LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

L. G. Molinari

1 Riferimenti Inerziali.

La relatività speciale si ambienta nello **spazio-tempo**. Esso è un continuo di punti (*eventi*), rappresentabili biunivocamente in punti di R^4, che ne fissano le coordinate. La mappa biunivoca attribuisce a ogni evento quattro numeri x^μ, costituenti il vettore colonna x, e identifica un *sistema di riferimento*.

La velocitá finita di propagazione dei segnali attribuisce allo spazio-tempo una **struttura causale** intrinseca, indipendente dal riferimento. A ogni evento E è associata una partizione dello spazio tempo in tre regioni: il futuro, il passato e il presente dell'evento. Gli eventi nel futuro di E sono quelli che possono essere raggiunti da un segnale emesso in E. Nel passato di E sono gli eventi che sono sorgenti di segnali rilevati in E. Gli eventi nel presente di E non hanno alcun nesso causale con E. L'individuazione delle ragioni causalmente connesse è pertanto legata alla nozione di traiettoria, o linea di universo di una particella. Una traiettoria è un insieme ordinato di eventi $E(s)$, $s \in R$; eventi successivi a un evento sono per definizione nel futuro di questo. Eventi precedenti, $s' < s$, appartengono al passato di $E(s)$.

In un sistema di riferimento **inerziale** le traiettorie e la struttura causale hanno una struttura semplice:

1) le traiettorie di particelle libere sono descritte da rette in R^4

$$\vec{x} = \frac{\vec{v}}{c}x^0 + \vec{b}, \qquad \|\vec{v}\| \le c$$

2) il futuro e il passato di un evento di coordinate inerziali x sono rappresentati negli insiemi $C^+(x) = \{y|\, y^0 \ge x^0,\, (y^0 - x^0)^2 - \|\vec{y} - \vec{x}\|^2 \ge 0\}$ e $C^-(x) = \{y|\, y^0 \le x^0,\, (y^0 - x^0)^2 - \|\vec{y} - \vec{x}\|^2 \ge 0\}$ (la norma in R^3 è quella euclidea).

Si mostra che $C^\pm(x)$ sono *coni opposti* con vertice in x. La frontiera (*cono di luce*) dei due coni causali è data dai *raggi di luce* passanti per E, con equazione $(y^0 - x^0)^2 - \|\vec{y} - \vec{x}\|^2 = 0$. Dalle due proprietà segue che se x è un sistema di riferimento inerziale, anche il sistema traslato $x' = x - a$ è inerziale.

È utile introdurre una nozione di distanza lorentziana per i riferimenti inerziali:

$$d(x, y) = (x^0 - y^0)^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \;=\; (x - y)^t G(x - y)$$

dove G è la matrice metrica, diagonale, con elementi non nulli $G_{00} = 1$ e $G_{ii} = -1$.

Si dimostra che due diversi sistemi di riferimento inerziali con la stessa origine sono connesse da una trasformazione lineare invertibile

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{1}$$

che lascia invariante la matrice metrica:

$$G_{\rho\sigma} \Lambda^{\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} = G_{\mu\nu} \tag{2}$$

Esse formano il **Gruppo di Lorentz**.

Le più generali trasformazioni di coordinate inerziali comprendono anche le traslazioni dell'origine, e formano il Gruppo di Poincaré.

Gli elementi di una matrice di Lorentz Λ sono indicati con $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, dove l'indice in alto è detto di *controvarianza* e quello in basso di *covarianza* (l'indice a sinistra è sempre quello di riga). La presenza di coppie di indici ripetuti, uno di covarianza e l'altro di controvarianza, sottintende una somma, come nel prodotto righe per colonne di matrici: $(\Lambda\tilde{\Lambda})^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\tilde{\Lambda}^{\rho}{}_{\nu}$. La matrice trasposta è $(\Lambda^t)_{\nu}{}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$. La matrice metrica G ha uno status diverso: i suoi elementi di matrice hanno due indici di covarianza $G_{\mu\nu}$. La sua inversa G^{-1} ha elementi con indici controvarianti $G^{\mu\nu}$, ed è $G_{\mu\rho}G^{\rho\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu}$.

