 di Bauer-Fike, nella sua versione per matrici perturbate normali Corollario 1.3.1 ( $N_n$  è banalmente normale).

Prima di procedere, chiamiamo  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori di  $A_n$ , ordinati per modulo decrescente, per cui  $|\lambda_1| = \rho(A_n)$  (il raggio spettrale di  $A_n$ ). Gli autovalori di  $N_n$ , invece, sono naturalmente  $n\theta$  con molteplicità 1 e 0 con molteplicità  $n - 1$ . Applichiamo quindi (1.3.2):

$$\begin{aligned} |\lambda_i - n\theta| &\leq \|X_n\|_2 \\ |\lambda_j| &\leq \|X_n\|_2 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

per qualche  $i, j \leq n$  (non è ancora detto che  $i = 1$  e che  $2 \leq j \leq n$ , cosa che invece vogliamo dimostrare, e nemmeno che  $i \neq j$ ).

<sup>1</sup>Vale la pena evidenziare il fatto che, benché quello che ci proponiamo sia di deformare una matrice random dell'ensemble circolare con una matrice di rango uno, nel linguaggio della teoria delle perturbazioni e del teorema di Bauer-Fike stiamo perturbando la matrice di rango uno con la matrice random.

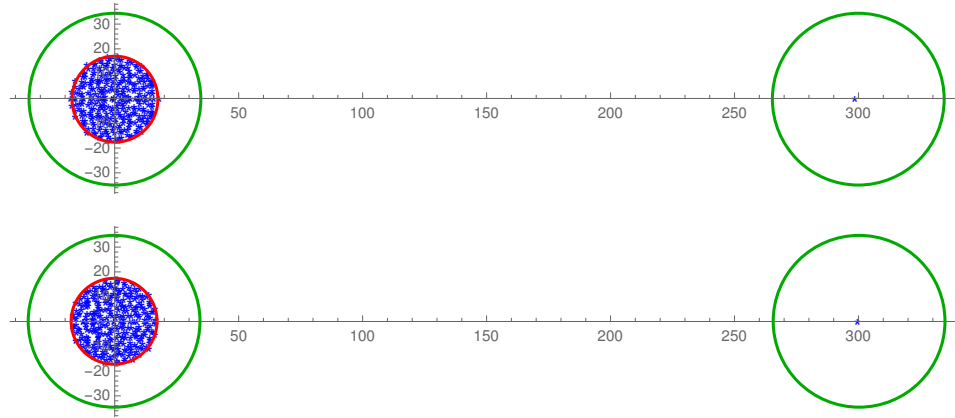


Figura 3.1: Matrici non centrali reali  $A_n = N_n + X_n$ , dove  $n = 300$  e  $N_n$  è una matrice con elementi pari a 1.  $X_n$  appartiene all'ensemble di Ginibre reale in alto ed è a elementi presi dalla distribuzione di Bernoulli su  $\{-1, 1\}$  in basso. In rosso la legge del cerchio, in verde i cerchi (3.1.3).

Ora ragioniamo per continuità: osserviamo gli autovalori di  $A_n(t) = N_n + tX_n$  che si muovono con continuità per  $t$  che varia da 0 a 1. Per  $t = 0$ , gli autovalori sono quelli di  $N_n$ , ovvero  $n\theta$  seguito da  $n - 1$  zeri; aumentando  $t$ , possiamo riscrivere le (3.1.2) grazie al Lemma 3.1.1 nel limite  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} |\lambda_i - n\theta| &\leq \kappa_n \sqrt{n} && \text{con } \kappa_n \xrightarrow{q.c.} 2\sigma. \\ |\lambda_j| &\leq \kappa_n \sqrt{n} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Adesso è evidente che, se  $\theta$  è abbastanza grande, per la precisione se  $\theta > 4\sigma/\sqrt{n}$  (il che avviene q.c.), i due cerchi sono q.c. disgiunti, e lo rimangono per ogni  $t \in [0, 1]$ , e che quindi, dato che per  $t = 0$  vi era nel cerchio centrato in  $n\theta$  un solo autovalore, deve rimanerne uno solo anche per  $t = 1$ : quindi deve essere necessariamente  $\lambda_1$ , il maggiore autovalore di  $A_n$ , e deve essere semplice (con molteplicità uno), reale e positivo, mentre tutti gli altri autovalori  $\lambda_j$  con  $2 \leq j \leq n$  si trovano nel cerchio centrato nell'origine (Figura 3.1).

Questo ragionamento, naturalmente, si può applicare anche a matrici non centrali complesse. In questo caso, la matrice  $A_n \in M_n(\mathbb{C})$  che ci interessa è costituita da una matrice  $Z_n$  dell'ensemble circolare complesso con momenti  $\mathbb{E}[Z_{1,1}] = 0$ ,  $\mathbb{E}[Z_{1,1}^2] = \sigma^2$  e  $\mathbb{E}[Z_{1,1}^4] < \infty$  deformata dalla matrice deterministica  $N_n$  con elementi  $N_{i,j} = \theta \in \mathbb{C}$ . Tutti gli argomenti esposti nel caso reale si applicano senza ulteriori accorgimenti o restrizioni anche al caso complesso, rinunciando naturalmente al fatto che l'autovalore di modulo più grande sia reale (Figura 3.2).

