Corso di Istituzioni di Fisica Teorica

APPUNTI DI TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI DEL GRUPPO DELLE ROTAZIONI

Luca Molinari

Indice

§1. IL GRUPPO DELLE ROTAZIONI, SO(3)

<u>Basi Cartesiane.</u>

Nello spazio lineare R^3 di vettori colonna $\underline{a}$ con tre componenti reali $\{a_i\}$, riferite alla base canonica

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si introduce l'usuale **prodotto scalare**

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}^t \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{1.1}$$

E' utile anche definire il **prodotto vettore** tra due vettori, $(\underline{a}, \underline{b}) \to \underline{a} \times \underline{b} \in R^3$, attraverso la richiesta che esso sia bilineare e l'azione sui vettori della base canonica:

$$\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \underline{e}_k \tag{1.2}$$

ϵ_{ijk} é il simbolo di Levi-Civita, con componenti $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, e la proprietà di antisimmetria $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$, da cui segue che, se due indici sono uguali, il simbolo ha valore nullo. Per una generica coppia di vettori:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j \underline{e}_k \tag{1.3}$$

Mediante il simbolo di Levi-Civita si può dare l'espressione dello sviluppo del determinante di una generica matrice 3×3

$$\det M = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} M_{i1} M_{j2} M_{k3} \tag{1.4}$$

giustificando il noto algoritmo di calcolo del prodotto vettore, o del rotore di un campo, in una base cartesiana. Si dimostrano facilmente le proprietà

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{rsk} = \delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}, \qquad \sum_{ij} \epsilon_{ijr} \epsilon_{ijs} = 2\delta_{rs} \tag{1.5}$$

da cui conseguono le utili relazioni

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{1.6a}$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a} \tag{1.6b}$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c}) \tag{1.6c}$$

In particolare, per la (1.6a) il vettore $\underline{a} \times \underline{b}$ è ortogonale ai vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$.
Def.: Una **base cartesiana** è una terna ordinata di vettori $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$ normalizzati e tra loro ortogonali: $\underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_j = \delta_{ij}$.
Dalla relazione $|\underline{a} \times \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2|\underline{b}|^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$, che consegue dalla (1.6c), si ha che, se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono vettori ortogonali e normalizzati, allora il vettore $\underline{a} \times \underline{b}$ è normalizzato, e forma coi precedenti una base cartesiana.
È evidente che, in una base cartesiana $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$, necessariamente $\underline{e}'_3$ o coincide con il versore $\underline{e}'_1 \times \underline{e}'_2$ oppure con il suo opposto. Questa circostanza permetterà di introdurre una nozione di orientamento, come una relazione di equivalenza nell'insieme delle basi cartesiane legata alla azione del gruppo ortogonale.

Il gruppo ortogonale.

Le trasformazioni lineari che conservano il prodotto scalare

$$O\underline{a} \cdot O\underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b} \qquad \forall \underline{a}, \underline{b} \tag{1.7}$$

portano basi cartesiane in basi cartesiane. Nella base canonica esse sono rappresentate da matrici tali che $(O\underline{a})^t(O\underline{b}) = \underline{a}^t(O^tO)\underline{b} = \underline{a}^t\underline{b}$. Si perviene alla condizione di ortogonalità

$$O^tO = I \tag{1.8}$$

dove $(O^t)_{ij} = O_{ji}$. Essa implica $\det O = \pm 1$, e $O^{-1} = O^t$. Le matrici ortogonali formano il **gruppo ortogonale** $O(3)$.
Data la relazione $4(\underline{a} \cdot \underline{b}) = |\underline{a} + \underline{b}|^2 - |\underline{a} - \underline{b}|^2$, le matrici ortogonali possono essere anche caratterizzate come le trasformazioni lineari che conservano la norma euclidea: $|O\underline{a}| = |\underline{a}|$, $\forall \underline{a}$.
La relazione di ortogonalità (1.8) e il fatto che la matrice trasposta è anch'essa ortogonale comportano che sia le colonne che le righe di O siano terne di vettori ortonormali. Si osserva che i vettori colonna di O coincidono con le immagini $O\underline{e}_i$ dei vettori della base canonica. Si conclude che l'insieme delle matrici ortogonali è in corrispondenza biunivoca con quello delle basi cartesiane:

$$\{\text{Basi Cartesiane}\} \leftrightarrow O(3)$$

Le matrici ortogonali con $\det O = 1$ formano il **sottogruppo ortogonale speciale** $SO(3)$, o gruppo delle rotazioni. L'insieme delle matrici ortogonali con $\det O = -1$ viene ottenuto moltiplicando una matrice di rotazione con la matrice di parità $P = -I$.

L'orientamento di una terna cartesiana è una proprietà collegata alle trasformazioni rigide di un solido nello spazio, assimilabile a una terna. Introduciamo, con questa idea, la relazione di equivalenza:
Def.: Due terne $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$ e $\{\underline{e}''_1, \underline{e}''_2, \underline{e}''_3\}$ hanno lo stesso orientamento se sono connesse da una rotazione:

$$\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\} \sim \{\underline{e}''_1, \underline{e}''_2, \underline{e}''_3\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{e}''_i = R\underline{e}'_i, \ i = 1, 2, 3.$$

Dalla proprietà di gruppo di $SO(3)$ segue che $\sim$ è propriamente una relazione di equivalenza, e l'insieme delle terne cartesiane si ripartisce in due classi, invarianti sotto l'azione di $SO(3)$, di opposti orientamenti: la classe E_+ delle terne con lo stesso orientamento della terna canonica, e la classe E_-. La prima è in corrispondenza biunivoca con $SO(3)$, la seconda con $O(3)$, $\det O = -1$.
Proposizione: Se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono vettori ortonormali, la terna cartesiana $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}\}$ é in E_+.
Dim.: posto per brevità $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$, la terna cartesiana $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ è in E_+ se è ottenuta dalla base canonica mediante una rotazione o, in altri termini, se

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 1$$

Per la (1.6a) il determinante coincide con $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = |\underline{a} \times \underline{b}|^2 = 1.\bullet$
Come corollari seguono: 1) $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\} \in E_+ \quad \Rightarrow \underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$, 2) per ogni terna cartesiana in E_+:

$$\underline{e}'_i \times \underline{e}'_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \underline{e}'_k \tag{1.9}$$

Per la (1.9) l'operazione di prodotto vettore ha un carattere indipendente dalla base cartesiana scelta. Conseguentemente si scrive, per una generica coppia di vettori:

$$R\underline{a} \times R\underline{b} = R(\underline{a} \times \underline{b}) \tag{1.10}$$

Nel seguito ci preoccuperemo di studiare in dettaglio le rotazioni, riprendendo più avanti la discussione della trasformazione di parità.
Sono note diverse parametrizzazioni delle rotazioni in 3 dimensioni. Un importante esempio consegue dal fatto che le colonne della matrice R sono le componenti dei vettori della base $\{R\underline{e}_i\}$ rispetto alla base canonica $\{\underline{e}_i\}$. L'orientamento della terna cartesiana $\{R\underline{e}_i\}$ rispetto alla terna canonica può essere individuato mediante i tre angoli di Eulero. Una seconda naturale parametrizzazione consiste nel descrivere la rotazione mediante l'individuazione dell'asse invariante e di un angolo; in questo caso i parametri discendono dallo studio dell'equazione agli autovalori. Essa conduce direttamente alla rappresentazione esponenziale di una matrice di rotazione, dove l'esponente è dato da una matrice antisimmetrica. Questa rappresentazione ha un significato rilevante nella teoria delle rappresentazioni, a cui siamo principalmente interessati.
Una terza parametrizzazione fa uso di parametri complessi (Cayley-Klein): di essa parleremo mostrando la fondamentale relazione di $SO(3)$ col gruppo di matrici complesse $SU(2)$.
Iniziamo pertanto con lo studio della parametrizzazione mediante un versore, che individua l'asse, e un angolo. La connessione con i tre angoli di Eulero sarà considerata nel percorso.

Asse invariante e angolo di rotazione.

L'equazione $R\underline{z} = \lambda\underline{z}$ in C^3 ha soluzioni non banali in corrispondenza delle radici dell'equazione caratteristica, di terzo grado, di cui si omette, perchè irrilevante per la discussione, un coefficiente:

$$\det(\lambda I - R) = \lambda^3 - \lambda^2(\mathrm{Tr}R) + \lambda C - 1 = 0 \tag{1.11}$$

Essa implica $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{Tr}R$ e $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.
Lo studio del polinomio cubico mostra che l'equazione (1.11) ha certamente una soluzione λ_3 reale e positiva, a cui corrisponde un autovettore reale $\underline{n}$, che scelgo di modulo unitario. Poiché R è ortogonale, deve necessariamente essere $\lambda_3 = 1$. Infatti, per l'equazione agli autovalori si ha $|R\underline{n}|^2 = \lambda_3^2|\underline{n}|^2$, ma $|R\underline{n}| = |\underline{n}|$ e $\lambda_3 > 0$, pertanto $\lambda_3 = 1$. L'autovettore $\underline{n}$ viene perciò lasciato invariante dalla rotazione, ed è il versore che individua l'asse di rotazione

$$R\underline{n} = \underline{n} \tag{1.12}$$

Tralasciando il caso in cui le rimanenti radici siano nuovamente reali e di modulo 1, corrispondenti alle rotazioni con matrici diagonali (la matrice identità e le tre matrici che descrivono doppie riflessioni di assi), esaminiamo il caso generico di radici complesse coniugate, con il vincolo $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Poniamo pertanto $\lambda_1 = e^{i\alpha}$, con $0 \le \alpha \le \pi$, e $\lambda_2 = e^{-i\alpha}$. La fase α, ristretta all'intervallo $[0, \pi]$ è determinata senza ambiguità dalla relazione

$$\mathrm{Tr}R = 1 + 2\cos\alpha \tag{1.13}$$

L'equazione $R\underline{z} = e^{i\alpha}\underline{z}$ ha ora soluzione in C^3: $\underline{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{a} - i\underline{b})$, dove $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono vettori reali e, per comodità, si è introdotto il fattore numerico $\sqrt{2}$. Prendendo il complesso coniugato si ottiene l'equazione $R\underline{z}^* = e^{-i\alpha}\underline{z}^*$. Separando parte reale e immaginaria:

$$R\underline{a} = \underline{a}\cos\alpha + \underline{b}\sin\alpha \tag{1.14a}$$

$$R\underline{b} = -\underline{a}\sin\alpha + \underline{b}\cos\alpha \tag{1.14b}$$

Proposizione: $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{n}\}$ è una base cartesiana.
Dim.: Nelle identità $R\underline{a}\cdot R\underline{a} = |\underline{a}|^2$ e $R\underline{a}\cdot R\underline{b} = \underline{a}\cdot\underline{b}$ si sostituiscono le espressioni (1.14a) e (1.14b) per $R\underline{a}$ e $R\underline{b}$. Si perviene al sistema

$$(|\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2)\sin\alpha - 2(\underline{a}\cdot\underline{b})\cos\alpha = 0$$
$$(|\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2)\cos\alpha + 2(\underline{a}\cdot\underline{b})\sin\alpha = 0$$

che implica $|\underline{a}| = |\underline{b}|$ e $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$. Si conviene di scegliere i due vettori normalizzati. Allo stesso modo si procede con le identità $R\underline{a}\cdot R\underline{n} = \underline{a}\cdot\underline{n}$ e $R\underline{b}\cdot R\underline{n} = \underline{b}\cdot\underline{n}$, ottenendo $\underline{a}\cdot\underline{n} = 0$ e $\underline{b}\cdot\underline{n} = 0$. •

Per la scelta $|\underline{a}| = |\underline{b}| = 1$, i vettori $\underline{z}$ e $\underline{z}^*$ hanno norma unitaria in C^3. Le relazioni (1.14) descrivono una rotazione di angolo α dei vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ nel piano ortogonale a $\underline{n}$.
Notiamo che mentre nel caso di autovalore reale il corrispondente autovettore normalizzato è determinato a meno di un fattore ±1, nel caso di autovalore complesso l'autovettore è determinato a meno di un fattore di fase, corrispondente ad una rotazione della coppia $\underline{a}$ e $\underline{b}$ nel piano ortogonale a $\underline{n}$. Il versore $\underline{n}$ viene caratterizzato in modo univoco richiedendo che la terna cartesiana $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{n}\}$ abbia lo stesso orientamento della terna canonica:

$$\underline{n} = \underline{a}\times\underline{b} \tag{1.15}$$

Da questa discussione risulta che una rotazione può essere univocamente determinata mediante la specificazione di un versore $\underline{n}$, che individua il piano ortogonale e quindi la coppia

ordinata di vettori ortogonali $\{\underline{a}, \underline{b}\}$, definiti a meno di una rotazione nel piano, e l'angolo di rotazione α in $[0, \pi]$.
E' utile scrivere per esteso l'azione di R su un vettore $\underline{v}$ che può sempre essere scomposto nella base $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{n}\}$, sulla quale l'azione della rotazione è nota:

$$\begin{aligned}
\underline{v} &= (\underline{a} \cdot \underline{v})\underline{a} + (\underline{b} \cdot \underline{v})\underline{b} + (\underline{n} \cdot \underline{v})\underline{n} \\
R\underline{v} &= (\underline{a} \cdot \underline{v})R\underline{a} + (\underline{b} \cdot \underline{v})R\underline{b} + (\underline{n} \cdot \underline{v})R\underline{n} = \\
&= [(\underline{a} \cdot \underline{v})\underline{a} + (\underline{b} \cdot \underline{v})\underline{b}] \cos\alpha + (\underline{n} \cdot \underline{v})\underline{n} + [(\underline{a} \cdot \underline{v})\underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{v})\underline{a}] \sin\alpha = \\
&= \underline{v} \cos\alpha + \underline{n}(\underline{n} \cdot \underline{v})(1 - \cos\alpha) + (\underline{n} \times \underline{v}) \sin\alpha
\end{aligned} \tag{1.16}$$

dove si è usata la relazione $(\underline{a} \cdot \underline{v})\underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{v})\underline{a} = (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{v} = \underline{n} \times \underline{v}$.
L' equazione (1.16) fornisce la rappresentazione degli elementi di matrice di $R(\underline{n}, \alpha)$, secondo le convenzioni stabilite:

$$R(\underline{n}, \alpha)_{ij} = \delta_{ij} \cos\alpha + n_i n_j (1 - \cos\alpha) - \sum_k \epsilon_{ijk} n_k \sin\alpha \tag{1.17}$$

Si noti che la matrice R è scritta in modo esplicito come somma di due matrici, rispettivamente simmetrica e antisimmetrica; quest'ultima permette di leggere direttamente le componenti del versore $\underline{n}$, avendo già determinato l'angolo di rotazione α mediante la (1.13):

$$n_1 = \frac{R_{32} - R_{23}}{2 \sin\alpha}, \qquad n_2 = \frac{R_{13} - R_{31}}{2 \sin\alpha}, \qquad n_3 = \frac{R_{21} - R_{12}}{2 \sin\alpha}, \tag{1.18}$$

Altre evidenti proprietà sono: $R(\underline{n}, 0) = I$, la matrice inversa di R (coincidente con la trasposta) è $R(\underline{n}, \alpha)^{-1} = R(-\underline{n}, \alpha)$. E' comodo estendere il range dell'angolo α all'intero angolo giro attraverso la definizione

$$R(\underline{n}, -\alpha) = R(-\underline{n}, \alpha) \tag{1.19}$$

Le rotazioni con asse individuato rispettivamente dai versori canonici $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ e $\underline{e}_3$ formano tre sottogruppi nel parametro angolare α:

$$R_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad R_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Forma esponenziale di una rotazione

Noti gli autovalori e gli autovettori di una matrice di rotazione, si scrive la fattorizzazione

$$R(\underline{n}, \alpha) = U \Lambda U^{-1} \tag{1.21}$$

dove U e Λ sono rispettivamente la matrice degli autovettori normalizzati e la matrice diagonale degli autovalori di R:

$$U = \begin{pmatrix} z_1 & z_1^* & n_1 \\ z_2 & z_2^* & n_2 \\ z_3 & z_3^* & n_3 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & & \\ & e^{-i\alpha} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice U a sua volta si fattorizza nel prodotto

$$U = \tilde{R}V = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & n_2 \\ a_3 & b_3 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

in cui $\tilde{R}$ è la matrice di rotazione che porta la base canonica nella terna cartesiana $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{n}\}$, e V è una matrice complessa unitaria costante. Ne segue che anche U è unitaria e $U^{-1} = U^\dagger$. In luogo della (1.21), si può scrivere $R(\underline{n}, \alpha) = \tilde{R}(V\Lambda V^\dagger)\tilde{R}^t$; si calcola esplicitamente il prodotto in parentesi ottenendo $R_3(\alpha)$. In conclusione si ottiene la relazione

$$R(\underline{n}, \alpha) = \tilde{R}R_3(\alpha)\tilde{R}^t \tag{1.23}$$

la cui interpretazione è trasparente: mediante cambiamenti di base, alla rotazione R corrisponde una rotazione di angolo α attorno all'asse $\underline{e}_3$. La relazione (1.23) ci sará utile per la parametrizzazione di R mediante gli angoli di Eulero. Una immediata e importante conseguenza è la seguente: al variare dell'angolo α in $[0, 2\pi)$ e mantenendo invariato il versore $\underline{n}$ (e quindi la matrice $\tilde{R}$), le matrici $R(\underline{n}, \alpha)$ formano un sottogruppo Abeliano nel parametro α:

$$R(\underline{n}, \alpha_1)R(\underline{n}, \alpha_2) = R(\underline{n}, \alpha_1 + \alpha_2) \tag{1.24}$$

I sottogruppi a un parametro sono strettamente collegati alla possibilità di fornire una rappresentazione esponenziale degli elementi del gruppo. Nel caso che stiamo trattando, la rappresentazione esponenziale consegue in modo diretto dalla fattorizzazione spettrale (1.21) e dal fatto che la matrice diagonale degli autovalori Λ è l'esponenziale della matrice diagonale αD:

$$\Lambda = e^{\alpha D}, \quad D = \begin{pmatrix} i & & \\ & -i & \\ & & 0 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

Utilizzando una proprietà generale delle matrici si ottiene il risultato cercato:

$$R(\underline{n}, \alpha) = Ue^{\alpha D}U^\dagger = e^{\alpha UDU^\dagger} = e^{\alpha A(\underline{n})} \tag{1.26}$$

La matrice $A(\underline{n}) = UDU^\dagger = \tilde{R}VDV^\dagger\tilde{R}^t$ viene esplicitamente calcolata, usando anche la relazione $\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b}$, ed è antisimmetrica:

$$A(\underline{n}) = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{n} \cdot \underline{A} \tag{1.27}$$

dove $\underline{A}$ è il vettore di matrici antisimmetriche

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

Si osserva che l'angolo di rotazione e il versore che individua l'asse si combinano a formare un unico vettore, per cui concludiamo che una generica rotazione risulta dall'esponenziale di una generica matrice antisimmetrica:

$$R(\underline{\omega}) = e^{\underline{\omega}\cdot\underline{A}}, \qquad \underline{\omega} = \alpha\underline{n} \tag{1.29}$$

Si è già affermato che le rotazioni con stesso asse invariante $\underline{n}$ formano un sottogruppo nel parametro angolare α. Dato che la dipendenza nei parametri è analitica, al primo ordine si scrive lo sviluppo

$$R(\delta\alpha\underline{n}) = I + \delta\alpha(\underline{n}\cdot\underline{A}) + \mathcal{O}(\delta\alpha^2) \tag{1.30}$$

Componendo nella (1.24) una rotazione finita con una infinitesima si scrive:

$$R(\underline{n},\alpha)\{I + \delta\alpha(\underline{n}\cdot\underline{A}) + \ldots\} = R(\underline{n},\alpha+\delta\alpha)$$

da cui conseguono due interessanti risultati. In primo luogo si osserva che si ottiene lo stesso prodotto se la rotazione infinitesima e quella finita vengono scambiate: ció comporta la proprietà che la matrice $(\underline{n}\cdot\underline{A})$, il **generatore** del sottogruppo, commuta con tutte le rotazioni di asse $\underline{n}$:

$$[R(\underline{n},\alpha), \underline{n}\cdot\underline{A}] = 0 \tag{1.31}$$

In secondo luogo, nel limite $\delta\alpha \to 0$ si perviene all'equazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}R(\underline{n},\alpha) = (\underline{n}\cdot\underline{A})R(\underline{n},\alpha) \tag{1.32}$$

la cui soluzione, con la condizione iniziale $R(\underline{n},0) = I$ e non sussistendo problemi di ordinamento, è la matrice (1.26). Le tre matrici A_i sono i generatori dei tre sottogruppi (1.20) di matrici $R_i(\alpha)$ che descrivono le rotazioni attorno ai tre vettori della base canonica.