2 IL GRUPPO DI LORENTZ

Si riscrive la proprietà di Lorentz (2) mettendo in evidenza l'usuale posizione degli indici nel prodotto matriciale, $(\Lambda^t)_{\mu}{}^{\rho} G_{\rho\sigma} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} = G_{\mu\nu}$. In notazione matriciale è:

$$\Lambda^t G \Lambda = G \tag{3}$$

Essa comporta che $\det \Lambda = \pm 1$: esiste pertanto la matrice inversa e, per la (3), è $\Lambda^{-1} = G\Lambda^t G$. Si verifica facilmente che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo. La condizione di Lorentz comporta anche $(\Lambda^0{}_0)^2 = \sum_i (\Lambda^0{}_i)^2 + 1 \geq 1$. Questa determina la seguente partizione del gruppo di Lorentz in quattro classi disgiunte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^{\uparrow} &= \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = +1,\ \Lambda^0{}_0 \geq +1\} \\
\mathcal{L}_-^{\uparrow} &= \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = -1,\ \Lambda^0{}_0 \geq +1\} \\
\mathcal{L}_-^{\downarrow} &= \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = -1,\ \Lambda^0{}_0 \leq -1\} \\
\mathcal{L}_+^{\downarrow} &= \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = +1,\ \Lambda^0{}_0 \leq -1\}
\end{aligned}$$

Le trasformazioni che non invertono l'asse temporale (${\Lambda^0}_0 \geq 1$) vengono dette *ortocrone*, e formano il sottogruppo O(1,3), dove (1,3) si riferisce alla struttura diagonale della matrice metrica G. La classe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ contiene l'identitá ed è un sottogruppo di $\mathcal{L}$, denominato *Gruppo Proprio ortocrono di Lorentz*, SO(1,3). Ogni classe è ottenibile moltiplicando le matrici di SO(1,3) per una matrice rappresentativa della classe. Per questa ragione procederemo allo studio dettagliato di SO(1,3). Le quattro matrici rappresentative vengono scelte diagonali e idempotenti; rispettivamente:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{4}$$

P è la matrice di parità, i suoi elementi di matrice ${P^\mu}_\nu$ coincidono con quelli della matrice metrica. T è la matrice di inversione temporale.

La condizione di Lorentz (3) corrisponde a dieci equazioni, che riducono da 16 a 6 il numero di parametri indipendenti di una matrice di Lorentz. Introdotta una ragionevole parametrizzazione, solo le matrici in SO(1,3) possono essere connesse con l'identità attraverso una variazione continua dei parametri. Lo studio dell'intorno dell'identità (le trasformazioni infinitesime) permette di caratterizzare l'algebra di Lie di SO(1,3) e per molti scopi questo basta, dato che la mappa esponenziale ricostruisce il gruppo a partire dall'algebra. Tuttavia, data l'utilità e la semplicità del gruppo, affronteremo il problema algebrico di caratterizzarne tutti gli elementi, e non solo quelli nell'intorno dell'identità.

2.1 SO(1,3)

È naturale adottare per le matrici di Lorentz la rappresentazione a blocchi

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^t \\ \vec{b} & L \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{5}$$

dove $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono vettori colonna reali a tre componenti, L e I sono matrici reali 3×3 (I è la matrice identità). Per SO(1,3) facciamo la richiesta ulteriore $\det \Lambda = 1$ e $\gamma \geq 1$.