Il ragionamento fatto finora è utile per mostrare in modo semplice ed efficace le cause di un comportamento caratteristico dello spettro non centrale, ovvero la presenza di un singolo autovalore lontano dal supporto della legge

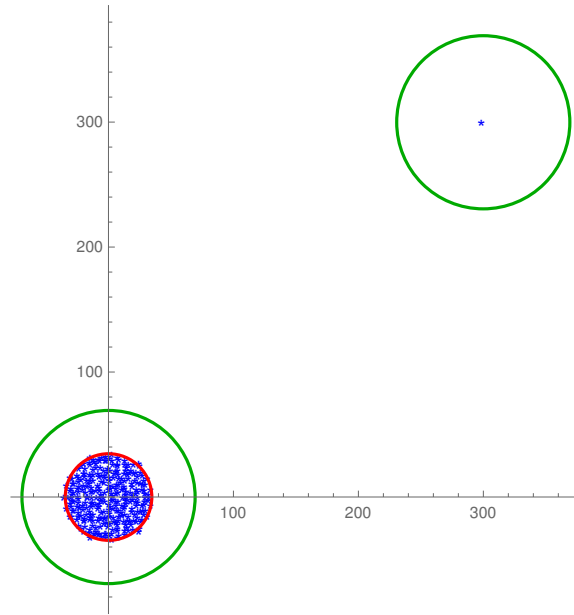


Figura 3.2: Matrice di Ginibre  $300 \times 300$  deformata da una matrice con elementi tutti pari a  $1 + i$ .

di convergenza, ma, come si può notare dagli esempi nelle Figure 3.1 e 3.2, non fornisce una buona stima della posizione dell'autovalore  $\lambda_1$ , che sembra in modo un po' "sospetto" sempre troppo vicino al centro del cerchio che lo confina. Infatti, esiste un risultato estremamente più stringente sulla posizione di  $\lambda_1$  nel caso non centrale reale, formulato sempre in [47] nel seguente teorema:

**Teorema 3.1.1** (Silverstein). *Sia  $X_n$  una matrice  $X_n \in M_n(\mathbb{R})$  i cui elementi sono variabili aleatorie i.i.d. con media  $\theta$ , varianza  $\sigma^2$  e momento quarto  $\mathbb{E}[X_{1,1}^4]$  finito. Il maggiore (in modulo) autovalore  $\lambda_1$  di  $X_n$  è reale, positivo e semplice con probabilità 1 (per  $n$  sufficientemente grande) e vale*

$$\lambda_1 - n\theta \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

dove  $\xrightarrow{d}$  indica la convergenza in distribuzione.

Un esempio in Figura 3.3.

### 3.1.2 Deformazioni di rango finito

Vogliamo ora generalizzare i risultati di Silverstein a deformazioni di rango finito. Consideriamo matrici del tipo  $A_n := K_n + X_n$ , dove  $K_n$  è una matrice di rango  $r$  che soddisfa (2.2.1) e  $X_n$  appartiene all'ensemble circolare con varianza  $\sigma^2$ , ovvero *deformazioni di rango  $r$  dell'ensemble circolare*.

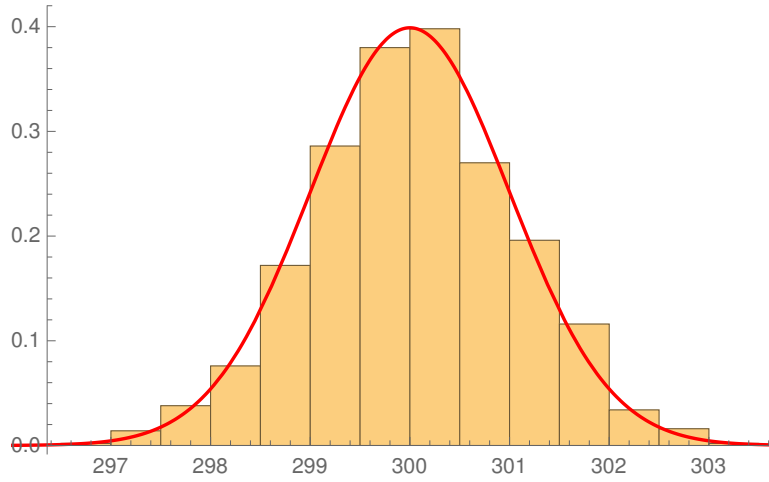


Figura 3.3: Istogramma riempito con il valore di  $\lambda_1$  di 1000 matrici  $300 \times 300$  ottenute deformando l'ensemble di Ginibre con una matrice a elementi pari a 1. In rosso la densità di probabilità di  $\mathcal{N}(300, 1)$ .

Va posta attenzione al fatto che nessuna ipotesi è stata fatta su  $r$  e che quindi una generica matrice dell'ensemble circolare deformato (in particolare quando non vale  $r \sim o(n)$ ), per come è stato definito, può non soddisfare la legge del cerchio.

Sia quindi  $A_n = K_n + X_n$  una deformazione di rango  $r$  dell'ensemble circolare. Partiamo dal caso in cui  $K_n$  sia normale per potere applicare il Corollario 1.3.1 come è stato fatto per le deformazioni di rango uno. Questa ipotesi non va certo presa a cuor leggero: è abbastanza evidente che è solo di comodo e che il comportamento spettrale dell'ensemble circolare deformato non ha che vedere con la normalità o meno della matrice di deformazione. Per generalizzare sarebbe necessario procurare un limite superiore accettabile per il numero di condizione  $\kappa_2$  in (1.3.1). Con la normalità di  $K_n$  abbiamo anche (2.2.1), grazie a un ragionamento analogo a (2.2.3).