<u>L'Algebra di Lie $so(3)$</u>

Nel precedente paragrafo si è pervenuti all'importante risultato che ogni matrice di rotazione è rappresentabile mediante l'esponenziale di una matrice antisimmetrica. Le matrici reali antisimmetriche di dimensione 3 formano uno spazio lineare di dimensione 3, in cui le tre matrici A_i (1.28) formano una base:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{a}\cdot\underline{A}$$

Tale spazio lineare è dotato di una ulteriore proprietà, collegata alla rappresentazione esponenziale delle matrici di rotazione. Dato che le rotazioni formano un gruppo, esiste una corrispondenza che a ogni coppia di matrici antisimmetriche A e A' associa una terza matrice antisimmetrica A'' attraverso la relazione $\exp(A)\exp(A') = \exp(A'')$. La matrice A'' è valutata attraverso la formula BCH, come combinazione lineare di A, A' e commutatori:

$$A'' = A + A' + \frac{1}{2}[A, A'] + \frac{1}{12}\left([A, [A, A']] + [A', [A', A]]\right) + \dots$$

Si verifica che lo spazio delle matrici antisimmetriche è chiuso rispetto all'operazione di commutazione $[A, B] = AB - BA$:

$$A = -A^t,\ B = -B^t \quad \rightarrow \quad [A, B]^t = -[A, B] \tag{1.33}$$

L'operazione di commutazione definisce un **prodotto di Lie** nello spazio delle matrici antisimmetriche, che in tal modo costituisce l'**algebra di Lie** $so(3)$. Abbiamo esplicitamente mostrato la corrispondenza

$$\exp\,:\, so(3) \rightarrow SO(3) \tag{1.34}$$

In particolare, l'intorno della matrice nulla corrisponde alla matrice identità, le matrici con versore fisso $\alpha(\underline{n} \cdot \underline{A})$ corrispondono ai sottogruppi abeliani di matrici di rotazione con asse $\underline{n}$.

Il prodotto di Lie di due elementi della base è una matrice antisimmetrica $[A_i, A_j]$, che può essere sviluppata nella base stessa, con coefficienti noti come "costanti di struttura" dell'algebra $so(3)$. Essi possono essere ottenuti direttamente a partire dalle espressioni esplicite delle matrici; risulta:

$$[A_i, A_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} A_k \tag{1.35}$$

I numeri ϵ_{ijk} sono le **costanti di struttura dell'algebra** $so(3)$, e sono caratteristici del gruppo delle rotazioni in tre dimensioni. Una semplice consequenza algebrica è la formula $[\underline{a}_1 \cdot \underline{A}, \underline{a}_2 \cdot \underline{A}] = (\underline{a}_1 \times \underline{a}_2) \cdot \underline{A}$.

<u>Prodotto di rotazioni</u>

Si pone il problema di determinare come i parametri si compongono quando due matrici di rotazione vengono moltiplicate.

A parte la semplice situazione di rotazioni attorno a uno stesso asse, in cui gli angoli si sommano, la risposta al problema è complicata. Il parametro più facilmente accessibile è l'angolo di rotazione, ottenuto dalla formula $1 + 2\cos\alpha'' = \mathrm{Tr}(R'R)$. Inserendo le espressioni esplicite (1.17) si ottiene, con un po' di pazienza:

$$\cos\frac{\alpha''}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha'}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha'}{2}(\underline{n} \cdot \underline{n}') \tag{1.36}$$

Piu' avanti studieremo una più semplice risposta al problema, rappresentando le matrici di $SO(3)$ in matrici complesse unitarie, formanti il gruppo $SU(2)$. Dimostriamo una relazione di grande utilità. Proposizione: Siano S e $R(\underline{n}, \alpha)$ due matrici di rotazione, vale l'identità:

$$SR(\alpha\underline{n})S^t = R(\alpha S\underline{n}) \tag{1.37}$$

Dim.: per la rappresentazione spettrale (1.23) $SR(\alpha \underline{n})S^t = (S\tilde{R})R_3(\alpha)(S\tilde{R})^t$. Le colonne di $\tilde{R}$ sono la base $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{n}\}$, pertanto le colonne della matrice di rotazione $S\tilde{R}$ sono la base data dai vettori $\{S\underline{a}, S\underline{b}, S\underline{n}\}$, che ha lo stesso orientamento della base canonica. Pertanto $SR(\underline{n}, \alpha)S^t$ descrive una rotazione di angolo α con versore $S\underline{n}$.•
L'equazione (1.37) comporta che due rotazioni commutano se e solo se hanno lo stesso asse di rotazione.

<u>Lo spazio dei parametri</u> (*)
Si è visto che una rotazione è individuata attraverso un vettore $\underline{n}\alpha$ in R^3 di direzione arbitraria e modulo $|\alpha| \leq \pi$. La rotazione inversa corrisponde al vettore opposto $-\underline{n}\alpha$. Osserviamo però che le rotazioni di vettori $\pm\pi\underline{n}$ coincidono. Gli elementi del gruppo SO(3) sono pertanto in corrispondenza biunivoca con i punti della sfera in R^3 di raggio π, con la condizione che i punti antipodali sulla superficie si identifichino. In particolare il centro della sfera corrisponde all'identità del gruppo, e i diametri, aventi la topologia della circonferenza, corrispondono ai sottogruppi abeliani delle rotazioni con stesso asse. La condizione di identificare gli estremi dei diametri comporta che due punti distinti della sfera possono essere tra loro connessi mediante due classi di cammini topologicamente distinti. Alla prima classe appartiene il segmento che li unisce e tutte le sue deformazioni continue, alla seconda classe tutti i cammini che, partendo da un punto raggiungono la sfera e, dal punto agli antipodi raggiungono il secondo punto. Queste proprietà, che non dipendono dalla particolare parametrizzazione, caratterizzano SO(3) come gruppo *compatto duplicemente connesso.*

<u>Gli angoli di Eulero</u> (*)
Ci si propone di stabilire la connessione tra la parametrizzazione mediante un angolo e un versore invariante, mediante la quale si è pervenuti alla rappresentazione esponenziale, e la parametrizzazione con angoli di Eulero.
La fattorizzazione spettrale (1.23) di una rotazione attorno ad un versore $\underline{n}$ permette facilmente di rappresentare la rotazione nel prodotto di rotazioni attorno agli assi canonici. Si ricorda che i versori $\underline{a}$ e $\underline{b}$, sono determinati a meno di una rotazione del piano ortogonale a $\underline{n}$. E' pertanto possibile considerare il versore $\underline{a}$ contenuto nel piano 1-2: $a_3 = 0$. Le configurazioni della terna $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{n}\}$ che soddisfano questa condizione sono due, collegate da una rotazione di angolo π attorno a $\underline{n}$.
Ponendo $a_3 = 0$ nella relazione $\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b}$ si ottengono $a_1 = -n_2/b_3$ e $a_2 = n_1/b_3$. La relazione $\underline{b} = \underline{n} \times \underline{a}$ fornisce $b_1 = -a_2 n_3$ e $b_2 = a_1 n_3$ insieme alla condizione di normalizzazione $b_3^2 = 1 - n_3^2$ che da' adito alla doppia configurazione. Con questi risultati si ha:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} -n_2/b_3 & -n_1 n_3/b_3 & n_1 \\ n_1/b_3 & -n_2 n_3/b_3 & n_2 \\ 0 & b_3 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_2/b_3 & -n_1/b_3 & 0 \\ n_1/b_3 & -n_2/b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_3 & -b_3 \\ 0 & b_3 & n_3 \end{pmatrix}$$

La rotazione $\tilde{R}$ si fattorizza in due rotazioni, rispettivamente attorno all'asse 3 e all'asse 1. Parametrizzando il versore $\underline{n}$ con gli angoli sferici θ e ϕ:

$$n_1 = \sin\theta\cos\phi\,, \quad n_2 = \sin\theta\sin\phi\,, \quad n_3 = \cos\theta \tag{1.38}$$

si ottiene, optando per il segno positivo di $b_3 = \sqrt{1-n_3^2} = \sin\theta$:

$$\tilde{R} = R_3(\phi + \frac{\pi}{2})R_1(\theta) \tag{1.39}$$

Inserendo il risultato nella rappresentazione (1.23), si conclude:

$$R(\underline{n}\alpha) = R_3(\phi + \frac{\pi}{2})R_1(\theta)R_3(\alpha)R_1(\theta)^t R_3(\phi + \frac{\pi}{2})^t \tag{1.40}$$

Il pregio di questa relazione è quello di rappresentare una generica rotazione nel prodotto di rotazioni attorno agli assi cartesiani, ciascuna dipendente da uno solo dei parametri (θ, ϕ, α) della rotazione. Il numero dei fattori può essere ridotto utilizzando la seguente relazione, dimostrabile in modo diretto:

$$R_1(\theta)R_3(\alpha)R_1(\theta)^t = R_3(\beta - \pi/2)R_1(\gamma)R_3(\beta + \pi/2) \tag{1.41a}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\theta\sin\frac{\alpha}{2}\,, \quad \sin\beta = \cos\theta\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\gamma/2)}\,, \quad \cos\beta = \frac{\cos(\alpha/2)}{\cos(\gamma/2)} \tag{1.41b}$$

Con ciò si ottiene la fattorizzazione in tre rotazioni, con angoli di Eulero $\epsilon_1 = \beta + \phi$, $\epsilon_2 = \gamma$ e $\epsilon_3 = \beta - \phi$,

$$R = R_3(\epsilon_1)R_1(\epsilon_2)R_3(\epsilon_3) \tag{1.42}$$

Il significato geometrico degli angoli di Eulero è evidente se si applica la rotazione nella forma (1.42) alla terna canonica. Il versore $R\underline{e}_3$ forma un angolo ϵ_2 col versore $\underline{e}_3$. Il piano a esso ortogonale interseca il piano $1-2$ nella linea dei nodi, che forma un angolo ϵ_1 con il versore $\underline{e}_1$. Infine, il versore $R\underline{e}_1$ forma un angolo ϵ_3 con la linea dei nodi.

Esercizio 1.1

Grazie alla disuguaglianza di Schwarz, si introduce l'angolo θ tra due vettori attraverso la definizione $|\underline{a}\cdot\underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta$. Mostrare che $|\underline{a}\times\underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}||\sin\theta|$.

Esercizio 1.2

Dimostrare le proprietà:

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{b}\cdot\underline{d}) - (\underline{a}\cdot\underline{d})(\underline{b}\cdot\underline{c})$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c} = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\cdot\underline{c})\underline{a}$$

Esercizio 1.3

Dimostrare le proprietà del prodotto vettore

$$\underline{a}\times\underline{a} = 0, \quad (\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c} + (\underline{c}\times\underline{a})\times\underline{b} + (\underline{b}\times\underline{c})\times\underline{a} = 0$$

Esse, unite alla bilinearità, qualificano il prodotto vettore come un prodotto di Lie su R^3.

Esercizio 1.4
A ogni vettore $\underline{a}$ si associa una matrice antisimmetrica $A(\underline{a})$ di ordine 3 e componenti $A_{ij} = \sum_k \epsilon_{ijk} a_k$. La mappa è invertibile. Mostrare che $[A(\underline{a}), A(\underline{b})] = A(\underline{a} \times \underline{b})$.

Esercizio 1.5
Assegnati i tre angoli di Eulero di una rotazione, determinare il valore dell'angolo di rotazione e la direzione del versore invariante.
R.: utilizzando le formule della teoria si ottengono: $\phi = (\epsilon_1 - \epsilon_3)/2$, $\beta = (\epsilon_1 + \epsilon_3)/2$ e $\gamma = \epsilon_2$. L'angolo di rotazione α è ottenuto dalla formula

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\beta\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2}\cos\frac{\epsilon_2}{2}$$

Le componenti del versore invariante sono:

$$n_1 = \sin\frac{\epsilon_2}{2}\cos\frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2}\mathrm{cosec}\frac{\alpha}{2}, \quad n_2 = \sin\frac{\epsilon_2}{2}\sin\frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2}\mathrm{cosec}\frac{\alpha}{2}$$

$$n_3 = \cos\frac{\epsilon_2}{2}\sin\frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2}\mathrm{cosec}\frac{\alpha}{2}$$

Esercizio 1.6
A partire dalla rappresentazione esponenziale di una rotazione ottenere l'espressione esplicita degli elementi di matrice di R.
R.: Per il teorema di Cayley Hamilton, secondo il quale le potenze di una matrice di ordine 3 sono esprimibili come combinazioni lineari della matrice stessa, del suo quadrato e dell'identità, scriviamo lo sviluppo

$$e^{\alpha(\underline{n}\cdot\underline{A})} = p_1 I + p_2\alpha(\underline{n}\cdot\underline{A}) + p_3\alpha^2(\underline{n}\cdot\underline{A})^2$$

Gli autovalori della matrice $(\underline{n}\cdot\underline{A})$ sono 0 e $\pm i$, con autovettori $\underline{n}$, $\underline{z}$ e $\underline{z}^*$. Applicando le due espressioni matriciali agli autovettori si ottengono le uguaglianze

$$1 = p_1 \quad , \quad e^{\pm i\alpha} = p_1 \pm i p_2\alpha - p_3\alpha^2$$

che risolte, e introdotte nello sviluppo, forniscono:

$$e^{\alpha\,\underline{n}\cdot\underline{A}} = I + \sin\alpha(\underline{n}\cdot\underline{A}) + (1 - \cos\alpha)(\underline{n}\cdot\underline{A})^2$$

Utilizzando l'esplicita rappresentazione della matrice $(\underline{n}\cdot\underline{A})$ e la normalizzazione $|\underline{n}| = 1$, si calcola

$$(\underline{n}\cdot\underline{A})^2 = \begin{pmatrix} n_1^2 - 1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - 1 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Ponendo queste matrici nello sviluppo si ottiene l'espressione esplicita della matrice $R(\underline{n}\alpha)$.

Esercizio 1.7

Determinare la rappresentazione esponenziale della matrice di rotazione

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R.: l'angolo di rotazione è determinato dalla formula $\cos\alpha = (1/2)(\mathrm{Tr}R - 1) = -1/2$, pertanto $\alpha = 2\pi/3$. Per determinare il versore invariante, con il corretto verso, si isola la parte antisimmetrica della matrice di rotazione:

$$A = \frac{1}{2}(R - R^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ricordando l'espressione degli elementi di matrice $A_{12} = -n_3 \sin\alpha$, $A_{23} = -n_1 \sin\alpha$, $A_{31} = -n_2 \sin\alpha$. si ottiene: $n_1 = n_2 = n_3 = -1/\sqrt{3}$. L'espressione esponenziale cercata è pertanto:

$$R = e^{-(2\sqrt{3}\pi/9)(A_1+A_2+A_3)}$$

Esercizio 1.8

Posto $R = e^A$, dove A è una matrice reale antisimmetrica $n \times n$, mostrare che R è una matrice in $SO(n)$.

R.: La condizione di ortogonalità $R^t = R^{-1}$ è subito verificata, osservando che, in generale, $(e^M)^t = e^{(M^t)}$ e $(e^M)^{-1} = e^{-M}$. Inoltre, usando $\det e^M = e^{\mathrm{Tr}M}$ si ottiene $\det R = 1$.

Una rotazione in n dimensioni è descritta da $n(n-1)/2$ parametri.

Esercizio 1.9

Mostrare che una rotazione in $2n+1$ dimensioni ammette sempre un vettore invariante.

R.: Mostriamo che la matrice R ha un autovalore unitario.

$\det(1 - R) = \det(1 - R^t) = \det R^t \det(R - 1) = \det(R - 1)$. Se la dimensione delle matrici è dispari, il determinante è nullo.

Esercizio 1.10

L'insieme $so(3)$ è invariante per trasformazioni $t_R : A \to RAR^t$, dove R è una matrice di rotazione. Tali trasformazioni costituiscono la **rappresentazione aggiunta** $SO(3)^{ad}$ del gruppo delle rotazioni. Si mostra infatti che t_I è la trasformazione identica, e $t_{RS} = t_R t_S$. Introdotta la parametrizzazione $A(\underline{a}) = \underline{a} \cdot \underline{A}$, dove $\underline{A}$ è la base di matrici antisimmetriche, dimostrare che $t_R A(\underline{a}) = A(R\underline{a})$.

Esercizio 1.11

Dato un triangolo sferico di vertici A,B,C con lati opposti di lunghezze (in radianti) a, b, c, e angolo α nel vertice A, dimostrare la formula di Eulero:

$$\cos a = \cos b \,\cos c + \sin b \,\sin c \,\cos\alpha$$

R.: Si introduca una base cartesiana con origine nel centro della sfera, tale che A sia nel punto di coordinate angolari sferiche $\theta_A = 0$, il punto B abbia coordinate $\theta_B = b$, $\phi_B = \alpha$ e C abbia coordinate $\theta_C = c$, $\phi_C = 0$. I vertici B e C individuano due versori $\underline{n}_B = \{\sin b \cos \alpha, \sin b \sin \alpha, \cos b\}$ e $\underline{n}_C = \{\sin c, 0, \cos c\}$ e si ha: $\cos a = \underline{n}_B \cdot \underline{n}_C$, da cui segue immediatamente la formula.