Si mostra facilmente che se Λ è una matrice di SO(1,3), anche Λ^t, Λ^{-1} e $\Lambda^c \equiv (\Lambda^t)^{-1}$ sono matrici di Lorentz SO(1,3). Dalla rappresentazione (5) discendono le strutture a blocchi delle matrici:

$$\Lambda^{-1} = G\Lambda^t G = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{b}^t \\ -\vec{a} & L^t \end{pmatrix}, \quad \Lambda^c = G\Lambda G = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{a}^t \\ -\vec{b} & L \end{pmatrix} \tag{6}$$

Il significato della matrice Λ^c è quello di descrivere la trasformazione delle componenti covarianti del vettore x: se $x' = \Lambda x$ corrisponde alla eq.(1) che coinvolge componenti controvarianti del vettore, si ha $(Gx)' = \Lambda^c(Gx)$, che coinvolge componenti covarianti $x_\mu = G_{\mu\nu}x^\nu$.

Le condizioni (3) affinché Λ sia una matrice di Lorentz si traducono in condizioni sui parametri. Dato che esse implicano che anche Λ^t è una matrice di Lorentz, è utile elencare anche le condizioni per quest'ultima (colonna a destra)

$$\begin{array}{cc} \gamma = \sqrt{1+\|\vec{b}\|^2} & \gamma = \sqrt{1+\|\vec{a}\|^2} \\ L^t\vec{b} = \gamma\vec{a} & L\vec{a} = \gamma\vec{b} \\ L^tL = I + \vec{a}\vec{a}^t & LL^t = I + \vec{b}\vec{b}^t \end{array} \tag{7}$$

Da esse conseguono: $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ e $(\det L)^2 = \gamma^2$ (la sottomatrice L è invertibile). Mostriamo che le equazioni (7) consentono di ricostruire la matrice L mediante i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e una matrice di rotazione spaziale R, tale che $R\vec{a} = \vec{b}$. Infatti, si ponga

$$L = R + \frac{\vec{b}\vec{a}^t}{\gamma+1} \tag{8}$$

con R matrice incognita. Le condizioni $L\vec{a} = \gamma\vec{b}$ e $L^t\vec{b} = \gamma\vec{a}$ comportano rispettivamente $R\vec{a} = \vec{b}$ e $R^t\vec{b} = \vec{a}$. Le condizioni $L^tL = I+\vec{a}\vec{a}^t$ e $LL^t = I+\vec{b}\vec{b}^t$ comportano $R^tR = RR^t = I$: la matrice R è ortogonale. Conseguono due possibili fattorizzazioni di una generica matrice Λ in SO(1,3):

$$\begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^t \\ \vec{b} & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^t \\ R\vec{a} & R + \frac{R\vec{a}\vec{a}^t}{\gamma+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^t \\ \vec{a} & I + \frac{\vec{a}\vec{a}^t}{\gamma+1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \vec{b}^tR \\ \vec{b} & R + \frac{\vec{b}\vec{b}^tR}{\gamma+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{b}^t \\ \vec{b} & I + \frac{\vec{b}\vec{b}^t}{\gamma+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \tag{10}$$

In forma compatta scriviamo:

$$\Lambda = \Lambda_R\Lambda_B(\vec{a}) = \Lambda_B(\vec{b})\Lambda_R \tag{11}$$

Le matrici simmetriche $\Lambda_B(\vec{a})$ e $\Lambda_B(\vec{b})$, in cui γ è l'espressione in (7), sono denominate *boost*. Il calcolo diretto mostra che i boost hanno determinante +1. Se Λ è una matrice di SO(1,3), deve essere anche $\det R = 1$, e la matrice R è una rotazione. Pertanto Λ_R identifica una rotazione spaziale. Le eq.(11) forniscono, al variare di $\vec{a} \in R^3$ ed $R \in SO(3)$, la soluzione generale dei vincoli e quindi la forma di qualunque matrice di SO(1,3). Si può da ora verificare che rotazioni spaziali e boost sono essi stessi elementi di SO(1,3). Le due classi di matrici sono riconsiderate nei prossimi paragrafi.