Gli  $r$  autovalori non nulli di  $K_n$  sono  $\theta_1, \dots, \theta_r$ , e vale  $K_n = UD_nU^{-1}$  con  $U$  unitaria e  $D_n = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_r, 0, \dots, 0)$ , mentre gli autovalori di  $A_n$  sono  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , ordinati per modulo decrescente e fase crescente. Posto  $\theta_i > 4\sigma/\sqrt{n}$  per ogni  $i = 1, \dots, r$ , si può utilizzare l'argomento usato nella sezione precedente per  $r = 1$ , ovvero la continuità degli autovalori di  $A_n(t) := K_n + tX_n$  per  $t \in [0, 1]$ , il teorema di Bauer-Fike e il Lemma 3.1.1: si ottiene

$$\begin{aligned} |\lambda_{\pi(i)} - \theta_i| &\leq \kappa_n \sqrt{n}, & i = 1, \dots, r, \\ |\lambda_j| &\leq \kappa_n \sqrt{n}, & j = r + 1, \dots, n, \end{aligned} \quad \text{con } \kappa_n \xrightarrow{q.c.} 2\sigma, \quad (3.1.4)$$

dove  $\pi(\cdot)$  è una permutazione di  $\{1, \dots, r\}$ . I cerchi centrati in  $\theta_i$  sono tutti disgiunti dai  $n - r$  cerchi sovrapposti centrati nell'origine, ma possono essere tra di loro non disgiunti.

Se i  $\theta_i$  sono tutti uguali tra loro,  $r$  autovalori della matrice deformata si trovano nel cerchio centrato in  $\theta_1$ : si ottiene una specie di seconda “legge del cerchio” (deve essere vista a questo livello come un concetto puramente qualitativo) traslata rispetto all’origine che contiene  $r$  autovalori di  $A_n$ . Aumentando  $r$  da 1 a  $n$  il cerchio unitario si va man mano “svuotando” e sempre più autovalori migrano verso il secondo “cerchio” che diventa sempre più grande: finché  $r \sim o(n)$  la legge del cerchio Corollario 2.2.1 regge, e il “cerchio” secondario è ininfluenza nella DSE limite; aumentando ancora  $r$ , invece diventerà preponderante fino a contenere tutti gli autovalori nel caso  $r = n$  (Figura 3.4). La matrice di deformazione è in questo caso un multiplo dell’identità, e, com’è noto, otteniamo una vera e propria legge del cerchio con centro traslato, dato che gli autovalori di  $A_n$  sono semplicemente quelli di  $X_n$  shiftati di  $\theta$  ( $\det(X_n - \lambda \mathbb{I}_n) = \det(A_n - (\lambda + \theta) \mathbb{I}_n)$ ).

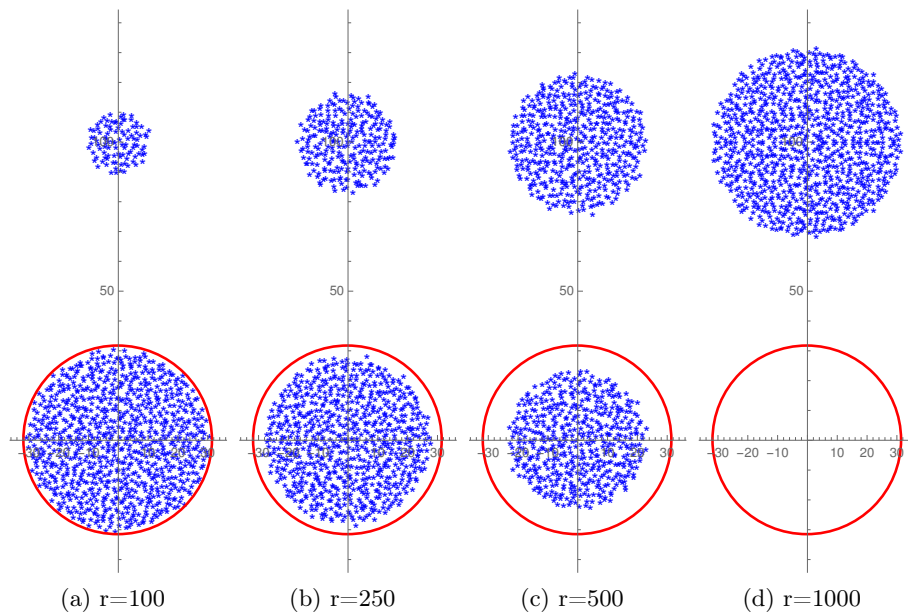


Figura 3.4: Deformazioni di rango  $r$  di una matrice  $1000 \times 1000$  appartenente all’ensemble di Ginibre tramite una matrice con autovalori  $100i$  con molteplicità  $r$  e 0 i restanti.