§2. IL GRUPPO SU(2)

Nello spazio lineare C^2, costituito dai vettori colonna a due componenti complesse

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad v_i \in C$$

si introduce il prodotto interno

$$\langle v|w\rangle = v^\dagger w = v_1^* w_1 + v_2^* w_2 \tag{2.1}$$

Le trasformazioni lineari su C^2 che conservano il prodotto interno sono rappresentate da matrici complesse 2×2 unitarie:

$$U^\dagger U = I \tag{2.2}$$

dove $(U^\dagger)_{ij} = (U_{ji})^*$. La relazione implica $|\det U| = 1$ e inoltre $U^{-1} = U^\dagger$. Le matrici unitarie formano il gruppo $U(2)$, con l'usuale prodotto tra matrici. L'ulteriore richiesta $\det U = 1$ individua il sottogruppo speciale $SU(2)$. Si noti che se U è un elemento del gruppo SU(2), anche $-U$ appartiene al gruppo. E' facile verificare che la piú generale matrice di $SU(2)$ ha la struttura

$$U = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\eta^* & \xi^* \end{pmatrix} \qquad |\xi|^2 + |\eta|^2 = 1 \tag{2.3}$$

dove ξ e η sono numeri complessi. Lo spazio dei parametri si identifica pertanto con la superficie della sfera unitaria in quattro dimensioni. Per i nostri scopi è più utile una parametrizzazione mediante un numero reale a_0 e un vettore $\underline{a}$ in R^3:

$$U = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix} \qquad a_0^2 + |\underline{a}|^2 = 1$$

Se per futura convenienza indichiamo con $e^{\pm i\alpha/2}$ i due autovalori della matrice unitaria, la loro somma coincide con la traccia della matrice, perciò $a_0 = \cos(\alpha/2)$. Questa relazione suggerisce di soddisfare il vincolo $a_0^2 + |\underline{a}|^2 = 1$ ponendo $\underline{a} = -\underline{n}\sin(\alpha/2)$, con $|\underline{n}| = 1$. Si perviene alla forma usuale

$$U(\underline{n}, \alpha) = I\cos\frac{\alpha}{2} - i(\underline{n}\cdot\underline{\sigma})\sin\frac{\alpha}{2} \tag{2.4}$$

dove, oltre alla matrice identità, si sono introdotte le tre **matrici di Pauli**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Si verifica esplicitamente la proprietà

$$\sigma_i\sigma_j = I\delta_{ij} + i\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{2.6}$$

da cui discendono:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2I\delta_{ij} \qquad \mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij} \tag{2.7a}$$

$$(\underline{a} \cdot \underline{\sigma})(\underline{b} \cdot \underline{\sigma}) = (\underline{a} \cdot \underline{b})I + i(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{\sigma} \tag{2.7b}$$

E' semplice calcolare i parametri della matrice prodotto di due matrici unitarie di SU(2). Posto $U(\underline{n}_1, \alpha_1)U(\underline{n}_2, \alpha_2) = U(\underline{n}_3, \alpha_3)$, si hanno le relazioni

$$\cos\frac{\alpha_3}{2} = \cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}(\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2) \tag{2.8a}$$

$$\underline{n}_3 \sin\frac{\alpha_3}{2} = \underline{n}_1 \sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} + \underline{n}_2 \cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2} + (\underline{n}_1 \times \underline{n}_2)\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2} \tag{2.8b}$$

In particolare, si nota che le matrici unitarie con stesso versore $\underline{n}$ formano un sottogruppo abeliano di SU(2), con la semplice legge di composizione

$$U(\underline{n}, \alpha_1)U(\underline{n}, \alpha_2) = U(\underline{n}, \alpha_1 + \alpha_2) \tag{2.9}$$

Considerando un parametro angolare infinitesimo e introducendo lo sviluppo nell'intorno dell'identitá, $U(\underline{n}, \delta\alpha) = I - i\frac{1}{2}\delta\alpha(\underline{n} \cdot \underline{\sigma})$, si perviene all'equazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}U(\underline{n}, \alpha) = -\frac{i}{2}(\underline{n} \cdot \underline{\sigma})U(\underline{n}, \alpha) \qquad U(\underline{n}, 0) = I \tag{2.10}$$

Poiché non vi sono problemi di ordinamento, in quanto la (2.9) comporta $[U(\underline{n}, \alpha), (\underline{n}\cdot\underline{\sigma})] = 0$, l'integrazione è immediata e fornisce la forma esponenziale delle matrici di SU(2) :

$$U(\underline{n}\alpha) = e^{-i\frac{1}{2}\alpha(\underline{n}\cdot\underline{\sigma})} \tag{2.11}$$

L'equivalenza delle espressioni (2.11) e (2.4), puó essere esplicitamente verificata usando la proprietá $(\underline{n}\cdot\underline{\sigma})^{2k} = I$. La matrice Hermitiana $\frac{1}{2}(\underline{n}\cdot\underline{\sigma})$, avente traccia nulla, è il generatore del sottogruppo delle matrici $U(\underline{n}, \alpha)$ con versore $\underline{n}$ fisso, e parametro α.
Si noti che, come per le rotazioni, i parametri $\underline{n}$ e α concorrono a formare un vettore $\underline{n}\alpha$. Se $\underline{n}$ è libero di assumere tutte le direzioni, l'angolo α viene preso nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Si osservi che $U(\pm 2\pi\underline{n}) = -I$; lo spazio dei parametri $\alpha\underline{n}$ è la sfera in tre dimensioni di raggio 2π, con la condizione di identificare tutti i punti della superficie nell'unico elemento $-I$. Il gruppo $SU(2)$ risulta pertanto *compatto e semplicemente connesso.*

<u>L'algebra di Lie $su(2)$</u>

L'insieme delle matrici Hermitiane a traccia nulla costituisce uno spazio lineare reale a tre dimensioni. Ogni matrice è combinazione lineare con coefficienti reali delle tre matrici sigma di Pauli: $H(\underline{a}) = \underline{a} \cdot \underline{\sigma}$, e ha autovalori reali $\pm|\underline{a}|$. L'applicazione

$$H_1, H_2 \to -i[H_1, H_2] \tag{2.12}$$

definisce un prodotto di Lie sullo spazio lineare, che viene denominato $su(2)$. Si è mostrato esplicitamente:

$$\exp\,:\,(-i)su(2)\,\rightarrow\,SU(2)$$

Sullo spazio lineare si può anche introdurre il prodotto interno:

$$(H_1,H_2)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(H_1H_2)=(\underline{a}_1\cdot\underline{a}_2) \tag{2.13}$$

per il quale le matrici di Pauli risultano ortogonali. In luogo delle matrici sigma si preferisce introdurre la base di matrici tau

$$\tau_i=\frac{1}{2}\sigma_i \tag{2.14}$$

mediante le quali le costanti di struttura coincidono con quelle dell'algebra di Lie $so(3)$ del gruppo delle rotazioni:

$$-i[\tau_i,\tau_j]=\sum_k\epsilon_{ijk}\tau_k \tag{2.15}$$

La circostanza non é casuale, ma corrisponde al fatto che si puó stabilire una mappa, che conserva il prodotto, che ad ogni trasformazione in $SU(2)$ associa una rotazione in $SO(3)$.

L'omomorfismo di $SU(2)$ su $SO(3)$

Sull'algebra di Lie $su(2)$ si costruisce la **rappresentazione aggiunta** del gruppo SU(2), che indichiamo col simbolo $SU(2)^{ad}$. Essa é costituita dalle trasformazioni lineari U^{ad}, costruite a partire dalle matrici U di $SU(2)$, nel seguente modo:

$$U^{ad}\,:\,su(2)\rightarrow su(2)\quad,\quad U^{ad}(H)\,=\,U^\dagger HU \tag{2.16}$$

Si noti che U e $-U$ portano alla stessa trasformazione aggiunta. La trasformazione conserva il prodotto interno di $su(2)$, quindi è unitaria. Trattandosi di una trasformazione di similarità, gli autovalori di $U^\dagger HU$ coincidono con quelli di H; ponendo $H(\underline{a})=\underline{a}\cdot\underline{\sigma}$ e $U^{ad}(H)=\underline{a}'\cdot\underline{\sigma}$, deve perciò essere $|\underline{a}'|=|\underline{a}|$. Calcoliamo direttamente la relazione tra i vettori $\underline{a}$ e $\underline{a}'$:

$$\begin{aligned}\underline{a}'\cdot\underline{\sigma}=&U(\underline{n}\alpha)^\dagger(\underline{a}\cdot\underline{\sigma})U(\underline{n}\alpha)=\\=&[\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}(\underline{n}\cdot\underline{\sigma})](\underline{a}\cdot\underline{\sigma})[\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}(\underline{n}\cdot\underline{\sigma})]=\\=&\{\underline{a}\cos\alpha+(1-\cos\alpha)(\underline{n}\cdot\underline{a})\underline{n}-(\underline{n}\times\underline{a})\sin\alpha\}\cdot\underline{\sigma}\end{aligned}$$

Perció $\underline{a}'=R^t(\underline{n}\alpha)\underline{a}$ o, equivalentemente:

$$U(\underline{n}\alpha)^\dagger\sigma_iU(\underline{n}\alpha)=\sum_jR(\underline{n}\alpha)_{ij}\sigma_j \tag{2.17}$$

dove $R(\underline{n}\alpha)$ è la matrice di rotazione di angolo α e asse $\underline{n}$. Per la proprietà (2.7a):

$$R_{ij}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(U(\underline{n}\alpha)^\dagger\sigma_iU(\underline{n}\alpha)\sigma_j)$$

Si è stabilita una corrispondenza $SU(2) \rightarrow SU(2)^{ad} \rightarrow SO(3)$ che alla matrice unitaria $U(\underline{n}\alpha)$ in $SU(2)$ fa corrispondere la matrice di rotazione $R(\underline{n}\alpha)$; impiegando le matrici τ_i la formulazione è diretta:

$$U(\underline{n}\alpha) = e^{-i\alpha\underline{n}\cdot\underline{\tau}} \rightarrow R(\underline{n}\alpha) = e^{\alpha\underline{n}\cdot\underline{A}} \tag{2.18}$$

La corrispondenza non è invertibile, in quanto la stessa rotazione è anche immagine di $-U(\underline{n}\alpha)$. Essa conserva il prodotto (è un omomorfismo), nel senso che alla matrice UU' corrisponde la rotazione RR':

$$(UU')^{\dagger}\underline{\sigma}(UU') = (RR')\underline{\sigma} \tag{2.19}$$

Questa circostanza rende la corrispondenza un utile strumento per il calcolo dei parametri del prodotto di due rotazioni, riconducibile alle formule (2.8a,b).

Il gruppo di ricoprimento(*).

L'omomorfismo $SU(2) \rightarrow SO(3)$, che a $\pm U$ fa corrispondere R, è un esempio di un importante teorema di Pontryagin (1966).

Premesso che due gruppi di Lie sono localmente isomorfi se sono isomorfi in un intorno dell'origine dello spazio dei parametri, il teorema afferma che per ogni insieme di gruppi di Lie connessi e localmente isomorfi, esiste un unico gruppo $\tilde{G}$ semplicemente connesso, e tutti gli altri sono immagini omeomorfe di questo. $\tilde{G}$ è il "gruppo di ricoprimento", e il suo spazio di parametri ricopre gli altri un numero intero di volte.

Nel nostro caso il gruppo $SU(2)$, che è semplicemente connesso, è il gruppo di ricoprimento di $SO(3)$, duplicemente connesso. Nella parametrizzazione angolo-versore, una rotazione di angolo 2π corrisponde alla matrice unitaria $-I$.

Le trasformazioni di Möbius (*)

La corrispondenza tra rotazioni e matrici complesse unitarie SU(2) puó essere formulata anche in termini geometrici, associando a queste ultime delle particolari trasformazioni di Möbius del piano complesso. Attraverso la proiezione stereografica tra il piano complesso e la superficie di una sfera, le trasformazioni del piano inducono trasformazioni della sfera, che vedremo trattarsi di rotazioni.

Una trasformazione di Möbius del piano complesso è specificata da quattro parametri complessi che possono essere associati a una matrice M:

$$z' = t_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

La trasformazione è invertibile sul piano complesso esteso $C' = C \cup \{\infty\}$ se $\det M \neq 0$; data la forma della (2.20), si richiede $\det M = 1$. Le trasformazioni di Möbius formano un gruppo, con la notevole proprietà che i parametri si compongono secondo la legge di gruppo delle matrici associate

$$t_P \circ t_Q = t_{PQ} \tag{2.21}$$

Il gruppo di Möbius costituisce pertanto una rappresentazione del gruppo delle matrici complesse invertibili con determinante unitario $SL(2,C)$. Si noti che alle matrici $\pm M$ corrisponde la stessa trasformazione di Möbius.
Le trasformazioni della forma

$$t_U(z) = \frac{\xi z + \eta}{-\eta^* z + \xi^*}, \quad |\xi|^2 + |\eta|^2 = 1, \quad U = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\eta^* & \xi^* \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

formano una rappresentazione del gruppo $SU(2)$. Impiegando la stessa parametrizzazione delle matrici U di $SU(2)$, poniamo

$$\xi = \cos(\frac{\alpha}{2}) - i\, n_3 \sin(\frac{\alpha}{2}) \quad , \quad \eta = -(n_2 + i\, n_1) \sin(\frac{\alpha}{2}) \tag{2.23}$$

Le trasformazioni di Möbius associate a matrici in $SU(2)$ possono essere collegate a rotazioni di una sfera attraverso una mappa del piano complesso esteso su una superficie sferica, nota come **proiezione stereografica**.

In R^3 si costruisce la sfera di raggio unitario, detta "sfera di Riemann", $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$, e si identifica il piano $x_3 = 0$ con il piano complesso $z = x_1 + ix_2$. La retta uscente dal polo (0,0,1) e intersecante la superficie sferica nel punto di coordinate (x_1, x_2, x_3), taglia il piano complesso nel punto

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \tag{2.24}$$

Se si associa al polo il punto all'infinito del piano complesso, la proiezione stereografica è una mappa biunivoca, con inverso

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \quad , \quad x_1 + ix_2 = \frac{2z}{|z|^2 + 1} \tag{2.25}$$

Una costruzione alternativa considera una sfera di raggio 1/2 tangente al piano complesso nell'origine.
Vogliamo mostrare che una trasformazione di Möbius del piano complesso, $z' = t_U(z)$, associata ad una matrice di $SU(2)$, induce una trasformazione della superficie sferica che è una rotazione. Si calcolano facilmente:

$$x_3' = \frac{|z'|^2 - 1}{|z'|^2 + 1} = \xi\eta^*(x_1 + ix_2) + \xi^*\eta(x_1 - ix_2) + (|\xi|^2 - |\eta|^2)x_3 \tag{2.26a}$$

$$x_1' + ix_2' = \frac{2z'}{|z'|^2 + 1} = \xi^2(x_1 + ix_2) - \eta^2(x_1 - ix_2) - 2\xi\eta x_3 \tag{2.26b}$$

Con la parametrizzazione (2.4), si verifica che la trasformazione della sfera è una rotazione di angolo α e asse di direzione $(-n_1, n_2, -n_3)$. Possiamo facilmente verificarlo per una trasformazione di parametro α infinitesimo. Si ottiene:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & n_3 & n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ -n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Tenendo presente che, per coniugazione complessa, $\sigma_1^* = \sigma_1$, $\sigma_2^* = -\sigma_2$ e $\sigma_3^* = \sigma_3$, si stabilisce una corrispondenza di gruppo tra $U^*(n\alpha)$ e $R(n\alpha)$.
La distanza, misurata lungo la corda, tra due punti $\underline{x}$ e $\underline{y}$ della superficie sferica, è invariante per rotazione. Esprimendo $|\underline{x} - \underline{y}|$ mediante un'espressione in cui compaiono le immagini stereografiche z e w di $\underline{x}$ e $\underline{y}$, si ottiene una nozione di distanza nel piano complesso

$$d(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \tag{2.27}$$

che è invariante per le trasformazioni di Möbius considerate.

<u>Esercizio 2.1</u>
Mostrare che una matrice complessa 2×2 che commuta con tutti gli elementi del gruppo SU(2) è necessariamente multipla dell'identità.

<u>Esercizio 2.2</u>
Mostrare che se U è una matrice $N \times N$ unitaria, allora ha autovalori di modulo unitario e autovettori corrispondenti ad autovalori distinti tra loro ortogonali.

<u>Esercizio 2.3</u>
Posto $U = \exp(iH)$, dove U e H sono matrici complesse $N \times N$, mostrare che la caratterizzazione di SU(N)

$$U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1$$

comporta $H^\dagger = H$ e $\mathrm{Tr} H = 0$. Il numero di parametri reali indipendenti che descrivono SU(N) è pertanto $N^2 - 1$.

§3. LE RAPPRESENTAZIONI LINEARI UNITARIE

Premessa

La teoria delle rappresentazioni lineari di un gruppo è lo strumento appropriato per descrivere l'effetto di una trasformazione da un sistema di riferimento inerziale a un altro sulle osservabili fisiche misurate nei due riferimenti.

In termini molto generali e discorsivi, osserviamo che sia la meccanica quantistica che la meccanica classica individuano, per la descrizione di un sistema dinamico fisico relativamente a un riferimento inerziale, un insieme di "osservabili" e un insieme di "stati". Le osservabili specificano il modello del sistema fisico considerato, individuandone le proprietà suscettibili di misura e costituendo un insieme autosufficiente per la costruzione di una teoria predittiva. Alcune osservabili hanno un ruolo più fondamentale, nel senso che le altre ne sono dipendenti, e da sole delimitano l'ambito della teoria. In meccanica classica le osservabili sono funzioni dello spazio delle fasi, in meccanica quantistica sono operatori autoaggiunti su un opportuno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Per specificare il valore assunto da una o più osservabili in un certo istante t, è necessario conoscere lo stato ρ_t. Esso è un funzionale lineare sullo spazio delle osservabili: il numero $\rho_t(f)$ è il valore dell'osservabile f assunto dal sistema al tempo t. Tale valore ha il significato statistico di valore medio, essendo l'osservabile soggetta a una dispersione e a una distribuzione statistica che dipendono dallo stato. In meccanica classica gli stati sono distribuzioni, in meccanica quantistica essi sono ancora degli operatori. Gli stati quantistici possono tuttavia essere costruiti a partire dai vettori di norma uno dello spazio di Hilbert.
L'evoluzione temporale del sistema è specificata attraverso una dinamica nello spazio degli stati: l'equazione di Liouville per gli stati classici, l'equazione di Heisenberg o di Schrödinger per gli stati quantistici; tale aspetto è peró irrilevante per questa discussione.

Sia $\mathcal{G}$ il gruppo di trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali, e $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert i cui elementi di norma unitaria e la cui algebra di operatori lineari autoaggiunti assumono il significato di stati e osservabili, relativamente a un particolare osservatore. Osservatori dello stesso sistema in riferimenti inerziali diversi attibuiscono a priori lo stesso significato fisico di stato e osservabile a elementi in $\mathcal{H}$ e operatori lineari diversi. E' necessaria una teoria che descriva la connessione tra questi enti quando si effettui un cambiamento del riferimento.
Le quantità di interesse fisico sono espresse dalla teoria mediante prodotti interni $|\langle\psi|\hat{F}\phi\rangle|$ che coinvolgono sia elementi normalizzati in $\mathcal{H}$ che operatori associati a osservabili. Una prima possibilità è quella di affermare che tutti gli osservatori hanno in comune l'algebra degli operatori, e nel cambiamento di riferimento siano solo gli elementi di $\mathcal{H}$ a trasformarsi. Nel primo caso, l'azione del gruppo $\mathcal{G}$ sui vettori di $\mathcal{H}$ è descritta da una famiglia di operatori: a ogni trasformazione g nel gruppo corrisponde una trasformazione $\psi \to \psi_g = \hat{U}(g)\psi$ nello spazio di Hilbert. Gli elementi ψ_g e ψ si interpretano come elementi descrittivi dello stesso sistema da parte di due osservatori in riferimenti connessi dalla trasformazione g. L'equivalenza delle descrizioni nei due riferimenti è espressa da:

$$|(\psi_g|\phi_g)| = |(\psi|\phi)| \tag{3.1}$$

E' naturale richiedere che alla trasformazione composta $(g_1 g_2)$ corrisponda un operatore che sia il prodotto delle due azioni del gruppo su $\mathcal{H}$ e che alla trasformazione nulla e

corrisponda un'azione nulla

$$\hat{U}(g_1 g_2) = \hat{U}(g_1)\hat{U}(g_2), \qquad \hat{U}(e) = \hat{I} \tag{3.2}$$

Le due richieste implicano che $\hat{U}(g)$ sia invertibile, e

$$\hat{U}(g^{-1}) = \hat{U}(g)^{-1} \tag{3.3}$$

Un fondamentale **teorema di Wigner** afferma che la rappresentazione dell'azione del gruppo mediante operatori, può effettuarsi mediante operatori lineari unitari

$$\hat{U}(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1\hat{U}\psi_1 + \alpha_2\hat{U}\psi_2, \qquad (\hat{U}\psi_1|\hat{U}\psi_2) = (\psi_1|\psi_2) \tag{3.4}$$

oppure con operatori antilineari e antiunitari

$$\hat{U}(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1^*\hat{U}\psi_1 + \alpha_2^*\hat{U}\psi_2, \qquad (\hat{U}\psi_1|\hat{U}\psi_2) = (\psi_1|\psi_2)^* \tag{3.5}$$

(V.Bargmann: "Note on Wigner's theorem on symmetry operations", J. Math. Phys. 5 (1964) 862.)
Poichè l'identità $\hat{I}$ è evidentemente un operatore unitario, gli elementi g connessi con l'unità e del gruppo mediante un cammino continuo nello spazio dei parametri, sono rappresentati da operatori $\hat{U}(g)$ unitari. Le proprietà (3.2) e quella di unitarietà $\hat{U}(g)\hat{U}^\dagger(g) = \hat{I}$ sono la caratterizzazione matematica della famiglia di operatori unitari $\hat{U}(g)$ come **rappresentazione lineare unitaria** del gruppo (connesso) $\mathcal{G}$. Esse comportano la proprietà $\hat{U}(g^{-1}) = \hat{U}(g)^\dagger$.
Una seconda possibilità è quella di riversare l'effetto del cambiamento di riferimento sui soli operatori lineari, attribuendo lo stesso vettore di stato ai due riferimenti.