Per finire, notiamo che l'equazione (8) permette di determinare la matrice R a partire dai blocchi che compongono Λ.

2.2 SO(3)

Le matrici di SO(1,3) con la proprietà $\gamma = 1$ hanno necessariamente la forma

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \tag{12}$$

dove R è una matrice di SO(3): $R^t R = I$, $\det R = 1$. Le matrici Λ_R commutano con le matrici P, T e TP. Si verifica facilmente che le rotazioni si identificano con le matrici proprie per le quali $\Lambda = \Lambda^c$.

Per la teoria precedentemente svolta, le rotazioni sono parametrizzabili mediante un vettore $\vec{n}\varphi$, dove $\vec{n}$ è il versore invariante che individua l'asse spaziale di rotazione e $0 \le \varphi < \pi$ è l'angolo di rotazione. Le rotazioni hanno rappresentazione esponenziale

$$\Lambda_R(\vec{n}\varphi) = e^{\varphi \vec{n}\cdot\vec{A}} \tag{13}$$

dove i generatori delle rotazioni attorno ai tre assi spaziali sono le matrici antisimmetriche ottenute orlando di zeri i generatori di SO(3)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essi soddisfano la relazione caratteristica del momento angolare

$$[A_i, A_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} A_k \tag{14}$$

2.3 I Boost

I boost sono le matrici di Lorentz proprie simmetriche, $B^t = B$. La simmetria implica $\vec{b} = \vec{a}$ e $L = L^t$. Le equazioni (7) si semplificano in $L\vec{a} = \gamma\vec{a}$ e $L^2 = I + \vec{a}\vec{a}^t$, e sono risolte da $L = I + \vec{a}\vec{a}^t/(\gamma+1)$. Un boost è pertanto caratterizzato dal solo vettore $\vec{a}$, ed ha rappresentazione matriciale

$$\Lambda_B(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^t \\ \vec{a} & I + \frac{\vec{a}\vec{a}^t}{\gamma+1} \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \sqrt{1 + \|a\|^2} \tag{15}$$

La matrice inversa $\Lambda_B(\vec{a})^{-1} = G\Lambda_B(\vec{a})G$ è simmetrica ed è il boost $\Lambda_B(-\vec{a})$. Infine è $\Lambda_B(0) = I$.
Un boost ha una base di autovettori ortogonali in R^4 (euclideo): due sono di tipo luce, e due sono vettori spaziali invarianti:

$$\begin{pmatrix} \pm|\vec{a}| \\ \vec{a} \end{pmatrix} \text{ con autovalori } \gamma \pm |\vec{a}|, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{b}_{1,2} \end{pmatrix} \text{ con autovalore } 1,$$

I vettori spaziali $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$ possono essere scelti a formare con $\vec{a}$ una terna ortogonale. Sviluppando x nella base, le sue componenti spaziali ortogonali ad $\vec{a}$ non sono modificate dal boost.

Si noti che i boost sono matrici positive, e la formula $\Lambda = \Lambda_R \Lambda_B$ corrisponde alla fattorizzazione polare della matrice Λ.

2.4 Prodotto di Boost

Il prodotto di due boost $\Lambda_B(\vec{a}_1)\Lambda_B(\vec{a}_2)$ è un boost se e solo se è una matrice simmetrica, vale a dire $\Lambda_B(\vec{a}_1)$ e $\Lambda_B(\vec{a}_2)$ commutano. I due boost hanno in tal caso una base di autovettori in comune, e ciò comporta che $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ sono vettori paralleli. In questo caso la matrice prodotto è il boost $\Lambda_B(\vec{a}_3)$, determinato dal vettore colonna $\vec{a}_3$ ottenibile direttamente dalle rappresentazioni esplicite dei fattori. Si trova:

$$\Lambda_B(\vec{a}_1)\Lambda_B(\vec{a}_2) = \Lambda_B(\gamma_1\vec{a}_2 + \gamma_2\vec{a}_1) \tag{16}$$