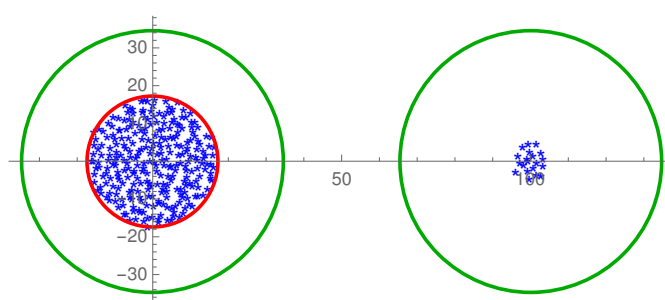
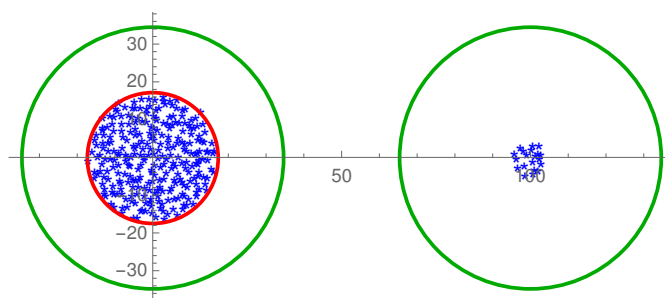
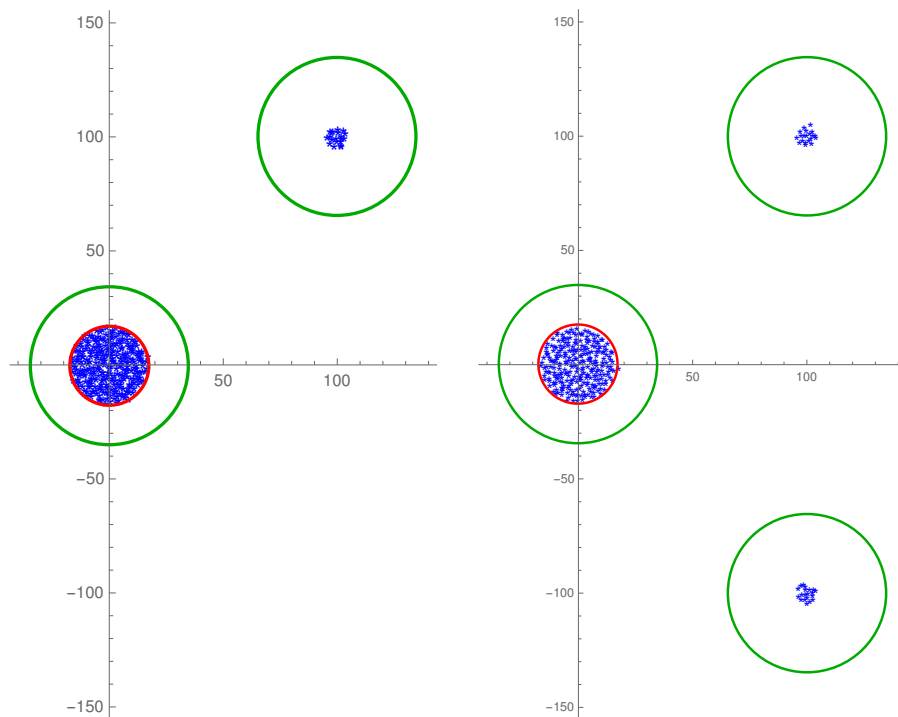
(a)  $X_n$  appartenente all'ensemble di Ginibre reale(b)  $X_n$  a elementi presi dalla distribuzione di Bernoulli su  $\{-1, 1\}$ 

Figura 3.5: Deformazioni di rango 20  $A_n = K_n + X_n$ , dove  $n = 300$  e  $K_n$  è una matrice normale che ha come autovalori 100 con molteplicità 20 e 0 i restanti. In rosso la legge del cerchio, in verde i cerchi (3.1.4).



(a) Deformazione di rango 20 tramite una matrice i cui autovalori sono  $100 + 100i$  con molteplicità 20 e 0 i restanti

(b) Deformazione di rango 40 tramite una matrice i cui autovalori sono  $100 + 100i$  con molteplicità 20,  $100 - 100i$  con molteplicità 20 e 0 i restanti

Figura 3.6: Deformazioni di rango  $r$  di una matrice  $X_n \in M_n(\mathbb{R})$  a elementi presi dalla distribuzione di Bernoulli su  $\{-1, 1\}$ , con  $n = 300$ .

### 3.2 Ensemble di Wigner deformati

Come già osservato, molti dei risultati ottenuti nella precedente sezione sono di carattere semiquantitativo e aiutano una comprensione del comportamento degli autovalori che si staccano dal supporto delle leggi di convergenza, ma non offrono le necessarie spiegazioni quantitative.

Da questo punto di vista, i risultati maggiori sono stati ottenuti nel caso hermitiano. Consideriamo quindi matrici  $W_n \in M_n(\mathbb{C})$  dell'ensemble di Wigner con parametro  $\sigma^2$  (si intende che gli elementi sopra la diagonale sono distribuiti con varianza  $\sigma^2$ ) e chiamiamo  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  gli autovalori di  $\frac{1}{\sqrt{n}}W_n$ . La prima osservazione riguarda la convergenza degli autovalori estremi [49]:

$$\lambda_1 \xrightarrow{q.c.} 2\sigma, \quad \lambda_n \xrightarrow{q.c.} -2\sigma. \quad (3.2.1)$$

Le fluttuazioni di  $\lambda_1$ , invece sono date da

$$\frac{n^{2/3}}{\sigma}(\lambda_1 - 2\sigma) \xrightarrow{d} F_2^{TW}, \quad (3.2.2)$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \frac{n^{2/3}}{\sigma}(\lambda_1 - 2\sigma) \leq x \right) = F_2^{TW}(x),$$

dove  $F_2^{TW}$  è la distribuzione di Tracy-Widom definita come determinante di Fredholm nel modo seguente:

$$F_2^{TW}(x) = \det(1 - A_x), \quad (3.2.3)$$

dove  $A_x$  è l'operatore di classe traccia che agisce su  $L^2(x, \infty)$  avente come kernel il kernel di Airy

$$\frac{\text{Ai}(x) \text{Ai}'(y) - \text{Ai}'(x) \text{Ai}(y)}{x - y}. \quad (3.2.4)$$

Un esempio in Figura 3.7. Una definizione alternativa della distribuzione di Tracy-Widom si può dare in termini di equazioni di Painlevé [50].

Questo risultato è stato prima dimostrato per matrici di Wigner gaussiane da Tracy e Widom [50], poi è stato esteso in tutta la sua universalità da Soshnikov [51].