La rappresentazione unitaria del gruppo $\mathcal{G}$ sugli elementi dello spazio di Hilbert induce una rappresentazione sullo spazio degli operatori lineari su $\mathcal{H}$. Alla trasformazione g, a cui corrisponde l'operatore unitario $\hat{U}(g)$, si fa corrispondere la trasformazione sul generico operatore lineare $\hat{H} \to \hat{H}_g$ definita dalla relazione, per ogni coppia di elementi ψ, ϕ,

$$\langle\psi|\hat{H}_g\phi\rangle = \langle\psi_g|\hat{H}\phi_g\rangle \tag{3.6}$$

da cui si rileva:

$$\hat{H}_g = \hat{U}(g)^\dagger\hat{H}\hat{U}(g) \tag{3.7}$$

E' facile verificare che l'azione del gruppo $\mathcal{G}$ sugli operatori lineari, descritta dalla relazione (3.7), è una rappresentazione lineare del gruppo.
La relazione (3.6) esprime il fatto che le due rappresentazioni forniscono alternative ed equivalenti descrizioni dell'azione del gruppo $\mathcal{G}$ ai fini della descrizione del sistema fisico da parte di un osservatore inerziale. In un caso l'azione è riversata sugli elementi di $\mathcal{H}$, nell'altro caso sugli operatori.

Per le rappresentazioni unitarie di gruppi di Lie è possibile introdurre un'algebra di generatori dati da operatori autoaggiunti, rappresentativi di osservabili fisiche. Essi si ottengono attraverso lo studio delle rappresentazioni di sottogruppi a un parametro di

$\mathcal{G}$. Anche gli operatori unitari ereditano la proprietà di costituire un sottogruppo a un parametro e, sotto certe ipotesi di continuità, il teorema di Stone garantisce per essi una rappresentazione esponenziale mediante un opportuno generatore. Si riportano, senza dimostrazione i teoremi rilevanti.

Gruppi Unitari a un parametro fortemente continui.

Una famiglia di operatori unitari $\hat{U}(t)$, $t \in \mathrm{R}$, su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, costituisce un **Gruppo Unitario a un parametro** se

$$\hat{U}(t)\hat{U}(s) = \hat{U}(t+s); \tag{3.8}$$

in particolare risulta: $\hat{U}(0) = I$ e $\hat{U}(t)^\dagger = \hat{U}(-t)$. Il gruppo è **fortemente continuo** se inoltre, per ogni $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{t\to 0} \|\hat{U}(t)\psi - \psi\| = 0 \tag{3.9}$$

La proprietà di continuità forte, espressa per l'origine $t = 0$, si estende in modo ovvio ad arbitrari valori t_0: $\|\hat{U}(t)\psi - \hat{U}(t_0)\psi\| = \|\hat{U}(t-t_0)\psi - \psi\| \to 0$ se $t \to t_0$.
Mostriamo che, per i gruppi a un parametro, la proprietà (3.9) di continuità forte è implicata dalla continuità debole. Se per ogni ψ, $\hat{U}(t)\psi$ converge debolmente a ψ per $t \to 0$, vale a dire

$$\lim_{t\to 0} \langle \phi|\hat{U}(t)\psi\rangle = \langle \phi|\psi\rangle \qquad \forall \phi$$

allora $\hat{U}(t)$ è fortemente continuo. Infatti:

$$\|\hat{U}(t)\psi - \psi\|^2 = \|\hat{U}(t)\psi\|^2 - \langle \hat{U}(t)\psi|\psi\rangle - \langle \psi|\hat{U}(t)\psi\rangle + \|\psi\|^2 \to 2\|\psi\|^2 - 2\|\psi\|^2 = 0$$

Il seguente teorema mostra che la continuità forte segue da una ipotesi ancora più debole.

Teorema di Von Neumann: Sia $\hat{U}(t)$ un gruppo unitario a un parametro su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Se, per ogni ϕ, ψ in $\mathcal{H}$, $\langle \phi|\hat{U}(t)\psi\rangle$ è una funzione misurabile del parametro t, allora $\hat{U}(t)$ è fortemente continuo.

La connessione tra il gruppo unitario a un parametro fortemente continuo e il generatore del gruppo, attraverso la mappa esponenziale, è precisata dai seguenti teoremi. Dato un operatore autoaggiunto $\hat{A}$ si costruisce la famiglia di operatori unitari

$$\hat{U}(t) = e^{-it\hat{A}} \tag{3.10}$$

Se l'operatore $\hat{A}$ è limitato, l'esponenziale è costruito mediante la serie esponenziale, convergente in norma; diversamente si deve ricorrere al teorema spettrale. Vale comunque il **Teorema**:

a) $\hat{U}(t)$ è un gruppo unitario fortemente continuo,
b) per $\psi \in \mathcal{D}(\hat{A})$, $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\hat{U}(t)\psi - \psi) = -i\hat{A}\psi$,
c) se esiste $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\hat{U}(t)\psi - \psi)$ allora $\psi \in \mathcal{D}(\hat{A})$.

Il successivo e fondamentale teorema mostra che ogni gruppo unitario fortemente continuo ha una rappresentazione esponenziale mediante un operatore autoaggiunto:

TEOREMA DI STONE: Se $\hat{U}(t)$ è un gruppo unitario a un parametro fortemente continuo, esiste un operatore autoaggiunto $\hat{A}$, detto generatore del gruppo, tale che $\hat{U}(t) = e^{-it\hat{A}}$.
(da M.Reed and B.Simon "Methods of Modern Mathematical Physics", vol.1, Academic Press, 1972).

A commento della teoria esposta, rileviamo che per i gruppi unitari fortemente continui si può scrivere uno sviluppo nell'intorno dell'identità

$$\hat{U}(s) = \hat{I} - is\hat{A} + \mathcal{O}(s^2) \tag{3.11}$$

dove $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, con un dominio denso in $\mathcal{H}$. Sostituendo lo sviluppo nell'identità $\hat{U}(t)\hat{U}(s) = \hat{U}(s)\hat{U}(t)$ si ottiene la proprietà generale che il generatore commuta con gli elementi del gruppo $[\hat{U}(t), \hat{A}] = 0$. Sostituendo lo sviluppo nell'equazione (4) si perviene a $\hat{U}(t+s) - \hat{U}(t) = -is\hat{A}\hat{U}(t) + \mathcal{O}(s^2)$ e, nel limite, all'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = -i\hat{A}\hat{U}(t), \quad \hat{U}(0) = \hat{I} \tag{3.12}$$

la cui soluzione è l'esponenziale (6). Questo schema verrà ripercorso in diverse occasioni.
Proposizione: Un operatore $\hat{B}$ commuta con tutti gli operatori di un gruppo unitario a un parametro fortemente continuo se e solo se commuta col suo generatore:

$$[\hat{B}, \hat{U}(t)] = 0 \quad \forall t \quad \leftrightarrow \quad [\hat{B}, \hat{A}] = 0 \tag{3.13}$$

Dim.: derivando rispetto al parametro l'operatore $\hat{U}(t)^\dagger\hat{B}\hat{U}(t)$ e utilizzando le proprietà del generatore $\hat{A}$, si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}\hat{U}(t)^\dagger\hat{B}\hat{U}(t) = i\hat{U}(t)^\dagger[\hat{A}, \hat{B}]\hat{U}(t) \tag{3.14}$$

Se $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, allora $\hat{U}(t)^\dagger\hat{B}\hat{U}(t)$ non dipende da t e coincide con l'operatore in $t = 0$, fornendo la relazione $[\hat{B}, \hat{U}(t)] = 0$. Viceversa, se $[\hat{U}(t), \hat{B}] = 0$ per ogni t, l'operatore $\hat{U}(t)^\dagger\hat{B}\hat{U}(t)$ coincide con $\hat{B}$ e pertando è indipendente da t e, per l'equazione, $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.

§4. RAPPRESENTAZIONI UNITARIE DELLE ROTO–TRASLAZIONI

Il gruppo delle roto-traslazioni.

Le rotazioni e le traslazioni spaziali formano un gruppo che è contenuto sia nel gruppo di Galilei che nel gruppo di Poincaré. Le loro rappresentazioni unitarie portano alla definizione di grandezze fisiche rilevanti: il momento angolare e la quantità di moto. Esaminiamo la struttura di gruppo delle rototraslazioni spaziali:

$$\underline{x}' = R_1\underline{x} + \underline{a}_1 \qquad R_1 \in SO(3), \quad \underline{a}_1 \in R^3 \tag{4.1}$$

La legge di composizione di due successive trasformazioni

$$\underline{x}'' = R_2\underline{x}' + \underline{a}_2 = R_2R_1\underline{x} + (R_2\underline{a}_1 + \underline{a}_2)$$

suggerisce di identificare le rototraslazioni con coppie $(R, \underline{a})$, con la seguente definizione di prodotto:

$$(R_2, \underline{a}_2)(R_1, \underline{a}_1) = (R_2R_1, R_2\underline{a}_1 + \underline{a}_2) \tag{4.2}$$

L'identità del gruppo è $(I, \underline{0})$, e l'inverso dell'elemento $(R, \underline{a})$ è $(R^t, -R^t\underline{a})$. Le pure rotazioni $(R, \underline{0})$ e le pure traslazioni $(I, \underline{a})$ sono due sottogruppi; dalla legge di gruppo (4.2) segue la fattorizzazione della generica rototraslazione in pure traslazioni e rotazioni, secondo due modi distinti

$$(R, \underline{a}) = (I, \underline{a})(R, \underline{0}) = (R, \underline{0})(I, R^t\underline{a}) \tag{4.3}$$

Oltre al gruppo $(R, \underline{a})$ conviene considerare la trasformazione di **parità** $(-I, \underline{0})$, corrispondente all'operazione $\underline{x}' = -\underline{x}$. L'inversione di un solo asse spaziale è rappresentabile mediante il prodotto di una rotazione e una trasformazione di parità. A partire dall'azione sulle coordinate, si danno le seguenti regole:

$$(-I, \underline{0})(-I, \underline{0}) = (I, \underline{0}) \tag{4.4a}$$

$$(R, \underline{0})(-I, \underline{0}) = (-I, \underline{0})(R, \underline{0}), \quad (I, \underline{a})(-I, \underline{0}) = (-I, \underline{0})(I, -\underline{a}) \tag{4.4b}$$

A differenza delle rotazioni e delle traslazioni, che possono essere connesse con continuità all'identità e pertanto si rappresentano con operatori unitari, la parità è una trasformazione discreta, e sarà considerata successivamente.

Rappresentazioni unitarie del gruppo delle Rototraslazioni.

Una rappresentazione lineare unitaria del gruppo delle rototraslazioni è una applicazione che a ogni elemento $(R, \underline{a})$ del gruppo associa un operatore lineare unitario $\hat{U}(R, \underline{a})$ su un assegnato spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Oltre alla condizione di unitarietà $\hat{U}(R, \underline{a})^\dagger \hat{U}(R, \underline{a}) = \hat{I}$, deve essere verificata le condizione

$$\hat{U}(R_2, \underline{a}_2)\hat{U}(R_1, \underline{a}_1) = \hat{U}(R_2R_1, R_2\underline{a}_1 + \underline{a}_2) \tag{4.5}$$

da cui conseguono: $\hat{U}(I,\underline{0}) = \hat{I}$ e $\hat{U}(R,\underline{a})^\dagger = \hat{U}(R^t, -R^t\underline{a})$. Si noti che una rappresentazione di un gruppo forma essa stessa un gruppo.
La scomposizione (4.3) implica la fattorizzazione della rappresentazione in termini di rappresentazioni delle pure traslazioni, con operatori $\hat{U}(I,\underline{a})$, che per brevità indico con $\hat{U}(\underline{a})$, e delle pure rotazioni, con operatori $\hat{U}(R) = \hat{U}(R,\underline{0})$:

$$\hat{U}(R,\underline{a}) = \hat{U}(\underline{a})\hat{U}(R) = \hat{U}(R)\hat{U}(R^t\underline{a}) \tag{4.6}$$

<u>Le traslazioni</u>.
Consideriamo dapprima la rappresentazione delle sole traslazioni. Gli operatori commutano tra loro in conseguenza del fatto che

$$\hat{U}(\underline{a})\hat{U}(\underline{b}) = \hat{U}(\underline{a}+\underline{b}) \tag{4.7}$$

Considerando traslazioni di vettore $a\underline{n}$, dove $\underline{n}$ è un vettore fisso e a è arbitrario, si ha un sottogruppo unitario a un parametro. Se è verificata l'ipotesi di continuità forte, per il teorema di Stone esiste il generatore autoaggiunto $\hat{K}(\underline{n})$ delle traslazioni di direzione $\underline{n}$: $\hat{U}(a\underline{n}) = \exp[-ia\hat{K}(\underline{n})]$. Dalla proprietà $\hat{K}(\lambda\underline{n}) = \lambda\hat{K}(\underline{n})$, che risulta dal riscalamento del parametro a, segue che $\hat{K}(\underline{n}) = \underline{n}\cdot\underline{\hat{K}}$, dove $\{\hat{K}_i\}$ è una terna di operatori autoaggiunti caratteristici della rappresentazione. Si sceglie $|\underline{n}| = 1$.
Con quest'ultima espressione del generatore si scrive la rappresentazione esponenziale degli operatori unitari:

$$\hat{U}(\underline{a}) = e^{-i\underline{a}\cdot\underline{\hat{K}}} \tag{4.8}$$

Introducendo gli sviluppi al primo ordine $\hat{U}(\underline{a}) = \hat{I} - i\underline{a}\cdot\underline{\hat{K}} + \mathcal{O}(|\underline{a}|^2)$ nella relazione $[\hat{U}(\underline{a}), \hat{U}(\underline{b})] = 0$, con vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ infinitesimi, per l'arbitrarietà dei parametri si perviene a

$$[\hat{K}_i, \hat{K}_j] = 0 \tag{4.9}$$

Con la scelta di vettori $\underline{a} = a\underline{n}$ e $\underline{b} = \delta a\underline{n}$ nella relazione (4.7), nel limite $\delta a \to 0$ si perviene all'equazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial a}\hat{U}(a\underline{n}) = -i(\underline{n}\cdot\underline{\hat{K}})\hat{U}(a\underline{n}) \tag{4.10}$$

la cui soluzione, con la condizione iniziale $\hat{U}(\underline{0}) = \hat{I}$, è l'espressione (4.8). I tre operatori $\hat{K}_i$ sono i generatori delle traslazioni spaziali lungo i tre assi coordinati, e verranno denominati **operatori di momento lineare**.

<u>Le rotazioni</u>.
Gli operatori unitari $\hat{U}(R)$ che rappresentano le rotazioni pure in generale non commutano tra loro, dato che $SO(3)$ non è un gruppo abeliano. Tuttavia, se si considerano le rotazioni attorno a una direzione $\underline{n}$, i corrispondenti operatori unitari formano un sottogruppo abeliano a un parametro. Specificando R mediante il vettore $\alpha\underline{n}$ si ha:

$$\hat{U}(\alpha_1\underline{n})\hat{U}(\alpha_2\underline{n}) = \hat{U}((\alpha_1+\alpha_2)\underline{n}) \tag{4.11}$$

Il generatore delle rotazioni attorno all'asse di versore $\underline{n}$ ha la forma $\underline{n}\cdot\underline{\hat{J}}$, dove gli operatori autoaggiunti $\hat{J}_i$ sono i generatori per le rotazioni attorno ai tre assi coordinati. Si ha:

$$\hat{U}(\alpha\underline{n}) = e^{-i\alpha\underline{n}\cdot\underline{\hat{J}}} \tag{4.12}$$

Inserendo lo sviluppo per un angolo infinitesimo $\hat{U}(\delta\alpha\underline{n}) = \hat{I} - i\delta\alpha(\underline{n}\cdot\underline{\hat{J}}) + \mathcal{O}(\delta\alpha^2)$ nella relazione (4.11) si ottengono:

$$[\hat{U}(\alpha\underline{n}), (\underline{n}\cdot\underline{\hat{J}})] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\hat{U}(\alpha\underline{n}) = -i(\underline{n}\cdot\underline{\hat{J}})\hat{U}(\alpha\underline{n}) \tag{4.13}$$

L'equazione differenziale è risolta dalla espressione esponenziale (4.12).
Per ottenere la regola di commutazione dei generatori attorno ai tre assi coordinati, consideriamo la rappresentazione della relazione $R^t S(\alpha\underline{n})R = S(\alpha R^t\underline{n})$. Essa comporta

$$\hat{U}(R)^\dagger\hat{U}(\alpha\underline{n})\hat{U}(R) = \hat{U}(\alpha R^t\underline{n})$$

Se l'angolo α è infinitesimo e per l'arbitrarietà di $\underline{n}$,

$$\hat{U}(R)^\dagger\hat{J}_k\hat{U}(R) = \sum_i R_{ki}\hat{J}_i \tag{4.14}$$

Considerando ancora una rotazione infinitesima R, si ottiene finalmente la fondamentale relazione che caratterizza i generatori delle rotazioni come **operatori di momento angolare**:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{J}_k \tag{4.15}$$

Rimane da esaminare la relazione tra i generatori delle rappresentazioni delle traslazioni e quelli delle rotazioni. Essa consegue dalle due equivalenti fattorizzazioni di una rototraslazione (4.3), che comportano

$$\hat{U}(R)^\dagger\hat{U}(\underline{a})\hat{U}(R) = \hat{U}(R^t\underline{a}) \tag{4.16}$$

passando a traslazioni infinitesime:

$$\hat{U}(R)^\dagger\hat{K}_k\hat{U}(R) = \sum_i R_{ki}\hat{K}_i \tag{4.17}$$

Se ora si considerano rotazioni infinitesime:

$$[\hat{J}_i, \hat{K}_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{K}_k \tag{4.18}$$

Le relazioni di commutazione (4.9)(4.15)(4.17), che per comodità ripetiamo:

$$[\hat{K}_i, \hat{K}_j] = 0 \quad , \quad [\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{J}_k \quad , \quad [\hat{J}_i, \hat{K}_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{K}_k \tag{4.19}$$

caratterizzano i 6 generatori delle rappresentazioni unitarie del gruppo delle rototraslazioni.

Operatori scalari e vettoriali.

Un operatore $\hat{A}$ è invariante, o **scalare**, per il gruppo delle rotazioni se, per ogni rotazione:

$$\hat{U}(R)^{\dagger}\hat{A}\hat{U}(R) = \hat{A} \tag{4.20a}$$

Questa relazione implica che il prodotto interno $\langle\psi|\hat{A}\phi\rangle$ é invariante per rotazioni (è uno scalare): il valore che esso assume per un osservatore coincide col valore $\langle\psi_R|\hat{A}\phi_R\rangle$ per l'osservatore ruotato.

Considerando le rotazioni infinitesime, la relazione è equivalente a

$$[\hat{J}_i, \hat{A}] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.20b}$$

Le relazioni (4.20) comportano che **gli autospazi di un operatore scalare sono invarianti** per l'azione della rappresentazione o, con opportune considerazioni di dominio, dei generatori. Infatti, se $|a\rangle$ è un autovettore di $\hat{A}$ con autovalore a, $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$, i vettori $\hat{U}(R)|a\rangle$ sono ancora autovettori di $\hat{A}$ con stesso autovalore:

$$\hat{A}\hat{U}(R)|a\rangle = \hat{U}(R)\hat{A}|a\rangle = a\hat{U}(R)|a\rangle$$

Una terna di operatori $\hat{A}_i$ costituisce una **terna vettoriale** per il gruppo delle rotazioni se, per ogni rotazione R, vale la relazione

$$\hat{U}(R)^{\dagger}\hat{A}_i\hat{U}(R) = \sum_k R_{ik}\hat{A}_k \tag{4.21a}$$

Essa è equivalente, su un opportuno dominio, alle relazioni

$$[\hat{J}_i, \hat{A}_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{A}_k, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{4.21b}$$

I generatori $\underline{\hat{K}}$ delle traslazioni e i generatori $\underline{\hat{J}}$ delle rotazioni sono due terne vettoriali. Se in un sistema di riferimento si ha la terna di numeri $a_i = \langle\psi|\hat{A}_i\phi\rangle$, a essa corrisponde nel sistema di riferimento ruotato la terna che si ottiene ruotando la terna iniziale:

$$a_i' = \langle\psi_R|\hat{A}_i\phi_R\rangle = \langle\psi|\hat{U}_R^{\dagger}\hat{A}_i\hat{U}_R\psi\rangle = \sum_k R_{ik}a_k \tag{4.22}$$

Ciò giustifica la denominazione di terna vettoriale.

E' rilevante la seguente affermazione: **il prodotto scalare di due terne vettoriali di operatori è un operatore scalare**.

Dim.: siano $\underline{\hat{A}}$ e $\underline{\hat{B}}$ due terne vettoriali di operatori. Si ha, tenendo conto dell'unitarietà e della proprietà $R^tR = I$:

$$\hat{U}(R)^{\dagger}(\underline{\hat{A}}\cdot\underline{\hat{B}})\hat{U}(R) = \sum_k \hat{U}(R)^{\dagger}\hat{A}_k\hat{U}(R)\hat{U}(R)^{\dagger}\hat{B}\hat{U}(R) = \sum_{klm} R_{kl}R_{km}\hat{A}_l\hat{B}_m = \underline{\hat{A}}\cdot\underline{\hat{B}}.$$

Esempi importanti di operatori scalari sono:

$$\hat{K}^2 = \sum_i \hat{K}_i^2, \quad \hat{J}^2 = \sum_i \hat{J}_i^2, \quad \underline{\hat{K}} \cdot \underline{\hat{J}} \tag{4.23}$$

Si noti che per le equazioni (4.18) risulta che l'operatore scalare $\underline{\hat{K}} \cdot \underline{\hat{J}}$ è autoaggiunto e inoltre:

$$[\hat{K}_i, \underline{\hat{K}} \cdot \underline{\hat{J}}] = 0 \tag{4.24}$$

La parità.

L'operazione di parità $(-I, \underline{0})$ corrisponde sullo spazio di Hilbert a un operatore $\hat{U}_p$ tale che $\hat{U}_p^2 = \hat{I}$, Componendo la parità con le rototraslazioni, eq. (4.4b), si ottengono

$$\hat{U}_p \hat{U}(R) \hat{U}_p = \hat{U}(R), \qquad \hat{U}_p \hat{U}(\underline{a}) \hat{U}_p = \hat{U}(-\underline{a}) \tag{4.25}$$

da cui risulta, passando a trasformazioni infinitesime, $\hat{U}_p i\hat{J}_i \hat{U}_p = i\hat{J}_i$ e $\hat{U}_p i\hat{K}_i \hat{U}_p = -i\hat{K}_i$. La scelta di $\hat{U}_p$ unitario va operata nel più generale contesto delle rappresentazioni del gruppo di Poincaré, o di Galilei. Dall'essere unitario consegue che l'operatore parità è anche autoaggiunto, e quindi è un'osservabile. Valgono allora le relazioni

$$\hat{U}_p \hat{J}_i - \hat{J}_i \hat{U}_p = 0, \qquad \hat{U}_p \hat{K}_i + \hat{K}_i \hat{U}_p = 0 \tag{4.26}$$

(Se l'operatore parità fosse antilineare e antiunitario, nelle (33) i segni sarebbero scambiati). Con riferimento alla parità, la terna $\underline{\hat{J}}$ è uno "pseudo-vettore", mentre il momento lineare $\underline{\hat{K}}$ è un vettore. L'operatore parità commuta con gli scalari $\hat{K}^2$ e $\hat{J}^2$, e anticommuta con $\underline{\hat{K}} \cdot \underline{\hat{J}}$ (pseudo-scalare).

Esercizio 4.1

Dimostrare che, se $\underline{\hat{A}}$ e $\underline{\hat{B}}$ sono due terne vettoriali di operatori, anche $\frac{1}{2}(\underline{\hat{A}} \times \underline{\hat{B}} + \underline{\hat{B}} \times \underline{\hat{A}})$ è una terna vettoriale.

Esercizio 4.2

Dimostrare che per una terna vettoriale di operatori $\underline{\hat{A}}$:

$$\hat{A}_j \hat{J}^2 + \hat{J}^2 \hat{A}_j - 2\hat{A}_j = 2 \sum_k \hat{J}_k \hat{A}_j \hat{J}_k \tag{4.27}$$

$$[\hat{J}^2, [\hat{J}^2, \hat{A}_j]] = 2\hat{A}_j \hat{J}^2 + 2\hat{J}^2 \hat{A}_j - 4\hat{J}_j (\underline{\hat{A}} \cdot \underline{\hat{J}}) \tag{4.28}$$

Esercizio 4.3

Mostrare che ogni vettore ψ si decompone nella somma di un vettore pari $\psi_p = \hat{U}_p \psi_p$ e un vettore dispari $\psi_d = -\hat{U}_p \psi_d$. Costruire i proiettori sui due autospazi di vettori pari e dispari.

Esercizio 4.4

Si costruisce la terna vettoriale di operatori autoaggiunti

$$\underline{\hat{W}} = \frac{1}{2}(\underline{\hat{K}} \times \underline{\hat{J}} + \underline{\hat{J}} \times \underline{\hat{K}})$$

Mostrare che $\hat{W}_\ell = \frac{1}{2i}[\hat{J}^2, \hat{K}_\ell]$ e le proprietà

$$[\hat{W}_i, \hat{K}_j] = i\hat{K}^2\delta_{ij} - i\hat{K}_i\hat{K}_j, \quad [\hat{W}_i, \hat{W}_j] = -i\hat{K}^2 \sum_m \epsilon_{ijm}\hat{J}_m, \quad \hat{W}^2 = \hat{J}^2\hat{K}^2 + \hat{K}^2 - (\underline{\hat{K}} \cdot \underline{\hat{J}})^2$$

§5. LE ROTO–TRASLAZIONI IN $L^2(R^3)$

Introduzione

Un esempio di rappresentazione unitaria del gruppo delle rototraslazioni, di importanza fondamentale non solo per la meccanica quantistica, viene costruito sullo spazio di Hilbert $L^2(R^3)$, composto da funzioni con norma finita, costruita a partire dal prodotto interno

$$\langle f|g\rangle = \int d_3x f(\underline{x})^* g(\underline{x}) \tag{5.1}$$

I generatori delle rappresentazioni delle traslazioni e delle rotazioni sono descritti da operatori autoaggiunti che in meccanica quantistica assumono il significato di momento lineare e momento angolare, con caratteristiche regole di commutazione che risultano dalla teoria generale già svolta.

La costruzione delle rappresentazioni è suggerita dalla definizione di campo scalare per una trasformazione di sistemi di riferimento, che ora richiamiamo.

Un osservatore S attribuisce a ciascun punto P dello spazio coordinate $\underline{x}(P)$ e misura valori $f(\underline{x})$ che specificano una funzione di campo f. Un diverso osservatore S' agli stessi punti attribuisce coordinate $\underline{x}'(P)$ e misura valori $f'(\underline{x}')$, che specificano una funzione di campo f'. Il campo è scalare quando i due osservatori, in ciascun punto P, ottengono valori uguali: $f'(\underline{x}') = f(\underline{x})$. Se le coordinate sono legate dalla relazione invertibile $\underline{x}' = \underline{\varphi}(\underline{x})$, i campi scalari nei due riferimenti sono connessi dalla relazione $f' = f \circ \underline{\varphi}^{-1}$.

In meccanica quantistica, se si trascura lo spin, lo stato di una particella ad un certo istante è descritto da un campo complesso ψ, con il significato che $|\psi(\underline{x})|^2$ descrive la densità di probabilità per la posizione. L'interpretazione statistica richiede che il campo ψ sia un elemento di $L^2(R^3)$ normalizzato:

$$\int d^3x\, |\psi(\underline{x})|^2 = 1 \tag{5.2}$$

Un diverso osservatore descrive la particella con un campo ψ' che fornisce la densità di probabilità per la posizione nel sistema di riferimento S'. A priori, per salvaguardare il fatto che una misura di posizione deve fornire un risultato indipendente dall'osservatore, basterebbe richiedere $|\psi'(\underline{x}')|^2 d_3x' = |\psi(\underline{x})|^2 d_3x$; se consideriamo da ora trasformazioni che conservano l'elemento di volume, deve essere $|\psi'(\underline{x}')| = |\psi(\underline{x})|$.

Per salvaguardare l'intera descrizione statistica, e non solo quella legata alla posizione, si deve richiedere che ψ, e non solo il modulo, si trasformi come un campo scalare. Questa richiesta si formalizza associando alla trasformazione di coordinate $\underline{x}' = \underline{\varphi}(\underline{x})$ un operatore lineare definito dalla relazione

$$(\hat{U}\psi)(\underline{x}) = \psi(\underline{\varphi}^{-1}(\underline{x})) \tag{5.3}$$

che è anche unitario, avendo richiesto l'invarianza della misura d_3x. Le rototraslazioni hanno questa proprietà, come pure il gruppo di Lorentz o di Galilei. Questa caratteristica è importante, e garantisce non solo la normalizzazione del campo ψ in tutti i riferimenti

connessi da rototraslazioni, ma anche la conservazione dei valori $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$, con cui si calcolano le probabilità di transizione.
La proprietá di gruppo delle rototraslazioni si trasferisce nella richiesta che gli operatori corrispondenti formino una rappresentazione unitaria. Come si è già visto, lo studio della rappresentazione si riconduce a quello delle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni e delle traslazioni pure.

Gli operatori di Momento Lineare.
Alla traslazione $\underline{x}' = \underline{x} + \underline{a}$ corrisponde l'operatore unitario

$$(\hat{U}_{\underline{a}} f)(\underline{x}) = f(\underline{x} - \underline{a}) \tag{5.4}$$

Nel sottospazio $\mathcal{S}(R^3)$ delle funzioni di classe C^∞, rapidamente decrescenti con tutte le derivate, il secondo membro può essere sviluppato in serie di Taylor:

$$f(\underline{x} - \underline{a}) = f(\underline{x}) - \sum_j a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) + \frac{1}{2!}\sum_{jk} a_j a_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_k}(\underline{x}) + \dots$$

Posto, per una traslazione infinitesima, $\hat{U} = \hat{I} - i\underline{a}\cdot\underline{\hat{K}} + \mathcal{O}(|a|^2)$, si ha l'identificazione dei tre generatori delle traslazioni:

$$\hat{K}_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{5.5}$$

Essi sono ben definiti e sono simmetrici sullo spazio $\mathcal{S}(R^3)$, che è denso in $L^2(R^3)$ e invariante per l'applicazione di potenze degli operatori. Dato che il gruppo delle traslazioni è abeliano, la teoria generale prevede, ma in questo caso è evidente, che i tre operatori $\hat{K}_i$ commutino. Per ragioni dimensionali, in meccanica quantistica gli operatori di momento lineare sono definiti moltiplicando i generatori delle traslazioni per la costante di Planck $\hbar$: $\hat{P}_j = \hbar\hat{K}_j$.
Gli operatori unitari che rappresentano le traslazioni si scrivono:

$$\hat{U}_{\underline{a}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{a}\cdot\underline{\hat{P}}} \tag{5.6}$$

La scrittura è formale, e definisce un operatore limitato attraverso lo sviluppo dell'esponenziale sullo spazio $\mathcal{S}(R^3)$, estendibile per continuità a un operatore unitario su tutto lo spazio di Hilbert.
Sullo stesso spazio $\mathcal{S}(R^3)$ si definiscono in modo semplice i tre operatori "posizione"

$$\hat{X}_j f = x_j f \tag{5.7}$$

che agiscono per moltiplicazione con la funzione x_j: $x_j(\underline{a}) = a_j$. In pratica si scrive: $(\hat{X}_j f)(\underline{x}) = x_j f(\underline{x})$ Gli operatori $\hat{X}_i$ e $\hat{P}_i$ trasformano $\mathcal{S}(R^3)$ in sè, e possono essere estesi a operatori autoaggiunti su un comune dominio denso $\mathcal{D}$. Essi verificano le regole di commutazione di Heisenberg

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0 \qquad [\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0 \qquad [\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \tag{5.8}$$

Per gli operatori $\hat{X}_i$ l'azione del gruppo delle traslazioni concorda con quanto avviene per le coordinate, conformemente alla loro interpretazione come operatori di posizione:

$$\hat{U}^\dagger_{\underline{a}} \hat{X}_i \hat{U}_{\underline{a}} = \hat{X}_i + a_i \hat{I} \tag{5.9}$$

Dim.: $(\hat{U}^\dagger_{\underline{a}} \hat{X}_i f)(\underline{x}) = (\hat{U}^\dagger_{\underline{a}} x_i f)(\underline{x}) = x_i(\underline{x}+\underline{a}) f(\underline{x}+\underline{a}) = (x_i + a_i)(\hat{U}^\dagger_{\underline{a}} f)(\underline{x}) = ((\hat{X}_i + a_i)\hat{U}^\dagger_{\underline{a}} f)(\underline{x})$, da cui: $\hat{U}^\dagger_{\underline{a}} \hat{X}_i = \hat{X}_i \hat{U}^\dagger_{\underline{a}} + a_i \hat{U}^\dagger_{\underline{a}}$.

<u>Gli operatori di Momento Angolare</u>

A ogni rotazione R corrisponde un operatore lineare $\hat{U}_R$ definito dalla relazione

$$(\hat{U}_R f)(\underline{x}) = f(R^{-1}\underline{x}) \tag{5.10}$$

E' immediato verificare che gli operatori $\hat{U}_R$ sono unitari e formano una rappresentazione del gruppo delle rotazioni. Considerandone la restrizione alla varietà $\mathcal{S}(R^3)$, è facile ottenere lo sviluppo nell'intorno dell'identità della rappresentazione, e quindi l'espressione dei generatori:

$$(\hat{L}_i f)(\underline{x}) = -i\hbar \sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}) \tag{5.11}$$

dove si è introdotta, per ragioni dimensionali, la costante di Planck. Mediante gli operatori $\hat{X}_i$ e $\hat{P}_i$ si scrive, simbolicamente:

$$\hat{L}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \hat{X}_j \hat{P}_k \qquad \hat{L} = \hat{X} \times \hat{P} \tag{5.12}$$

che suggerisce la denominazione dei generatori come operatori di momento angolare. I tre operatori $\hat{L}_i$, definiti mediante la formula (5.12) sullo spazio $\mathcal{S}(R^3)$, sono estendibili ad altrettanti operatori autoaggiunti. Nel seguito i nove operatori di posizione, momento lineare e angolare, verranno identificati con le loro estensioni autoaggiunte.
Gli operatori della rappresentazione unitaria sono:

$$\hat{U}(\alpha\underline{n}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\underline{n}\cdot\underline{L}} \tag{5.13}$$

Per la teoria generale, ma la verifica esplicita è possibile:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \qquad [\hat{L}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{P}_k \tag{5.14a}$$

Si ha anche:

$$[\hat{L}_i, \hat{X}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{X}_k \tag{5.14b}$$

Queste relazioni caratterizzano le tre terne di operatori $\underline{\hat{X}}$, $\underline{\hat{P}}$ e $\underline{\hat{L}}$ come operatori vettoriali. Pertanto, l'azione di una rotazione sugli operatori di posizione è

$$\hat{U}^\dagger_R \hat{X}_i \hat{U}_R = \sum_j R_{ij} \hat{X}_j \tag{5.15}$$

Sono operatori invarianti gli operatori ottenuti dai prodotti scalari:

$$\hat{X}^2 \qquad \hat{P}^2 \qquad \hat{L}^2 \qquad \hat{X}\cdot\hat{P} \tag{5.16}$$

e i loro polinomi. I prodotti scalari dei vettori posizione o momento con il momento angolare sono nulli. Si danno le espressioni esplicite

$$\hat{P}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) \tag{5.17a}$$

$$\hat{L}^2 = \hat{X}^2\hat{P}^2 - (\underline{\hat{X}}\cdot\underline{\hat{P}})^2 + i\hbar(\underline{\hat{X}}\cdot\underline{\hat{P}}) \tag{5.17b}$$

La trasformazione di parità è rappresentata dall'operatore unitario

$$(\hat{U}_p f)(\underline{x}) = f(-\underline{x}) \tag{5.18}$$

Oltre alle generali relazioni di commutazione e anticommutazione rispettivamente con $\underline{\hat{J}}$ e $\underline{\hat{P}}$, si verifica che $\hat{U}_p\hat{X}_i\hat{U}_p = -\hat{X}_i$.

§6. RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI SU(2).

Rappresentazioni unitarie irriducibili.

Lo studio delle rappresentazioni unitarie di un gruppo può essere ricondotto a quello di rappresentazioni unitarie elementari, dette irriducibili. Infatti, lo spazio di Hilbert su cui la rappresentazione opera, può essere decomposto nella somma ortogonale di sottospazi invarianti, non ulteriormente decomponibili. La restrizione della rappresentazione a ciascuno di questi sottospazi è una rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo.

Sia $\mathcal{G}$ un gruppo, e $\hat{U}(g)$ una sua rappresentazione unitaria su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Un sottospazio S è **invariante** per la rappresentazione se le immagini di tutti i suoi elementi, secondo la rappresentazione, sono ancora in S:

$$\psi \in S \quad \to \quad \hat{U}(g)\psi \in S, \quad \forall g \in \mathcal{G}$$

Evidentemente l'insieme $\mathcal{H}$ e l'insieme vuoto sono invarianti. La restrizione della rappresentazione al sottospazio invariante é ancora una rappresentazione del gruppo.

Una rappresentazione è **irriducibile** quando lo spazio $\mathcal{H}$ non contiene sottospazi propri invarianti sotto l'azione della rappresentazione del gruppo (diversi dall'insieme vuoto). Mostriamo che, se la rappresentazione unitaria è riducibile, con sottospazio invariante S, anche il sottospazio $S^\perp$ è invariante.

Dim.: se $\phi \in S^\perp$, allora $(\hat{U}(g)^\dagger \psi|\phi) = 0$ per ogni g e $\psi \in S$, in quanto S è invariante. Poiché la rappresentazione è unitaria: $(\psi|\hat{U}(g)\phi) = 0$ per ogni $\psi \in S$, cioè $\hat{U}(g)\phi$ è ancora un elemento di $S^\perp$.

In questo modo, lo spazio di Hilbert si decompone nella somma di due sottospazi invarianti su ciascuno dei quali operano due rappresentazioni. Il processo di riduzione della rappresentazione procede sino all'individuazione di una decomposizione in sottospazi invarianti ortogonali, non più riducibili

$$\mathcal{H} = \sum_i{}^{\oplus} \mathcal{S}_i$$

Le restrizioni della rappresentazione a ciascun sottospazio sono ora irriducibili.

Lemma di Schur: se $\hat{U}$ è una rappresentazione unitaria irriducibile di un gruppo su uno spazio $\mathcal{H}$, ogni operatore invariante è un multiplo dell'identità

$$[\hat{U}(g), \hat{T}] = 0 \quad \forall g \quad \to \quad \hat{T} = \lambda \hat{I}$$

Dim.: la dimostrazione é elementare se si suppone che $\hat{T}$ abbia almeno un autovalore λ. Gli autovettori con autovalore λ formano un autospazio S_λ che è invariante per la rappresentazione: se $\psi \in S_\lambda$ allora $\hat{T}\hat{U}(g)\psi = \hat{U}(g)\hat{T}\psi = \lambda\hat{U}(g)\psi$, pertanto $\hat{U}(g)\psi \in S_\lambda$. L'autospazio S_λ, essendo invariante per l'azione del gruppo e per l'ipotesi di irriducibilità, deve coincidere con l'intero spazio di Hilbert.

Una più generale dimostrazione considera la rappresentazione spettrale dell'operatore mediante una misura a valori di proiettore. Se $\hat{T}$ è invariante, anche i proiettori $\hat{E}(M)$ e i relativi sottospazi sono invarianti. Per l'ipotesi di irriducibilità, un solo sottospazio coincide con $\mathcal{H}$, con proiettore $\hat{I}$, gli altri sono vuoti, con proiettori nulli.

Gli autovalori degli operatori invarianti sono una caratteristica specifica di ciascuna rappresentazione irriducibile.