Alcuni recenti lavori, dovuti soprattutto a matematiche francesi, si sono occupati di cosa succede all'autovalore maggiore nell'ensemble di Wigner deformato, definito nel modo consueto come matrici del tipo  $A_n = \frac{1}{\sqrt{n}}W_n + K_n$  con autovalori  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$ , dove  $W_n$  è una matrice di Wigner e  $K_n$  una matrice deterministica hermitiana di rango finito  $r$  fissato. Possiamo quindi pensare a  $K_n$  come a una matrice hermitiana con autovalori non nulli (e



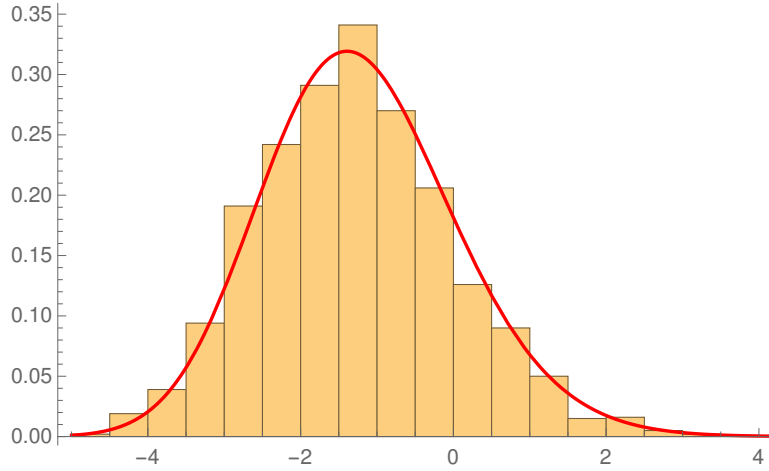


Figura 3.7: Istogramma riempito con  $n^{2/3}(\lambda_1 - 2)$  per 2000 matrici  $1000 \times 1000$   $W$  del GOE con parametro  $\sigma^2 = 1$ , dove  $\lambda_1$  è il maggiore autovalore di  $\frac{1}{\sqrt{n}}W$ . In rosso la densità di probabilità della distribuzione di Tracy-Widom. Come si può notare, la distribuzione non è simmetrica e nemmeno centrata.

indipendenti da  $n$ )  $\theta_1 > \dots > \theta_J$ , ognuno preso con la sua molteplicità fissata  $k_j$ , per cui vale  $\sum_{j=1}^J k_j = r$ . Quindi  $K_n$  è simile alla matrice

$$D_n = \text{diag}(\underbrace{\theta_1, \dots, \theta_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{\theta_J, \dots, \theta_J}_{k_J}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}). \quad (3.2.5)$$

Partiamo con il caso gaussiano, in particolare con  $W_n$  appartenente al GUE con parametro  $\sigma^2$  e con una deformazione di rango uno. Grazie all'invarianza per rotazioni della distribuzione gaussiana, è sufficiente considerare deformazioni diagonali, come (3.2.5); in questo caso  $D_n = \text{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$ , ad esempio  $\theta > 0$ . In [52] viene mostrato come, se  $\theta$  è abbastanza piccolo, per la precisione se  $\theta < \sigma$ , le fluttuazioni di  $\lambda_1$  sono sempre date da (3.2.2). A  $\theta = \sigma$  avviene una “transizione di fase” [53], e per  $\theta > \sigma$   $\lambda_1$  oscilla intorno a

$$\rho_\theta = \theta + \frac{\sigma^2}{\theta} \quad (3.2.6)$$

che è maggiore di  $2\sigma$  dato che  $\theta > \sigma$ : in questo regime la deformazione è abbastanza forte da “staccare” un autovalore dal supporto della legge del semicerchio. Le oscillazioni sono date da

$$\sqrt{n}(\lambda_1 - \rho_\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_\theta^2), \quad (3.2.7)$$

con

$$\sigma_\theta = \sigma \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\theta^2}}.$$

Sempre nella presente situazione (deformazione di rango uno di un ensemble di Wigner gaussiano), Maïda trovò in [54] un analogo di (3.2.1):

$$\lambda_1 \xrightarrow{q.c.} \begin{cases} \rho\theta, & \text{se } \theta > \sigma, \\ 2\sigma, & \text{se } \theta \leq \sigma. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

In [52] viene anche mostrato come, nel caso di deformazione di rango  $r$  con  $J = 1$  e  $k_1 = r$ , ovvero in cui la deformazione è  $D_n = \text{diag}(\theta, \dots, \theta, 0, \dots, 0)$ ,  $r$  autovalori si staccano dal supporto della legge del semicerchio, e come, attraverso il calcolo della funzione di spaziamiento tra gli  $r$  autovalori che si staccano, si possa avere un'evidenza del fatto che questi  $r$  autovalori si comportano come quelli di un GUE  $r \times r$ .

Nel più generale caso di deformazioni di rango finito di matrici di Wigner non gaussiane, Capitaine, Donati-Martin e Féral trovarono in [55] la prevista generalizzazione di (3.2.8):

**Teorema 3.2.1.** *Sia  $A_n = \frac{1}{\sqrt{n}}W_n + K_n$  una matrice dell'ensemble di Wigner deformato, e  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  i suoi autovalori, con  $W_n$  che soddisfa alcune condizioni tecniche<sup>2</sup> e  $K_n$  simile alla matrice  $D_n$  in (3.2.5). Se  $p$  è il numero di  $\theta_j$  (autovalori non nulli di  $K_n$  per cui  $\theta_j > \sigma$  e  $q$  il numero di quelli per cui vale  $\theta_j < -\sigma$ , vale:*

- se  $\theta_j > \sigma$  allora  $\lambda_{i_j} \xrightarrow{q.c.} \rho\theta_j$  per ogni  $k_1 + \dots + k_{j-1} < i_j \leq k_1 + \dots + k_j$ ;
- $\lambda_{k_1 + \dots + k_p + 1} \xrightarrow{q.c.} 2\sigma$ ;
- $\lambda_{k_1 + \dots + k_{J-q}} \xrightarrow{q.c.} -2\sigma$ ;
- se  $\theta_j < -\sigma$  allora  $\lambda_{i_j} \xrightarrow{q.c.} \rho\theta_j$  per ogni  $k_1 + \dots + k_{j-1} < i_j \leq k_1 + \dots + k_j$ ;

Per cui, ogni autovalore non nullo di  $K_n$  che sia maggiore di  $\sigma$  o minore di  $-\sigma$  stacca dal supporto del semicerchio un numero di autovalori pari alla sua molteplicità: i primi  $k_1 + \dots + k_p$  autovalori si troveranno al di fuori di  $[-2\sigma, 2\sigma]$ , il successivo autovalore (il  $(k_1 + \dots + k_p + 1)$ -esimo) converge al limite del supporto; i restanti autovalori si trovano all'interno (e lo stesso per gli ultimi  $q$  autovalori).