Per i gruppi continui le precedenti nozioni si traducono in relazioni che coinvolgono i generatori della rappresentazione. Osserviamo che, mentre la rappresentazione è costituita da operatori unitari, con dominio $\mathcal{H}$, i generatori $\hat{G}_i$ possono in generale essere definiti su un dominio $\mathcal{D}$ in comune, denso ma non coincidente con $\mathcal{H}$, invariante per l'azione dei generatori stessi. Su tale dominio si possono costruire le somme parziali della serie esponenziale, che convergono a un operatore unitario della rappresentazione.
Un sottospazio S è invariante per l'insieme dei generatori se $\hat{G}_i\psi \in S$, per ogni i e $\psi \in S \cap \mathcal{D}$. Si mostra che se S è invariante per i generatori, lo è anche per la rappresentazione del gruppo e viceversa. La rappresentazione del gruppo è irriducibile se e solo se i generatori formano un insieme irriducibile di operatori, cioè non lasciano sottospazi invarianti all'infuori dello spazio $\mathcal{H}$. Un operatore che commuta con i generatori, essendo questi un insieme irriducibile, su un comune dominio che contiene $\mathcal{D}$, è multiplo dell'operatore identità.

Poiché i generatori sono caratterizzati dalle loro regole di commutazione, lo studio delle rappresentazioni unitarie irriducibili di un gruppo viene ricondotto allo studio delle rappresentazioni irriducibili delle regole di commutazione dei generatori.

É necessaria una precisazione, da cui si evidenzia nuovamente il ruolo del gruppo di ricoprimento $SU(2)$ nello studio delle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni.
In generale, per i gruppi semplicemente connessi vale la proprietà che una rappresentazione lineare dell'algebra di Lie coincide con l'algebra di Lie di una rappresentazione lineare del gruppo. Questo non è vero per gruppi non semplicemente connessi, come $SO(3)$. Tuttavia, come già osservato, a ogni gruppo di Lie connesso G si può associare un gruppo di ricoprimento semplicemente connesso $\tilde{G}$ con la proprietà che esiste un omeomorfismo analitico $\tilde{G} \to G$. Essendo la mappa localmente invertibile, i gruppi $\tilde{G}$ e G hanno algebre di Lie isomorfe.
Per questa ragione, procediamo allo studio delle rappresentazioni dell'algebra di Lie di $SU(2)$.

RAPPRESENTAZIONI UNITARIE IRRIDUCIBILI DI SU(2)

Si è mostrato che una rappresentazione unitaria risulta scomponibile in rappresentazioni unitarie irriducibili, agenti su sottospazi ortogonali. In una base adattata alla scomposizione, gli operatori unitari e i generatori della rappresentazione hanno pertanto una struttura matriciale a blocchi, dove ciascun blocco fornisce una rappresentazione irriducibile, di dimensione pari a quella del sottospazio invariante.
Ci accingiamo a studiare la struttura delle rappresentazioni unitarie irriducibili di $SU(2)$, ricondotta allo studio delle rappresentazioni irriducibili dei generatori. Giungeremo alla conclusione che esse hanno dimensione finito-dimensionale $2j + 1$, dove i valori possibili di j sono: 0, 1/2, 1, 3/2 etc. Forniremo l'esplicita struttura matriciale dei generatori, in una opportuna base dello spazio.

Siano $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$, e $\hat{J}_3$ tre operatori lineari autoaggiunti su uno spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$, tali da soddisfare la relazione di commutazione

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{J}_k, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{1}$$

e costituire in $\mathcal{H}$ una terna irriducibile di operatori. L'unico sottospazio invariante per i tre operatori e diverso da quello costituito dal solo vettore nullo, è perciò l'intero spazio $\mathcal{H}$.

I tre operatori sono una base per un'algebra di Lie di operatori, costruiti mediante loro combinazioni lineari reali: $\hat{H} = \alpha \underline{n} \cdot \underline{\hat{J}} = \alpha(n_1 \hat{J}_1 + n_2 \hat{J}_2 + n_3 \hat{J}_3)$. Tale algebra è isomorfa all'algebra di Lie $su(2)$. Gli operatori unitari $\exp(-i\hat{H})$ formano una rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo $SU(2)$.

L'operatore $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$ è un operatore scalare, e pertanto commuta con i tre operatori $\hat{J}_k$. Per il Lemma di Schur, esso è multiplo dell'identità: $\hat{J}^2 = \lambda \hat{I}$, con λ numero reale. L'autovalore λ è anche positivo, infatti, indicando con $\|\psi\|$ la norma del generico vettore $|\psi\rangle$:

$$\lambda \|\psi\|^2 = \langle \psi | \hat{J}^2 | \psi \rangle = \sum_k \langle \psi | \hat{J}_k^2 | \psi \rangle = \sum_k \|\hat{J}_k \psi\|^2 \geq 0$$

Privilegiando l'operatore $\hat{J}_3$, in luogo degli operatori $\hat{J}_1$ e $\hat{J}_2$ è utile considerare gli operatori di innalzamento ed abbassamento, così definiti

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_1 + i\hat{J}_2 \quad , \quad \hat{J}_- = \hat{J}_1 - i\hat{J}_2 \quad , \quad \hat{J}_\pm^\dagger = \hat{J}_\mp \tag{2}$$

Essi svolgono un ruolo fondamentale nella teoria generale del momento angolare. Utilizzando la (1.1) si ottengono le due formule utili:

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm \tag{3a}$$

$$\hat{J}_\mp \hat{J}_\pm = \hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 \mp \hat{J}_3 \tag{3b}$$

Indichiamo col simbolo $|\mu\rangle$ un autovettore normalizzato di $\hat{J}_3$ con autovalore μ: $\hat{J}_3|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle$. Dimostriamo ora che i vettori $\hat{J}_\pm|\mu\rangle$ sono autovettori di $\hat{J}_3$, con autovalori $\mu \pm 1$:

$$\hat{J}_\pm |\mu\rangle = K_\pm(\lambda, \mu) |\mu \pm 1\rangle$$

dove $K_\pm(\lambda, \mu)$ è una costante di normalizzazione:

$$\hat{J}_3(\hat{J}_\pm|\mu\rangle) = \hat{J}_\pm \hat{J}_3 |\mu\rangle + [\hat{J}_3, \hat{J}_\pm]|\mu\rangle = (\mu \pm 1)(\hat{J}_\pm|\mu\rangle)$$

Poichè i vettori $|\mu \pm 1\rangle$ sono normalizzati, la costante è così determinata

$$|K_\pm(\lambda, \mu)|^2 = \|\hat{J}_\pm|\mu\rangle\|^2 = \langle \mu | \hat{J}_\pm^\dagger \hat{J}_\pm | \mu \rangle = (\lambda - \mu^2 \mp \mu) \tag{4}$$

A partire da un autostato $|\mu\rangle$ possiamo pertanto costruire autostati $|\mu \pm n\rangle$ applicando n volte gli operatori di innalzamento o di abbassamento. Il processo non può procedere per

n arbitrariamente grande in quanto la quantità $\lambda - \mu^2 \pm \mu$ deve rimanere non negativa. Deve perciò esistere un autovalore massimo μ_{max}, corrispondente ad un autovettore $|\mu_{max}\rangle$ ottenuto mediante l'applicazione iterata di $\hat{J}_+$ allo stato $|\mu\rangle$, tale che $\hat{J}_+|\mu_{max}\rangle = 0$, cioè

$$\lambda^2 - \mu_{max}^2 - \mu_{max} = 0 \tag{5a}$$

Allo stesso modo, deve esistere un autovalore minimo μ_{min}, tale che $\hat{J}_-|\mu_{min}\rangle = 0$, cioè

$$\lambda - \mu_{min}^2 + \mu_{min} = 0 \tag{5b}$$

Sottraendo le due condizioni (1.5) ottengo $(\mu_{max} + \mu_{min})(\mu_{max} - \mu_{min} + 1) = 0$, da cui $\mu_{max} = -\mu_{min}$. Inoltre, poiché i due autovettori estremi sono stati generati a partire da uno stesso autostato $|\mu\rangle$ mediante successive applicazioni di $\hat{J}_\pm$, deve essere: $\mu_{max} - \mu_{min} = N$. In conclusione $\mu_{max} = j$, dove $j = N/2$ e N è un intero, e $\lambda = j(j+1)$.

I vettori $|\mu\rangle$ e quelli ottenuti per applicazioni successive di $\hat{J}_\pm$ fino a $|\mu_{max}\rangle$ e $|\mu_{min}\rangle$ generano una varietà lineare invariante sotto l'azione di $\hat{J}_3$ e $\hat{J}_\pm$. Infatti, per la relazione (3b), la varietà lineare generata dai vettori $\hat{J}_\pm^k|\mu\rangle$ viene lasciata invariante, a meno di una costante numerica di normalizzazione, dall'applicazione degli operatori $\hat{J}_3$ e $\hat{J}_\pm$. Per l'ipotesi di irriducibilità possiamo concludere che la dimensione dello spazio di Hilbert è $2j + 1$.

La precedente trattazione astratta ci ha portati a classificare mediante il numero

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots, \frac{N}{2} \ldots \tag{6}$$

tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili della regole di commutazione per il momento angolare. Ciascuna rappresentazione ha dimensione $2j + 1$, dimensione dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_j$. L'operatore $\hat{J}^2$ è multiplo dell'identità, e gli autovalori di $\hat{J}_3$ sono i numeri $m = -j, -j+1, \ldots, j$, con corrispondenti $2j+1$ autostati normalizzati $|j,m\rangle$ (è opportuno includere l'indice j nella specificazione degli autovettori):

$$\hat{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle \tag{7a}$$

$$\hat{J}_3|j,m\rangle = m|j,m\rangle \tag{7b}$$

Gli autovettori sono connessi tra loro dagli operatori $\hat{J}_\pm$ mediante le formule

$$\hat{J}_\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle \tag{8}$$

In particolare, gli stati $|j,m\rangle$ sono ottenibili a partire dallo stato di autovalore minimo mediante la formula

$$|j,m\rangle = \sqrt{\frac{(j-m)!}{(2j)!(j+m)!}}(\hat{J}_+)^{j+m}|j,-j\rangle \tag{9}$$

I generatori $\hat{J}_i$ sono una base in uno spazio lineare di operatori autoaggiunti la cui esponenziazione fornisce un gruppo unitario sullo spazio complesso $\mathcal{H}_j$, che è rappresentazione irriducibile del gruppo $SU(2)$, o del gruppo delle rotazioni:

$$\hat{U}(R) = e^{-i\alpha(\underline{n}\cdot\underline{\hat{J}})} \tag{10}$$

dove $R(\underline{n}\alpha)$ è la rotazione di versore $\underline{n}$ ed angolo α.
Ricordiamo la formula, valida per ogni matrice di rotazione R,

$$\hat{U}(R)^\dagger \hat{J}_3 \hat{U}(R) = \sum_k R_{3k}\hat{J}_k \tag{11}$$

Il vettore riga R_{3k} rappresenta le componenti di un versore $\underline{n}$. L'arbitrarietà di R ci porta a concludere che tutti gli operatori $(\underline{n}\cdot\underline{\hat{J}})$ sono unitariamente equivalenti a $\hat{J}_3$, e quindi hanno lo stesso spettro di autovalori, in particolare gli operatori $\hat{J}_1$ e $\hat{J}_2$.
La simmetria dello spettro dei generatori comporta che la traccia delle matrici $(\underline{n}\cdot\underline{J})$ sia nulla, e quindi $\det\hat{U}(R) = 1$. Una rappresentazione unitaria di indice j di $SU(2)$ è pertanto un sottogruppo di $SU(2j+1)$, gruppo delle matrici unitarie speciali di dimensione $2j+1$.

L'azione dell'operatore $\hat{U}(\underline{n}\alpha)$ su un generico vettore $|\psi\rangle$ in $\mathcal{H}_j$ è particolarmente semplice se è nota la base di autovettori $|e_m\rangle$, con autovalori $m = -j, \ldots + j$, del generatore $(\underline{n}\cdot\underline{\hat{J}})$:

$$\hat{U}(\underline{n}\alpha)|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^{j} e^{-im\alpha}\langle e_m|\psi\rangle|e_m\rangle \tag{12}$$

In particolare, ponendo $\alpha = 2\pi$, notiamo che le rappresentazioni con indice j intero forniscono $\hat{U}(2\pi\underline{n}) = \hat{I}$, mentre per j semi-intero si ottiene $-\hat{I}$. Le rappresentazioni del secondo tipo vengono dette "spinoriali".

Rappresentazione matriciale degli operatori

La precedente trattazione astratta ci indica che la rappresentazione di indice j richiede uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_j$ complesso di dimensioni $2j+1$. Individuata una base di vettori ortonormali e fissato un ordinamento, ogni vettore di tale spazio ha scomposizione $|\psi\rangle = \psi_1|1\rangle + \ldots + \psi_{2j+1}|2j+1\rangle$ e può essere identificato in un vettore colonna di componenti ψ_i in C^{2j+1}, munito del prodotto scalare

$$\langle\psi|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{2j+1} \psi_j^*\phi_j \tag{13a}$$

Gli operatori lineari su $\mathcal{H}_j$ sono rappresentabili mediante matrici quadrate di ordine $2j+1$:

$$A_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle \tag{13b}$$

In particolare, la matrice rappresentativa di un operatore autoaggiunto $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ è Hermitiana, $A_{ij} = A_{ji}^*$, e la matrice rappresentativa di un operatore unitario $\hat{U}^\dagger\hat{U} = I$ è una matrice unitaria, $\sum_k U_{ki}^* U_{kj} = \delta_{ij}$.

Scegliendo la base degli autovettori $|j,m\rangle$ di $\hat{J}_3$, ordinata con autovalori decrescenti:

$$|1\rangle = |j,j\rangle \,, \ldots \; |i\rangle = |j, j-i+1\rangle \; \ldots \; |2j+1\rangle = |j,-j\rangle$$

la matrice J_3, rappresentativa di $\hat{J}_3$, assume la forma diagonale

$$J_3 = \begin{pmatrix} j & & & & \\ & j-1 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & -j \end{pmatrix} \tag{14}$$

Per scrivere le matrici J_1 e J_2 conviene dapprima scrivere J_+, con soli elementi non nulli $(J_+)_{i,i+1}$ calcolabili mediante la (1.8)

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & * & & & \\ & 0 & * & & \\ & & 0 & \ldots & \\ & & & & * \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

La matrice J_- è semplicemente la matrice aggiunta di J_+. Le matrici J_1 e J_2 sono ottenute con le formule

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad , \quad J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \tag{16}$$

Consideriamo alcune rappresentazioni di bassa dimensione.
La rappresentazione $\mathbf{j=0}$ è banale; lo spazio di Hilbert è monodimensionale, identificabile con C, e gli operatori di momento angolare coincidono con l'operatore nullo.
La rappresentazione $\mathbf{j=1/2}$ è realizzata mediante matrici 2×2 complesse, che agiscono sullo spazio C^2. Nella base degli autovettori dell'operatore $\hat{J}_3$, ordinata nella successione $|1/2,1/2\rangle$, $|1/2,-1/2\rangle$, la matrice rappresentativa di $\hat{J}_3$ è diagonale e coincide con la matrice τ_3

$$\tau_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17a}$$

L'unico elemento diverso da zero della matrice J_+ è $(J_+)_{12} = \langle 1/2,1/2|\hat{J}_+|1/2,-1/2\rangle = 1$, pertanto:

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17b}$$

da cui, mediante le (1.16), costruisco le altre due matrici di momento angolare

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{17c}$$

Si sono ritrovate la matrici $\tau_k = 1/2\sigma_k$, dove σ_1, σ_2 e σ_3 sono le matrici di Pauli. Esse sono la base lineare dell'algebra di Lie $su(2)$ e generano il gruppo unitario $SU(2)$, di cui

si è ampiamente trattato. La rappresentazione non banale $j = 1/2$ è la più semplice, e viene detta "rappresentazione fondamentale" delle relazioni di commutazione del momento angolare (1).
La rappresentazione irriducibile $\mathbf{j = 1}$ si realizza nello spazio C^3. Nella rappresentazione astratta, la base ordinata di autovettori di $\hat{J}_3$ è: $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$ e $|1,-1\rangle$. In questa base, la rappresentazione matriciale di $\hat{J}_+$ richiede il calcolo dei soli elementi di matrice:

$$(J_+)_{12} = \langle 1,1|\hat{J}_+|1,0\rangle = \sqrt{2} \quad , \quad (J_+)_{23} = \langle 1,0|\hat{J}_+|1,-1\rangle = \sqrt{2}$$

La matrice J_- è ottenuta semplicemente facendo il coniugato Hermitiano di J_+

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{18a}$$

Si ottengono immediatamente le tre matrici di momento angolare

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18b}$$

Il gruppo unitario da queste generato forma una rappresentazione del gruppo $SU(2)$ mediante matrici 3×3, parametrizzate da un angolo e da un versore. L'esplicita costruzione delle matrici può effettuarsi mediante la formula di Cayley Hamilton:

$$e^{-i\alpha \underline{n}\cdot\underline{J}} = aI + b(\underline{n}\cdot\underline{J}) + c(\underline{n}\cdot\underline{J})^2$$

Poichè gli autovalori di $\underline{n}\cdot\underline{J}$ sono 1, 0, e -1, i coefficienti a, b e c sono soluzioni del sistema che si ottiene applicando al precedente sviluppo i rispettivi autovettori di $(\underline{n}\cdot\underline{J})$: $e^{\pm i\alpha} = a \mp b + c$, $1 = a$. Oltre ai coefficienti $a = 1$, $b = -i\sin\alpha$ e $c = \cos\alpha - 1$, si devono calcolare esplicitamente le matrici $(\underline{n}\cdot\underline{J})$ e $(\underline{n}\cdot\underline{J})^2$.
La rappresentazione $j = 1$ di $SU(2)$, è strettamente legata al gruppo di matrici di $SO(3)$. Dato un vettore reale $\underline{v}$ per il gruppo delle rotazioni, a questo si associa il vettore complesso $\underline{u}$ (la "rappresentazione sferica" del vettore $\underline{v}$)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + iv_2) \\ v_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - iv_2) \end{pmatrix} = V\underline{v}, \quad V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

La matrice V è unitaria: $V^\dagger V = I$. A seguito di una rotazione $\underline{v}' = R\underline{v}$, il vettore complesso $\underline{u}$ si trasforma in $\underline{u}' = VRV^\dagger\underline{u}$, dove la matrice $U(R) = VRV^\dagger$ è unitaria. Passando alla rappresentazione esponenziale:

$$R = e^{\alpha \underline{n}\cdot\underline{A}}, \quad U(R) = e^{-i\alpha \underline{n}\cdot\underline{J}}$$

si ha l'identificazione dei generatori della rappresentazione sferica: $J_i = iVA_iV^\dagger$, che coincidono con quelli della rappresentazione unitaria $j = 1$.

Rappresentazioni irriducibili di SU(2) su polinomi.(*)

In diverse applicazioni è utile una rappresentazione irriducibile dell'algebra di SU(2) mediante operatori differenziali. Un esempio è rappresentato da equazioni differenziali "quasi integrabili", caratterizzate da operatori differenziali riconducibili a combinazioni di generatori di SU(2), per i quali parte dello spettro è ottenibile esattamente con tecniche algebriche.

Si considerino i polinomi $p(z)$ nella variabile complessa z di grado non superiore a $2j$. I monomi z^{m+j}, $-j \leq m \leq j$, formano una base, in cui l'operatore di derivazione rispetto a z abbassa il grado di una unità e annulla il monomio di grado zero. Essi sono inoltre una base di autovettori per l'operatore che deriva e moltiplica per z. Con questa idea, si costruisce la seguente rappresentazione irriducibile di dimensione $2j+1$ dell'algebra di SU(2):

$$\tau_3 = z\frac{d}{dz} - j, \quad \tau_- = \frac{d}{dz}, \quad \tau_+ = 2jz - z^2\frac{d}{dz} \tag{20}$$

Gli operatori sono definiti sullo spazio di Hilbert di polinomi di grado non superiore a $2j$, con prodotto interno:

$$\langle p|q\rangle = \frac{2j+1}{\pi}\int d^2z(1+|z|^2)^{-2(j+1)}p(z)^*q(z) \tag{21}$$

dove $d^2z = d(Rez)d(Imz)$. Rispetto a questo prodotto interno l'operatore τ_3 è autoaggiunto e $\tau_+^\dagger = \tau_-$. La base ortonormale di autovettori di τ_3 è data dai monomi

$$u_m(z) = \begin{pmatrix} 2j \\ j+m \end{pmatrix}^{1/2} z^{j+m} \tag{22}$$

A partire da $\tau_\pm$ si ottengono gli operatori

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(1-z^2)\frac{d}{dz} + jz, \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(1-iz^2)\frac{d}{dz} + ijz \tag{23}$$

Bibliografia: [1] Perelomov, "Coherent States", Springer-Verlag; [2] B.L.Burrows, M.Cohen and T.Feldmann: "A Lie algebraic study of some Schrödinger equations", J. Math. Phys. 35 (1994) 5572.

Regole di selezione (*)

Il carattere scalare o vettoriale di un operatore comporta dei vincoli molto forti sui suoi elementi di matrice in una base di autovettori comuni a $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_3$. Indichiamo i vettori di tale base con i simboli $|j,m,\alpha\rangle$, dove α è un indice di degenerazione:

$$\hat{J}^2|j,m,\alpha\rangle = j(j+1)|j,m,\alpha\rangle, \qquad \hat{J}_3|j,m,\alpha\rangle = m|j,m,\alpha\rangle \tag{24}$$

I vincoli, noti come "regole di selezione", esprimono delle condizioni necessarie perché l'elemento di matrice $\langle j',m',\alpha'|\ldots|j,m,\alpha\rangle$ sia diverso da zero, attraverso relazioni tra i numeri j',m' e j,m.

Per un **operatore scalare** le relazioni $[\hat{J}^2, \hat{A}] = 0$ e $[\hat{J}_3, \hat{A}] = 0$ forniscono immediatamente:

$$(j - j')\langle j', m', \alpha'|\hat{A}|j, m, \alpha\rangle = 0, \quad (m - m')\langle j', m', \alpha'|\hat{A}|j, m, \alpha\rangle = 0 \tag{25}$$

valgono pertanto le regole di selezione $\Delta j = 0$, $\Delta m = 0$.
Per un **operatore vettoriale**, le regole di selezione sui numeri m' ed m si ottengono facilmente a partire dalle relazioni

$$[\hat{J}_3, \hat{A}_3] = 0, \quad [\hat{J}_3, \hat{A}_\pm] = \pm\hat{A}_\pm, \quad \hat{A}_\pm = \hat{A}_1 \pm i\hat{A}_2 \tag{26}$$

Prendendo gli elementi di matrice si perviene a:

$$(m' - m)\langle j', m', \alpha'|\hat{A}_3|j, m, \alpha\rangle = 0, \quad (m' - m \mp 1)\langle j', m', \alpha'|\hat{A}_\pm|j, m, \alpha\rangle = 0$$

e quindi alle regole di selezione $\Delta m = 0$ per la componente che commuta con $\hat{J}_3$, e $\Delta m = \pm 1$ per le altre due componenti.
La deduzione di una regola di selezione per i numeri j e j' è più complicata. Si dimostra la relazione generale

$$[\hat{J}^2, [\hat{J}^2, \hat{A}_i]] = 2\hat{J}^2\hat{A}_i + 2\hat{A}_i\hat{J}^2 - 4(\underline{\hat{A}} \cdot \underline{\hat{J}})\hat{J}_i \tag{27}$$

Prendendo gli elementi di matrice si ottiene:

$$\{[j(j+1) - j'(j'+1)]^2 - 2[j(j+1) + j'(j'+1)]\}\langle j'm'\alpha'|\hat{A}_\ell|jm\alpha\rangle = -4\langle j'm'\alpha'|\hat{J}_\ell(\underline{\hat{A}} \cdot \underline{\hat{J}})|jm\alpha\rangle$$

Se $j \neq j'$ il secondo membro è nullo, pertanto l'elemento di matrice dell'operatore $\hat{A}_\ell$ non è necessariamente nullo se $[j(j+1) - j'(j'+1)]^2 - 2[j(j+1) + j'(j'+1)] = 0$, con soluzione $|j - j'| = 1$. Se $j = j'$, osservando che gli elementi di matrice dell'operatore scalare $\underline{\hat{A}} \cdot \underline{\hat{J}}$ non dipendono da m e m', si ha:

$$j(j+1)\langle jm'\alpha'|\hat{A}_\ell|jm\alpha\rangle = \sum_{\alpha''}\langle jm'\alpha'|\hat{J}_\ell|jm\alpha''\rangle\langle\alpha''j|\underline{\hat{A}} \cdot \underline{\hat{J}}|j\alpha\rangle \tag{28}$$

Complessivamente, per gli elementi di matrice in una base di autovettori comuni a $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_3$ di una terna vettoriale valgono le regole di selezione

$$\Delta m = 0, \pm 1 \qquad \Delta j = 0, \pm 1 \tag{29}$$

Regole di selezione possono più in generale essere individuate per "operatori tensoriali irriducibili", che sotto l'azione del gruppo delle rotazioni si trasformano secondo rappresentazioni irriducibili di SU(2). Per questi operatori vale il teorema di Wigner-Eckart, per il quale è opportuno premettere la trattazione della somma di momenti angolari.

OPERATORI TENSORIALI (*)

La Rappresentazione Aggiunta

A partire dalla rappresentazione unitaria $\hat{U}(R)$ del gruppo delle rotazioni sui vettori dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, si costruisce, come già illustrato nella premessa al §2, la rappresentazione aggiunta sugli operatori lineari su $\mathcal{H}$. Ad ogni rotazione R corrisponde la trasformazione $\hat{H} \to \hat{H}_R$, dove:

$$\hat{H}_R = \hat{U}(R)^\dagger \hat{H} \hat{U}(R) \tag{1}$$

Gli operatori $\hat{H}$ e $\hat{H}_R$ hanno il medesimo spettro e, se il primo è autoaggiunto o è un proiettore o un operatore unitario, anche il trasformato lo è. Si dimostra la proprietà

$$[\hat{A}, \hat{B}]_R = [\hat{A}_R, \hat{B}_R] \tag{2}$$

per cui le regole di commutazione caratteristiche delle osservabili, quali il momento lineare o angolare, non dipendono dal sistema di riferimento.
La rappresentazione sugli operatori è unitaria quando sia ristretta allo spazio di operatori di Hilbert-Schmidt, $HS(\mathcal{H})$, con prodotto interno

$$(\hat{H}_1, \hat{H}_2) = \mathrm{Tr}(\hat{H}_1^\dagger \hat{H}_2) \tag{3}$$

Tale spazio è costituito dagli operatori lineari limitati $\hat{H}$ per i quali esiste finita la quantità $\mathrm{Tr}(H^\dagger H)$. Introdotta una base ortonormale $\{\phi_i\}$ in $\mathcal{H}$, all'operatore $\hat{H}$ si associa la matrice $H_{ij} = \langle \phi_i | \hat{H} \phi_j \rangle$; la traccia di un operatore è la traccia della matrice corrispondente, e ha le stesse proprietà formali (per dettagli si consulti il già citato Reed Simon).
I generatori della rappresentazione aggiunta sono i super-operatori

$$\mathcal{J}_k = [\hat{J}_k, \cdot] \tag{4}$$

per i quali si verificano le regole di commutazione del momento angolare, utilizzando la proprietà di Jacobi:

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k \tag{6}$$

I super-operatori sono autoaggiunti rispetto al prodotto interno di Hilbert-Schmidt: $([\hat{J}_k, \hat{A}], \hat{B}) = (\hat{A}, [\hat{J}_k, \hat{B}])$.
Si costruisce inoltre il super-operatore $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + \mathcal{J}_3^2$, con azione

$$\mathcal{J}^2(\hat{H}) = \hat{J}^2 \hat{H} + \hat{H} \hat{J}^2 - 2 \sum_k \hat{J}_k \hat{H} \hat{J}_k \tag{7}$$

Per un operatore scalare:

$$\mathcal{J}^2(\hat{H}) = 0, \quad \mathcal{J}_3(\hat{H}) = 0, \quad \mathcal{J}_\pm(\hat{H}) = 0 \tag{8}$$

Per un operatore vettoriale (si veda l'esercizio 4 nel par. 2):

$$\mathcal{J}^2(\hat{A}_i) = 2\hat{A}_i, \quad \mathcal{J}_i(\hat{A}_j) = i\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{A}_k \tag{9}$$

Abbiamo studiato per queste due categorie di operatori delle importanti regole di selezione. Esse possono essere estese a "operatori tensoriali irriducibili", che sotto l'azione del gruppo delle rotazioni si trasformano secondo rappresentazioni irriducibili di SU(2).

Operatori tensoriali
Un operatore tensoriale (per il gruppo delle rotazioni) è, in generale, un operatore caratterizzato da indici che, sotto l'azione del gruppo delle rotazioni, si trasforma come un tensore:

$$\hat{U}(R)^\dagger \hat{T}_{i_1\dots i_n}\hat{U}(R) = \sum_{j_1\cdots j_n} R_{i_1 j_1}\dots R_{i_n j_n}\hat{T}_{j_1\dots j_n} \tag{10}$$

Questa legge comporta che, per qualsiasi coppia di vettori in $\mathcal{H}$, il prodotto interno $\langle\psi|\hat{T}_{i_1\dots i_n}\phi\rangle$ è un tensore di rango n per il gruppo delle rotazioni. Passando al sistema di riferimento ruotato gli elementi ψ e ϕ si trasformano secondo l'operatore unitario $\hat{U}(R)$, e per la (10) si ha la relazione tra gli elementi di matrice nei due riferimenti:

$$\langle\psi|\hat{T}_{i_1\dots i_n}\phi\rangle_R = \sum_{j_1\cdots j_n} R_{i_1 j_1}\dots R_{i_n j_n}\langle\psi|\hat{T}_{j_1\dots j_n}\phi\rangle \tag{11}$$

Abbiamo già considerato i casi importanti di operatore scalare e operatore vettoriale. La legge di trasformazione tensoriale con due o più indici non è in generale descritta da una rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni. Il tensore può essere scomposto nella somma di tensori più semplici, ciascuno dei quali può essere organizzato in un vettore che si trasforma secondo una rappresentazione irriducibile del gruppo.
Siamo condotti alla definizione di **operatore tensoriale irriducibile** di rango s: esso consiste di un vettore $\hat{T}^s$ di $2s+1$ componenti $\hat{T}(s,m)$, $m=-s\dots s$, che sotto l'azione di una rotazione R, si trasforma secondo la matrice unitaria della rappresentazione irriducibile di indice s del gruppo delle rotazioni:

$$\hat{U}(R)^\dagger \hat{T}(s,m)\hat{U}(R) = \sum_{k=-s}^{s} D^s_{m,k}(R)\hat{T}(s,k) \tag{12}$$

Passando ai generatori delle rappresentazioni, si ha la caratterizzazione equivalente:

$$\mathcal{J}_3\hat{T}(s,m) = m\,\hat{T}(s,m) \tag{13a}$$
$$\mathcal{J}_\pm\hat{T}(s,m) = \sqrt{(s\mp m)(s\pm m+1)}\,\hat{T}(s,m\pm 1) \tag{13b}$$

Come conseguenza:

$$\mathcal{J}^2\hat{T}(s,m) = s(s+1)\,\hat{T}(s,m) \tag{13c}$$

Il caso di operatore scalare corrisponde a $s = 0$. Gli operatori vettoriali sono operatori tensoriali irriducibili di rango 1: se $\underline{\hat{A}}$ è una terna vettoriale di operatori, si costruisce il vettore $\hat{A}(1,m)$ di componenti (si ricorda la rappresentazione sferica di un vettore)

$$\hat{A}(1,0) = \hat{A}_3\,, \qquad \hat{A}(1,\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{A}_1 \pm i\hat{A}_2) \tag{14}$$

che si trasforma secondo la rappresentazione unitaria irriducibile $s = 1$.
Esaminiamo in dettaglio il caso di un operatore tensoriale a due indici, per il quale la relazione (10), scritta in termini di generatori è:

$$[\hat{J}_i, \hat{T}_{jk}] = i \sum_{\ell} (\epsilon_{ij\ell} \hat{T}_{\ell k} - \epsilon_{i\ell k} \hat{T}_{j\ell}) \tag{15}$$

Un tensore a due indici è scomponibile nella somma di tre tensori, antisimmetrico, multiplo dell'identità, simmetrico a traccia nulla, che sono in sottospazi di dimensione rispettivamente 3, 1, 5, invarianti per l'azione del gruppo delle rotazioni e sui quali l'azione del gruppo è data dalle rappresentazioni unitarie irriducibili $j = 1$, $j = 0$ e $j = 2$.
La scomposizione è la seguente:

$$\hat{T}_{ij} = \hat{A}_{ij} + \hat{S}_{ij} + \hat{t}\delta_{ij} \tag{16a}$$

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{T}_{ij} - \hat{T}_{ji})\,, \quad \hat{t} = \frac{1}{3}(\hat{T}_{11} + \hat{T}_{22} + \hat{T}_{33})\,, \quad \hat{S}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{T}_{ij} + \hat{T}_{ji}) - \hat{t}\delta_{ij} \tag{16b}$$

A partire dai tensori $\hat{A}_{ij}$ e $\hat{S}_{ij}$ si costruiscono i vettori $\hat{A}(1,m)$ e $\hat{S}(2,m)$ di tre e cinque componenti

$$\hat{A}(1) = \begin{pmatrix} \hat{A}_{13} + \hat{A}_{23} \\ \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{13} - \hat{A}_{23} \end{pmatrix} \qquad \hat{S}(2) = \begin{pmatrix} 2\hat{S}_{12} + \hat{S}_{11} - \hat{S}_{22} \\ \hat{S}_{13} + \hat{S}_{23} \\ \hat{S}_{33} \\ \hat{S}_{13} - \hat{S}_{23} \\ 2\hat{S}_{12} - \hat{S}_{11} + \hat{S}_{22} \end{pmatrix} \tag{18}$$

I tre vettori $\hat{A}(1)$, $\hat{S}(2)$ e $\hat{t}$ sono operatori tensoriali di rango 1,2,0.

Le regole di selezione per gli operatori tensoriali saranno discusse successivamente alla teoria della somma di momenti angolari.

§7 LE FUNZIONI ARMONICHE SFERICHE

Ritorniamo alla rappresentazione unitaria del gruppo delle rotazioni nello spazio di Hilbert $L^2(R^3)$. La proprietà delle rotazioni di non modificare il modulo r del vettore x, rende conveniente il passaggio a coordinate sferiche $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$:

$$x_1 = r \sin\theta \cos\phi \quad , \quad x_2 = r \sin\theta \sin\phi \quad , \quad x_3 = r \cos\theta \tag{1}$$

Le espressioni degli operatori di momento angolare sono ($\hbar = 1$):

$$\hat{L}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{2a}$$

$$\hat{L}_\pm = e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\mathrm{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{2b}$$

$$\hat{L}_3 = -i\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{2c}$$

L'espressione del generatore delle rotazioni attorno all'asse 3 è prevedibile, in quanto genera traslazioni nella variabile azimutale ϕ. I generatori risultano agire sulle sole coordinate angolari, mentre la coordinata r è irrilevante. In ragione di ciò, gli stessi operatori, vengono ora studiati nello spazio di Hilbert $L^2(\Omega)$, dove Ω è l'angolo solido. Esso è composto di funzioni $f(\theta,\phi)$ per le quali ha valore finito la norma Hilbertiana risultante dal seguente prodotto interno

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta f(\theta,\phi)^* g(\theta,\phi) \tag{3}$$

In base ai risultati della teoria generale, lo spazio di Hilbert $L^2(\Omega)$ risulta decomponibile nella somma ortogonale di sottospazi invarianti su ciascuno dei quali gli operatori $\hat{L}_i$ operano irriducibilmente. In ciascun sottospazio l'operatore $\hat{L}^2$ opera moltiplicativamente per il fattore $\ell(\ell+1)$, e $\hat{L}_3$ possiede una base di $2\ell+1$ autofunzioni con autovalori m che variano tra $-\ell$ e ℓ, connesse dall'applicazione degli operatori $\hat{L}_\pm$.
Le autofunzioni comuni a $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_3$ sono le funzioni armoniche sferiche

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell m} \tag{4a}$$

$$\hat{L}_3 Y_{\ell m} = m Y_{\ell m} \tag{4b}$$

Fissato ℓ, le autofunzioni $Y_{\ell,m}$, con $m = \ell, \ell-1, \ldots, -\ell$, sono una base per l'autospazio $\mathcal{S}_\ell$. Essendo scelte normalizzate, si scrive:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi) Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \delta_{\ell',\ell}\delta_{m',m} \tag{5}$$

L'equazione (4b) implica che le funzioni armoniche sferiche hanno la struttura

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \Theta_{\ell,m}(\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi} \tag{6}$$

La richiesta di continuità della funzione nel punto $\phi = 0$, da identificarsi con $\phi = 2\pi$, implica che l'autovalore m è un intero, e quindi anche ℓ può solo assumere valori interi. Le funzioni

$$u_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \quad , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{7}$$

formano un sistema ortonormale completo nello spazio $L^2(0, 2\pi)$:

$$\int_0^{2\pi} d\phi u_m(\phi)^* u_n(\phi) = \delta_{m,n} \qquad \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} = \delta(\phi - \phi') \tag{8}$$

Inserendo la forma generale (6) nell'equazione (4a) si ottiene

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\Theta_{\ell,m}}{\partial\theta}\right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta_{\ell,m} = \ell(\ell+1)\Theta_{\ell,m} \tag{9}$$

Faremo uso dei risultati della teoria generale del momento angolare per determinare la struttura delle funzioni armoniche sferiche. Dato che ℓ è un numero intero, in ogni sottospazio $\mathcal{S}_\ell$ è presente una autofunzione con $m = 0$. Utilizzando gli operatori di innalzamento ed abbassamento si ottengono i rimanenti autostati:

$$Y_{\ell,m} = \sqrt{\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} (\hat{L}_+)^m Y_{\ell,0} \tag{10a}$$

$$Y_{\ell,-m} = \sqrt{\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} (\hat{L}_-)^m Y_{\ell,0} \tag{10b}$$

La ricerca della forma delle armoniche sferiche mediante le eq. (10) richiede il calcolo di $Y_{\ell,0}$. Si deve pertanto determinare l'autofunzione $\Theta_{\ell,0}$, soluzione dell'equazione (9) con $m = 0$. Ponendo $\xi = \cos\theta$ si ottiene l'equazione

$$\left[(1 - \xi^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \ell(\ell+1)\right]\Theta_{\ell,0}(\xi) = 0 \tag{11}$$

Si ricerca la soluzione nella forma di uno sviluppo in serie nell'origine, ottenendo una relazione di ricorrenza per i coefficienti

$$\Theta_{\ell,0}(\xi) = \sum_s c_s \xi^s \quad , \quad c_{s+2} = \frac{s(s+1) - \ell(\ell+1)}{(s+1)(s+2)} c_s$$

Essa comporta automaticamente $c_{\ell+2} = 0$. Per garantire la regolarità della soluzione nei punti ± 1 bisogna scegliere le costanti arbitrarie c_0 e c_1 in modo da assicurare che la soluzione sia un polinomio. Diversamente la serie risulta divergente nei punti $\xi = \pm 1$. Pertanto, se ℓ è pari, si pone $c_0 \neq 0$ e $c_1 = 0$; se ℓ è dispari si pone $c_0 = 0$ e $c_1 \neq 0$. In

entrambi i casi si ottiene un polinomio di grado ℓ con parità definita. A meno di un fattore numerico c_ℓ, il polinomio é un polinomio di Legendre: $\Theta_{\ell,0}(\xi) = c_\ell P_\ell(\xi)$.
I polinomi di Legendre coincidono con il sistema di funzioni ottenute ortogonalizzando in $L^2(-1,1)$ i monomi $1, \xi, \ldots, \xi^n, \ldots$, che evidentemente formano una base, e normalizzandoli con la condizione $P_\ell(1) = 1$. I polinomi di grado più basso sono:

$$P_0(\xi) = 1 \qquad P_1(\xi) = \xi \qquad P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) \qquad P_3(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi)$$