---

<sup>2</sup>Si richiede che la distribuzione degli elementi di  $W_n$  soddisfi una disuguaglianza di Poincaré; per dettagli si rimanda a [55]. Sempre in [55], viene messo in luce come questa sia un'assunzione puramente tecnica e viene congetturato che il risultato valga sotto la sola assunzione di quarto momento finito. In ogni caso, molte misure soddisfano una disuguaglianza di Poincaré.

### Non universalità delle fluttuazioni

A questo punto, si potrebbe cominciare a riporre la massima fiducia nell'universalità e a pensare che non sia possibile, nel limite di dimensione della matrice che tende a infinito, distinguere dalle distribuzioni spettrali limite le distribuzioni con cui sono stati generati gli elementi della matrice, e che tutti i fenomeni osservabili in tal senso dipendano solo dai primi due momenti della distribuzione. Si potrebbe pensare, ad esempio, che (3.2.7) valga per tutte le matrici di Wigner deformate da matrici di rango uno, e non solo per quelle del GUE per cui è stata dimostrata. A tal proposito, una smentita viene sempre da [55]: le fluttuazioni del maggior autovalore di una deformazione di rango uno dell'ensemble di Wigner dipendono dalla particolare distribuzione con cui la matrice di Wigner è generata! È possibile estendere (3.2.7) anche a tutti gli ensemble di Wigner gaussiani, ma niente di più: nel caso generale, bisogna chiamare in causa la distribuzione  $\mu$  degli elementi della matrice  $W_n$ , e le fluttuazioni di  $\lambda_1$  in generale non saranno gaussiane se  $\mu$  è gaussiana.

In ogni caso, esiste un particolare tipo di deformazioni di rango uno per cui continua a valere (3.2.7) in modo universale, a prezzo di qualche assunzione supplementare sui momenti di  $W_n$ . In [56] viene mostrato come per deformazioni da parte di matrici  $K_n \in M_n(\mathbb{C})$  con elementi  $K_{i,j} = \frac{\theta}{n}$ , chiamate *deformazioni complete*, l'universalità delle fluttuazioni gaussiane (se la matrice  $W_n$  ha momenti sub-gaussiani; in [55] le ipotesi sui momenti vengono ridotte alla finitezza di momenti di ordine 19) viene ristabilita.

# Conclusioni

Nel corso di questo lavoro sono stati elencati, discussi e corredati da esempi e grafici alcuni dei più significativi teoremi che riguardano la localizzazione dello spettro.

Abbiamo visto come, per matrici generiche, i risultati più interessanti si ottengano utilizzando particolari tipi di curve, come cerchi, ovali di Cassini, lemniscate, curve cubiche o di altro grado, per fornire insiemi che includono interamente lo spettro della matrice, mentre per le matrici random occorre dimostrare leggi di convergenza della distribuzione spettrale, e il ruolo degli insiemi di inclusione viene ora svolto (questa volta in senso probabilistico) dai supporti delle leggi (segmento sull'asse reale, cerchio o ellisse con semiassi dati dalla correlazione tra elementi opposti alla diagonale).

Il metodo di Geršgorin, che è stato seguito da altri matematici, come Taussky, Ostrowski, Brauer e Brualdi, è quello di fornire delle disuguaglianze che mettono in relazione le distanze degli autovalori dagli elementi diagonali alle somme assolute per righe (o per colonne) della matrice. Si ottengono così insiemi di inclusione in termini di cerchi, ovali di Cassini, lemniscate... Abbiamo visto come, nel ricavare questi insiemi, siano fondamentali considerazioni sul grafo associato alla matrice e la sua connettività, e come ognuno di essi sia legato a un realtivo teorema di non singolarità.

Un'altra classe di insiemi di inclusione di cui abbiamo parlato è quella degli involuppi: essi vengono ottenuti grazie a una disuguaglianza che gli autovalori devono soddisfare, la cui curva corrispondente viene poi "fatta ruotare" (nel senso di (1.5.1)) intorno allo spettro involuppandolo. Il prototipo di involuppo è quindi il range numerico (per il quale il metodo delle rotazioni è stato originariamente ideato da Johnson), in cui la disuguaglianza usata è semplicemente  $\operatorname{Re} \lambda(A) \leq \lambda_{\max}(H(A))$ , ricavata nell'ambito del teorema di Bendixson (Teorema 1.1.1); in tale contesto, l'insieme di Bendixson può essere pensato come un range numerico calcolato con solo tre rotazioni di angolo retto.

Il range numerico, essendo convesso per il teorema di Toeplitz-Hausdorff, non può separare degli autovalori dagli altri o isolarne alcuni. La disuguaglianza di Adam-Tsatsomeros (1.5.4) e la disuguaglianza di Bergqvist (1.5.6), invece, danno luogo insiemi di inclusione più elaborati, in cui è frequente che

alcuni autovalori vengano isolati e “predetti” con grande accuratezza. Gli involuipi di grado superiore al primo mostrano spesso (ma, come abbiamo visto, non sempre) una maggiore efficacia nel confinare gli autovalori, ma rispetto a quello di grado uno perdono alcune utili proprietà, alcune delle quali potrebbero in futuro essere dimostrate, mentre altre sono in generale false.

Per quanto riguarda le matrici random, invece, abbiamo visto le tre principali leggi di convergenza, e osservato come esse dipendano dalla distribuzione degli elementi di matrici solo tramite i suoi primi due momenti: è il fenomeno dell’universalità, che costituisce senza dubbio il concetto più importante nello studio delle distribuzioni spettrali limite.