La relazione di ortogonalità in $L^2(-1,1)$ si scrive

$$\int_{-1}^{1} d\xi P_m(\xi) P_n(\xi) = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n} \tag{12}$$

In conclusione siamo pervenuti all'espressione normalizzata

$$Y_{\ell,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta) \tag{13}$$

Mediante l'applicazione successiva dell'operatore di innalzamento si possono ora costruire le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}$ con $m > 0$, date dalla $(10a)$. Si calcola:

$$\left[e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\mathrm{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]^m P_\ell(\cos\theta) =$$

$$= e^{im\phi}\left[\frac{d}{d\theta} - (m-1)\mathrm{cotg}\theta\right]\left[\frac{d}{d\theta} - (m-2)\mathrm{cotg}\theta\right]\ldots\left[\frac{d}{d\theta} - \mathrm{cotg}\theta\right]\frac{d}{d\theta}P_\ell(\cos\theta) =$$

$$= e^{im\phi}\left[\sin^{m-1}\theta\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\sin^{m-1}\theta}\right]\ldots\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\sin\theta}\right]\frac{d}{d\theta}P_\ell(\cos\theta) =$$

$$= e^{im\phi}\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^m P_\ell(\cos\theta)$$

Si introducono le funzioni associate di Legendre, legate ai polinomi di Legendre dalla relazione

$$P_\ell^m(\xi) = (-1)^m(1-\xi^2)^{m/2}\frac{d^m}{d\xi^m}P_\ell(\xi) \tag{14}$$

Le funzioni associate di Legendre sono soluzioni dell'equazione differenziale (20), riscritta nella variabile $\xi = \cos\theta$

$$(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2}P_\ell^m(\xi) - 2\xi\frac{d}{d\xi}P_\ell^m(\xi) - \frac{m^2}{1-\xi^2}P_\ell^m(\xi) + \ell(\ell+1)P_\ell^m(\xi) = 0 \tag{15}$$

e, per m fisso, sono un sistema ortogonale completo di funzioni in $L^2(-1,1)$. La funzione armonica sferica per $m \geq 0$ è pertanto determinata:

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

Per le armoniche sferiche $Y_{\ell,-m}$ si procede come indicato dall'equazione ($10b$). In modo analogo al calcolo precedente:

$$\left[e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+i\text{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]^m P_\ell(\cos\theta)=(-1)^m e^{-im\phi}\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^m P_\ell(\cos\theta)$$

In questo caso sopravvive un fattore $(-1)^m$:

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\phi)=(-1)^m\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

I due risultati possono essere riuniti in un'unica formula:

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi)=(-1)^{(|m|-m)/2}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}P_\ell^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{16}$$

Si riporta l'importante proprietà di parità

$$Y_{\ell,m}(\pi-\theta,\pi+\phi)=(-1)^\ell Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{17}$$

Si elencano le armoniche sferiche con $\ell=0,1$:

$$Y_{0,0}(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{1,0}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{1,\pm1}(\theta,\phi)=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$$

§8. RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

In questa appendice sono raccolti diversi risultati di utilità generale della teoria delle matrici: il polinomio caratteristico e il teorema di Cayley Hamilton, la traccia, il commutatore di matrici, l'esponenziale e la formula di Baker-Campbell-Hausdorff.

Definiamo la notazione: data una matrice M, in generale a elementi complessi, si indica con: M^t la matrice trasposta: $(M^t)_{ij} = M_{ji}$; con M^* la coniugazione complessa di M: $(M^*)_{ij} = (M_{ij})^*$; con $M^\dagger$ la coniugazione Hermitiana di M: $M^\dagger = (M^t)^*$. Se la matrice è invertibile, si indica con M^{-1} la matrice inversa e con $M^c = (M^t)^{-1}$ la matrice controgradiente. Le varie operazioni che a M associano M^t, M^*, $M^\dagger$, M^{-1} e M^c commutano e sono involutive, cioè iterate due volte forniscono M.

Il polinomio caratteristico di una matrice

Data una generica matrice reale o complessa, di ordine n, l'equazione in C^n

$$M\underline{u} = \lambda \underline{u} \tag{1}$$

ha soluzioni non banali $\underline{u}^{(k)}$, $k = 1 \dots n$ in corrispondenza degli n zeri, gli autovalori $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, del polinomio caratteristico della matrice:

$$\det(\lambda I - M) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_n = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k) \tag{2}$$

Dallo sviluppo del determinante si ottengono le espressioni dei coefficienti p_i del polinomio caratteristico in termini degli elementi di matrice; gli stessi coefficienti sono anche ottenuti dallo sviluppo del prodotto che coinvolge gli autovalori. In particolare si trovano le importanti relazioni:

$$p_1 = -\sum_{i=1}^{n} M_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad p_n = (-1)^n \det M = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{3}$$

Come conseguenza della proprietà $\det(AB) = \det A \det B$, il polinomio caratteristico è invariante per trasformazioni di similitudine $M \to GMG^{-1}$, dove G è una arbitraria matrice invertibile; i coefficienti p_i del polinomio e gli autovalori sono pertanto quantità invarianti.

Per una generica matrice vale l'importante **teorema di Cayley-Hamilton** che asserisce che la matrice stessa annulla il suo polinomio caratteristico:

$$M^n + p_1 M^{n-1} + \dots + p_n = 0 \tag{4}$$

Una conseguenza del teorema è che una funzione della matrice $f(M)$ è sempre riconducibile a un polinomio di grado $n-1$:

$$f(M) = f_0 I + f_1 M + \dots + f_{n-1} M^{n-1} \tag{5}$$

I coefficienti possono essere determinati facilmente osservando che $f(M)$ ha gli stessi autovettori $\underline{u}^{(i)}$ di M, con autovalori $f(\lambda_i)$. Applicando le due espressioni per f agli autovettori di M si perviene al sistema lineare

$$f(\lambda_i) = f_0 + f_1\lambda_i + \ldots + f_{n-1}\lambda_i^{n-1} \qquad i = 1\ldots n \tag{6}$$

che, scritta in forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \\ f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

coinvolge una matrice di coefficienti nota come matrice di Vandermonde. L'espressione del determinante è $\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)$.

Fattorizzazione spettrale di una matrice. Si introducono la matrice U, le cui colonne sono gli autovettori normalizzati in C^n di M, e la matrice diagonale degli autovalori Λ:

$$U_{ik} = u_i^{(k)}, \qquad \Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$$

l'equazione (1) si scrive $MU = U\Lambda$ e, se $\det U \neq 0$, si ottiene la fattorizzazione spettrale della matrice

$$M = U\Lambda U^{-1} \tag{7}$$

Se la matrice M è reale simmetrica o Hermitiana, si dimostra facilmente che gli autovalori λ_i sono reali e gli autovettori, rispettivamente in R^n e C^n, corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.
Dim.: siano $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ due autovettori della matrice Hermitiana $H = H^\dagger$, corrispondenti agli autovalori λ_1 e λ_2. Utlizzando il prodotto scalare in C^n: $\lambda_2^*\langle u_2|u_1\rangle = \langle Hu_2|u_1\rangle = \langle u_2|Hu_1\rangle = \lambda_1\langle u_2|u_1\rangle$. Pertanto: $(\lambda_2^* - \lambda_1)\langle u_2|u_1\rangle = 0$ da cui segue che autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali; se invece $u_1 = u_2$, si ottiene che $\lambda_1^* = \lambda_1$.
Quando due o più autovalori coincidono, esiste arbitrarietà nella costruzione degli autovettori, che possono tuttavia essere scelti normalizzati e ortogonali. Queste proprietà comportano che la matrice U degli autovettori di una matrice reale simmetrica o complessa Hermitiana, siano rispettivamente ortogonale ($U^tU = I$) o unitaria ($U^\dagger U = I$).

Traccia di una matrice
E' utile introdurre la nozione di Traccia di una matrice

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} \tag{8}$$

L'operazione di traccia è lineare e si dimostra facilmente la "proprietá ciclica": $\mathrm{Tr}(M_1M_2) = \mathrm{Tr}(M_2M_1)$. In presenza di pù fattori: $\mathrm{Tr}(M_1M_2\ldots M_{r-1}M_r) =$

$\mathrm{Tr}(M_2 M_3 \dots M_r M_1)$ etc. Dalla proprietà ciclica discende che la traccia di una matrice è invariante per trasformazioni di similitudine:

$$\mathrm{Tr}(GMG^{-1}) = \mathrm{Tr}(M) \tag{9}$$

Per la precedente discussione sul polinomio caratteristico, la traccia di una matrice coincide con la somma dei suoi autovalori; in generale:

$$\mathrm{Tr}(M^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \tag{10}$$

Esse valgono per ogni k, ma solo le relazioni per $k \le n$ sono indipendenti e forniscono n quantità invarianti per trasformazioni di similitudine della matrice M, alternative ai coefficienti p_k.

Commutatore di matrici

Nell'algebra delle matrici quadrate $n \times n$ si definisce il commutatore di due matrici:

$$[M_1, M_2] = M_1 M_2 - M_2 M_1 \tag{11}$$

Oltre alle evidenti proprietà di bilinearità e antisimmetria valgono l'identità di Jacobi:

$$[[M_1, M_2], M_3] + [[M_3, M_1], M_2] + [[M_2, M_3], M_1] = 0 \tag{12}$$

e la proprietà distributiva rispetto al prodotto

$$[M_1 M_2, M_3] = M_1 [M_2, M_3] + [M_1, M_3] M_2 \tag{13}$$

Se, per una fissata matrice Q, si introduce l'operatore $\mathcal{D}_Q : M \to [M, Q]$, si verifica che le proprietà precedentemente enunciate caratterizzano l'operatore $\mathcal{D}_Q$ come una "derivazione". Per l'identità di Jacobi, l'azione successiva di due derivazioni non dipende dal loro ordine se le matrici associate commutano.
Una utile e ovvia osservazione è che la traccia di un commutatore è sempre nulla. Ancora, si dimostra immediatamente la proprietà

$$G^{-1}[M, Q]G = [G^{-1}MG, G^{-1}QG] \tag{14}$$

da cui consegue che, se due matrici commutano e almeno una delle due ha spettro non degenere, le due matrici hanno in comune l'insieme di autovettori.
Dim.: sia $Q = GKG^{-1}$, dove G è la matrice degli autovettori e K la matrice diagonale degli autovalori $\{k_1 \dots k_n\}$ di Q. Per la (14), $[M, Q] = 0$ se e solo se $[G^{-1}MG, K] = 0$. Scrivendo esplicitamente le componenti del commutatore, dove per brevità si pone $M' = G^{-1}MG$: $0 = [M', K]_{ij} = M'_{ij}(k_i - k_j)$, da cui segue $M'_{ij} = 0$ se $k_i \neq k_j$.
Se K ha tutti gli elementi diagonali diversi, anche $G^{-1}MG$ é diagonale e coincide con la matrice degli autovalori di M, con autovettori dati dalle colonne di G.

In generale, se K ha autovalori k_1 ripetuto ν_1 volte, ... k_r ripetuto ν_r volte ($\nu_1+\ldots+\nu_r = n$), la matrice M' ha struttura diagonale a blocchi quadrati, di dimensioni $\nu_1,\ldots,\nu_r$. Diagonalizzando indipendentemente ciascun blocco si costruiscono le esplicite combinazioni lineari di autovettori di Q con stesso autovalore k, che sono anche autovettori di M.

Esponenziale di una matrice

Una funzione molto importante è l'esponenziale di una matrice M. Essa è una matrice della stessa dimensione di M definita dalla serie

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k \tag{15}$$

che è sempre convergente. Infatti, sia $\mu = max_{ij}|M_{ij}|$; si verifica facilmente che $|(M^k)_{ij}| \leq (1/N)(N\mu)^k$, pertanto $|(\exp M)_{ij}| \leq (1/N)\exp(N\mu)$.
Ai fini pratici del calcolo, ci si riconduce al calcolo di un polinomio finito, come già illustrato, oppure si utilizza la rappresentazione spettrale $\exp M = U(\exp\Lambda)U^{-1}$, dove $\exp\Lambda$ è la matrice diagonale degli autovalori $\exp\lambda_i$ e U è la matrice degli autovettori di M. In particolare, è di immediata verifica l'importante relazione

$$\det e^M = e^{\mathrm{Tr} M} \tag{16}$$

Una proprietà della mappa esponenziale è la seguente, dimostrabile attraverso la definizione, valida per ogni matrice G invertibile

$$e^{GMG^{-1}} = Ge^M G^{-1} \tag{17}$$

Per il prodotto di due matrici esponenziali vale l'importante formula di **Baker-Campbell-Hausdorff**, di cui si omette la dimostrazione:

$$e^{M_1} e^{M_2} = e^{M_1+M_2+\frac{1}{2}[M_1,M_2]+\frac{1}{12}([M_1,[M_1,M_2]]+[M_2,[M_2,M_1]])+\ldots} \tag{18}$$

Se gli elementi di matrice sono molto minori di uno, la formula può essere troncata. Il troncamento diventa esatto in una gerarchia di situazioni; quelle più semplici sono:
1) $[M_1,M_2] = 0$ allora $\exp(M_1)\exp(M_2) = \exp(M_1+M_2)$
2) $[M_1,M_2] \neq 0$ ma $[M_1,M_2]$ commuta con M_1 e M_2 allora:
$\exp(M_1)\exp(M_2) = \exp(M_1+M_2+\frac{1}{2}[M_1,M_2])$

Algebra di Lie

Le matrici reali antisimmetriche oppure le matrici Hermitiane formano spazi lineari chiusi rispetto all'operazione binaria di commutatore di matrici (nel secondo caso il commutatore va moltiplicato per l'unità immaginaria). Essi sono due esempi di algebre di Lie, rilevanti per i gruppi $SO(N)$ e $U(N)$.
Uno spazio lineare $\mathcal{A}$ su R o C costituisce un'**Algebra di Lie** se é chiuso rispetto ad una operazione binaria, il prodotto di Lie a_1, $a_2 \to a_1 * a_2$, con le proprietá

$$(\lambda a_1 + a_2) * a_3 = \lambda(a_1 * a_3) + (a_2 * a_3) \qquad a_1 * (\lambda a_2 + a_3) = \lambda(a_1 * a_2) + (a_1 * a_3) \tag{19a}$$

$$a * a = 0 \qquad \forall a \in \mathcal{A} \tag{19b}$$

$$(a_1 * a_2) * a_3 + (a_2 * a_3) * a_1 + (a_3 * a_1) * a_2 = 0 \tag{19c}$$

L'ultima relazione e' nota come identitá di Jacobi. Le prime due proprietá implicano l'antisimmetria (basta svolgere $0 = (a_1 + a_2) * (a_1 + a_2)$):

$$a_1 * a_2 = -a_2 * a_1 \tag{20}$$

Sia ora $t_1, t_2, \dots t_n$ una base lineare in $\mathcal{A}$. Sviluppando nella base il prodotto di Lie tra due elementi della base

$$t_i * t_j = \sum_k f_{ijk} t_k \tag{21}$$

si ottengono le "costanti di struttura" dell'algebra di Lie relativamente alla base $\{t_i\}$. Le proprietá generali del prodotto di Lie implicano le seguenti sulle costanti di struttura:

$$f_{iik} = 0, \quad f_{ijk} = -fjik, \quad \sum_k (f_{ijk} f_{krm} + f_{jrk} f_{kmi} + f_{rmk} f_{kij}) = 0 \tag{22}$$

Appendice: I polinomi di Legendre.

Lo studio delle proprietà dei polinomi di Legendre può convenientemente partire dallo sviluppo della funzione generatrice, rilevante nello studio delle funzioni armoniche:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(\xi) \tag{A.1}$$

valida per $|t|<1$ e $|\xi|\le 1$. Da questa relazione risulta che $P_\ell(\xi)$ è un polinomio di grado ℓ in ξ. Per $\xi=1$ si deve ottenere a destra la serie geometrica, per cui $P_\ell(1)=1$. Il cambiamento $\xi\to-\xi$ è equivalente a porre $t\to -t$, pertanto $P_\ell(-\xi)=(-1)^\ell P_\ell(\xi)$: i polinomi hanno la stessa parità di ℓ.

Derivando la relazione (A.1) rispetto a t si ottiene:

$$(\xi-t)\sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(\xi) = (1+t^2-2t\xi)\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell t^{\ell-1} P_\ell(\xi)$$

Uguagliando i coefficienti di uguali potenze di t si ottiene la relazione di ricorrenza

$$(1+2\ell)\xi P_\ell(\xi) = (\ell+1)P_{\ell+1}(\xi) + \ell P_{\ell-1}(\xi) \tag{A.2}$$

da cui, per derivazione rispetto a ξ,

$$(\ell+1)P'_\ell(\xi) + \ell P'_\ell(\xi) = (1+2\ell)P_\ell(\xi) + (1+2\ell)\xi P'_\ell(\xi)$$

Derivando invece la (A.1) rispetto a ξ, con lo stesso procedimento usato per ottenere la (A.2) si perviene a:

$$P'_{\ell+1}(\xi) + P'_{\ell-1}(\xi) = P_\ell(\xi) + 2\xi P'_\ell(\xi)$$

Questa relazione e la precedente, eliminando la derivata del polinomio di grado ℓ, forniscono:

$$P'_{\ell+1}(\xi) - P'_{\ell-1}(\xi) = (1+2\ell)P_\ell(\xi) \tag{A.3}$$

Dimostriamo ora che i polinomi sono ortogonali in $L^2(-1,1)$:

$$\int_{-1}^{1} d\xi P_\ell(\xi)P_m(\xi) = h_\ell \delta_{\ell m} \qquad h_\ell = \frac{2}{2\ell+1} \tag{A.4}$$

Utilizzando la funzione generatrice si calcola:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} t^\ell s^m \int_{-1}^{1} d\xi P_\ell(\xi)P_m(\xi) = \int_{-1}^{1} d\xi \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}}\frac{1}{\sqrt{1+s^2-2s\xi}} = \frac{1}{\sqrt{st}}\ln\frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}}$$

Affinchè il termine a sinistra sia solo funzione di st, l'integrale deve essere nullo per $\ell\neq m$. Per valutare la costante h_ℓ, si pone $\ell=m$ e $x=\sqrt{st}$:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} x^{2\ell}h_\ell = \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2}{2\ell+1}x^{2\ell}$$

I polinomi di Legendre si ottengono ortogonalizzando in $L^2(-1,1)$ la base $\{\xi^n\}$ con la condizione $P_\ell(1) = 1$.
Otteniamo ora una equazione differenziale per i polinomi. L'equazione di Laplace $\Delta_2 u = 0$ è risolta dalla funzione armonica

$$\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0}} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^\ell P_\ell(\xi) & r > r_0 \\ \frac{1}{r_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^\ell P_\ell(\xi) & r < r_0 \end{cases} \tag{A.5}$$

dove $r = |\underline{x}|$, $r_0 = |\underline{x}_0|$ e ξ è il coseno dell'angolo tra i vettori $\underline{x}$ e $\underline{x}_0$.
Se (θ, ϕ) e (θ_0, ϕ_0) sono gli angoli che individuano le direzioni dei vettori r e r_0, per la formula dei triangoli sferici si ha:

$$\xi = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\phi - \phi_0)$$

Concludiamo che sia $r^\ell P_\ell(\xi)$ che $r^{-\ell-1} P_\ell(\xi)$ sono funzioni armoniche. In particolare, scegliendo r_0 lungo l'asse z, si identifica $\xi = \cos\theta$. Calcolando esplicitamente il Laplaciano in coordinate sferiche e ponendo a zero il risultato, si ottiene l'equazione

$$0 = \ell(\ell+1) P_\ell(\xi) - 2\xi P'_\ell(\xi) + (1 - \xi^2) P''_\ell(\xi) \tag{A.6a}$$

che può essere cosìriscritta:

$$0 = \frac{d}{d\xi}\left[(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} P_\ell(\xi)\right] + \ell(\ell+1) P_\ell(\xi) \tag{A.6b}$$

Riportiamo infine la formula

$$P_\ell(\xi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} (\xi^2 - 1)^\ell \tag{A.7}$$