Riguardo alla legge dell’ellisse, abbiamo esposto una dimostrazione nel caso gaussiano (dovuta a Sommers e altri) in cui si fa uso di una interessante analogia tra la distribuzione spettrale e la distribuzione di carica dell’elettrostatica piana: gli autovalori generano quindi un “campo elettrico” nel piano complesso, che è in realtà una funzione di Green. Grazie all’equazione di Poisson (e ad alcune brillanti osservazioni sulla funzione di Green) è quindi possibile ricavare la distribuzione spettrale nel limite di dimensione della matrice che tende ad infinito.

L’universalità fa in modo che le leggi di convergenza siano estensibili, con le dovute attenzioni, a ensemble più particolari, tra cui abbiamo visto gli ensemble sparsi e deformati. Riguardo agli ensemble sparsi, ci siamo soffermati a ragionare su quanto il “grado” di diluizione possa inficiare la legge del cerchio, e come le cause di ciò siano probabilmente da cercare nella connettività del grafo associato. In particolare, la legge del cerchio tiene solo una volta superata la transizione di percolazione, dove si inizia a manifestare una connettività a lungo raggio, ma dà dei risultati numericamente accettabili solo quando la connettività è quasi completa.

Gli ensemble deformati e i loro autovalori solitari sono invece il fulcro della parte conclusiva della tesi, in cui, sempre seguendo il paradigma di questo lavoro, cioè la spiegazione di comportamenti spettrali che potrebbero a prima vista sorprendere, abbiamo cercato di capire quali sono i motivi che provocano il “distacco” degli autovalori. A tal fine, ci è sembrato particolarmente efficace il metodo perturbativo di Silverstein, che abbiamo esposto e di cui abbiamo proposto una piccola generalizzazione.

Abbiamo poi concluso con una serie di risultati in linea con il discorso sugli ensemble deformati calati però al caso hermitiano, e mostrato brevemente i passi avanti fatti di recente, che consentono una spiegazione molto più approfondita rispetto al caso generico trattato in precedenza. Il Teorema 3.2.1 fornisce in tale contesto la convergenza degli autovalori estremi, e altri risultati si hanno sulle loro fluttuazioni, per cui si può dire che gli ensemble di Wigner siano ben caratterizzati sia nel caso centrale che in quello deformato.

# Bibliografia

- [1] D. Hershkowitz. “Recent directions in matrix stability”. *Linear Algebra Appl.* **171** (1992), pp. 161–186.
- [2] P. Kirk, D. M. Rolando, A. L. MacLean e M. P. Stumpf. “Conditional random matrix ensembles and the stability of dynamical systems”. *New J. Phys.* **17** (2015).
- [3] R. May. “Will a large complex system be stable?” *Nature* **238** (1972), pp. 413–414.
- [4] O. Bohigas, M. J. Giannoni e C. Schmit. “Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws”. *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984), pp. 1–4.
- [5] Gernot Akeman, Jinho Baik e Philippe Di Francesco, cur. *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory*. Oxford University Press, 2011.
- [6] Roger A. Horn e Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. 2nd ed. Cambridge University Press, 2012.
- [7] Roger A. Horn e Charles R. Johnson. *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [8] S. Geršgorin. “Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix”. *Izv. Akad. Nauk. USSR Otd. Fiz.-Mat. Nauk* **6** (1931), pp. 749–754.
- [9] Richard S. Varga. *Geršgorin and his circles*. Springer-Verlag, 2004.
- [10] L. Yu. Kolotilina. “Generalizations of the Ostrowski-Brauer theorem”. *Linear Algebra Appl.* **364** (2003), pp. 65–80.
- [11] A. Nagy. “A short review on the theory of generalized conics”. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis* **31** (2015), pp. 81–90.
- [12] C. R. Johnson. “Numerical determination of the field of values of a general complex matrix”. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **15** (1978), pp. 595–602.
- [13] M. Adam e M. J. Tsatsomeros. “An eigenvalue inequality and spectrum localization for complex matrices”. *Electronic Journal of Linear Algebra* **15** (2006), pp. 239–250.

- [14] P. J. Psarrakos e M. J. Tsatsomeros. “An envelope for the spectrum of a matrix”. *Cent. Eur. J. Math.* **10** (2012), pp. 292–302.
- [15] P. J. Psarrakos e M. J. Tsatsomeros. “On the geometry of the envelope of a matrix”. *Appl. Math. Comp.* **244** (2014), pp. 132–141.
- [16] G. Bergqvist. “Curves and envelopes that bound the spectrum of a matrix”. *ArXiv e-prints* (ott. 2016). arXiv: [1610.02196](https://arxiv.org/abs/1610.02196) [math.RA].
- [17] M. Krbálek e P. Seba. “The statistical properties of the city transport in Cuernavaca (Mexico) and random matrix ensembles”. *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000), p. 229234.
- [18] Terence Tao. *Topics in Random Matrix Theory*. Graduate Studies in Mathematics Vol. 132. American Mathematical Society, 2012. eprint: <https://terrytao.files.wordpress.com/2011/08/matrix-book.pdf>.
- [19] E. P. Wigner. “On the distribution of the roots of certain symmetric matrices”. *Annals of Mathematics* **67** (1958), pp. 325–327.
- [20] F. J. Dyson. “The Threefold Way. Algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics”. *Journal of Mathematical Physics* **3** (1962), pp. 1199–1215.
- [21] J. Ginibre. “Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices”. *Journal of Mathematical Physics* **6** (1965), pp. 440–449.
- [22] Madan L. Mehta. *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*. New York: Academic Press, 1967.
- [23] A. Edelman. “Eigenvalues and condition numbers of random matrices”. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **9** (1988), pp. 543–560.
- [24] C. Bordenave e D. Chafaï. “Around the circular law”. *Probability Surveys* **9** (2012), pp. 1–89.
- [25] V. L. Girko. “Circular law”. *Theory Probab. Appl.* **29** (1984). [*Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, **29** (1984), 669–679], pp. 694–706.
- [26] Terence Tao e Van Vu. “Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques”. Lecture Notes in Computer Science Vol. 5687. 2009. Cap. Smooth analysis of the condition number and the least singular value, pp. 714–737. arXiv: [0805.3167](https://arxiv.org/abs/0805.3167) [math.PR].
- [27] Z. D. Bai. “Circular law”. *The Annals of Probability* **25** (1997), pp. 494–529.
- [28] Zhidong Bai e Jack W. Silverstein. *Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices*. Mathematics Monograph Series Vol. 2. Beijing: Science Press, 2006.

- [29] F. Götze e A. Tikhomirov. “On the Circular Law”. *ArXiv Mathematics e-prints* (feb. 2007). eprint: [math/0702386](https://arxiv.org/abs/math/0702386).
- [30] F. Götze e A. Tikhomirov. “The circular law for random matrices”. *The Annals of Probability* **38** (2010), pp. 1444–1491.
- [31] G. Pan e W. Zhou. “Circular law, extreme singular values and potential theory”. *Journal of Multivariate Analysis* **101** (2010), pp. 645–656.
- [32] T. Tao e V. Vu. “Random matrices: the circular law”. *Communications in Contemporary Mathematics* **10** (2008), pp. 261–307.
- [33] T. Tao e V. Vu. “Random matrices: universality of ESDs and the circular law”. *The Annals of Probability* **38** (2010), pp. 2023–2065.
- [34] V. L. Girko. “The elliptic law”. *Theory Probab. Appl.* **30** (1986). [*Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, **34** (1985), 640–651], pp. 677–690.
- [35] V. L. Girko. “The strong elliptic law. Twenty years later”. *Random Oper. and Stoch. Equ.* **14** (2006), pp. 59–102.
- [36] H. J. Sommers, A. Crisanti, H. Sompolinsky e Y. Stein. “Spectrum of large random asymmetric matrices”. *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988), pp. 1895–1899.
- [37] A. Naumov. “Elliptic law for real random matrices”. *ArXiv e-prints* (gen. 2012). arXiv: [1201.1639](https://arxiv.org/abs/1201.1639) [[math.PR](https://arxiv.org/abs/1201.1639)].
- [38] H. H. Ngyuen e S. O’Rourke. “The elliptic law”. *International Mathematics Research Notices* **2015** (2015), pp. 7620–7689.
- [39] G. M. Cicutta e L. G. Molinari. “Random antagonistic matrices”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **49** (2016).
- [40] Fritz Haake. *Quantum Signatures of Chaos, 2nd ed.* Springer-Verlag, 2001.
- [41] P. Matchett Wood. “Universality and the circular law for sparse random matrices”. *The Annals of Applied Probability* **22** (2012), pp. 1266–1300.
- [42] G. Semerjian e L. F. Cugliandolo. “Sparse random matrices: the eigenvalue spectrum revisited”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **35** (2002), pp. 4837–4851.
- [43] K. S. McCann. “The diversity-stability debate”. *Nature* **405** (2000), pp. 228–233.
- [44] S. Allesina e Si Tang. “The stability-complexity relationship at age 40: a random matrix perspective”. *Popul. Ecol.* **57** (2015), pp. 63–75.
- [45] D. Noutsos. “On Perron-Frobenius property of matrices having some negative entries”. *Linear Algebra and its Applications* **412** (2006), pp. 132–153.
- [46] S. M. Rump. “Perron-Frobenius theory for complex matrices”. *Linear Algebra and its Applications* **363** (2003), pp. 251–273.



- [47] J. W. Silverstein. “The spectral radii and norms of large dimensional non-central random matrices”. *Commun. Statist.-Stochastic Models* **10** (1994), pp. 525–532.
- [48] Z. D. Bai, J. W. Silverstein e Y. Q. Yin. “A note on the largest eigenvalue of large dimensional sample covariance matrix”. *Journal of Multivariate Analysis* **26** (1988), pp. 166–168.
- [49] Z. D. Bai e Y. Q. Yin. “Necessary and sufficient conditions for almost sure convergence of the largest eigenvalue of a Wigner matrix”. *The Annals of Probability* **16** (1988), pp. 1729–1741.
- [50] C. A. Tracy e H. Widom. “Level-spacings distributions and the Airy kernel”. *Communications in Mathematical Physics* **159** (1994), pp. 151–174.
- [51] A. Soshnikov. “Universality at the edge of the spectrum in Wigner random matrices”. *Communications in Mathematical Physics* **207** (1999), pp. 697–733.
- [52] S. Péché. “The largest eigenvalue of small rank perturbations of Hermitian random matrices”. *Probability Theory and Related Fields* **134** (2006), pp. 127–173.
- [53] J. Baik, G. Ben Arous e S. Peche. “Phase transition of the largest eigenvalue for non-null complex sample covariance matrices”. *ArXiv Mathematics e-prints* (mar. 2004). eprint: [math/0403022](https://arxiv.org/abs/math/0403022).
- [54] M. Maïda. “Large deviations for the largest eigenvalue of rank one deformations of Gaussian ensembles”. *ArXiv Mathematics e-prints* (set. 2006). eprint: [math/0609738](https://arxiv.org/abs/math/0609738).
- [55] M. Capitaine, C. Donati-Martin e D. Féral. “The largest eigenvalues of finite rank deformation of large Wigner matrices: convergence and nonuniversality of the fluctuations”. *The Annals of Probability* **37** (2009), pp. 1–47.
- [56] D. Féral e S. Péché. “The largest eigenvalue of rank one deformation of large Wigner matrices”. *Communications in Mathematical Physics* **272** (2007), pp. 185–228.