E' conveniente introdurre la parametrizzazione $\vec{a}_1 = \vec{n}\sinh\theta_1$ e $\vec{a}_2 = \vec{n}\sinh\theta_2$, dove $\|\vec{n}\| = 1$, per ottenere la semplice legge di prodotto

$$\Lambda_B(\vec{n}\sinh\theta_1)\Lambda_B(\vec{n}\sinh\theta_2) = \Lambda_B(\vec{n}\sinh(\theta_1+\theta_2)) \tag{17}$$

Essa mostra che i boost lungo una stessa direzione $\vec{n}$ formano un *gruppo a un parametro*. Sviluppando per θ infinitesimo al primo ordine, $\Lambda_B(\delta\theta\vec{n}) \approx I_4 + \delta\theta\vec{n}\cdot\vec{B} + \ldots$ si ottiene il generatore $\vec{n}\cdot\vec{B}$ dei boost con direzione $\vec{n}$. Il vettore $\vec{B}$ è formato dalle matrici

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

e ciascuna matrice è generatore dei boost lungo uno degli assi spaziali. I tre generatori soddisfano le relazioni di commutazione

$$[B_i, B_j] = -\sum_k \epsilon_{ijk} A_k. \tag{18}$$

Per la teoria generale dei gruppi a un parametro, un boost lungo $\vec{n}$ ha rappresentazione esponenziale

$$\Lambda_B(\vec{n}\sinh\theta) = e^{\theta\vec{n}\cdot\vec{B}} \tag{19}$$

Per questa ragione scriveremo $\Lambda_B(\vec{n}\theta)$ in luogo di $\Lambda_B(\vec{n}\sinh\theta)$. I boost lungo i tre assi coordinati, generati rispettivamente da B_1, B_2 e B_3, sono detti **trasformazioni di Lorentz speciali** e, nella parametrizzazione in θ, corrispondono a rotazioni iperboliche che coinvolgono il tempo e una sola coordinata spaziale

$$\Lambda_B(\theta\vec{i}) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & & \\ \sinh\theta & \cosh\theta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_B(\theta\vec{j}) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & & \sinh\theta & \\ & 1 & & \\ \sinh\theta & & \cosh\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_B(\theta\vec{k}) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & & & \sinh\theta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \sinh\theta & & & \cosh\theta \end{pmatrix}.$$

Esaminiamo ora il caso generico del prodotto di due boost $\Lambda_B(\vec{a}_1)\Lambda_B(\vec{a}_2)$ con vettori non paralleli. Esso è fattorizzabile in una rotazione e un boost: $\Lambda_R\Lambda_B(\vec{a}_3)$, dove il vettore $\vec{a}_3$ viene letto direttamente nella prima riga della matrice prodotto dei boost:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \vec{a}_1^t \\ \vec{a}_1 & I + \frac{\vec{a}_1^t\vec{a}_1}{\gamma_1+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & \vec{a}_2^t \\ \vec{a}_2 & I + \frac{\vec{a}_2^t\vec{a}_2}{\gamma_2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_3 & \vec{a}_3^t \\ \vec{b}_3 & L_3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Si legge inoltre γ_3 e la matrice R viene ottenuta attraverso l'equazione (8). La matrice R risulta essere una rotazione attorno all'asse ortogonale ai vettori $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$, con angolo di rotazione φ determinato dalla formula della teoria generale delle rotazioni, $\mathrm{Tr}R = 1 + 2\cos\varphi$. Si calcola

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|^2}{(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)(1+\gamma_3)} \tag{21}$$

Le formule si semplificano notevolmente nel caso in cui $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ siano ortogonali (come nel caso di trasformazioni speciali di Lorentz lungo assi diversi): $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \gamma_1\vec{a}_2$, $\cos\varphi = (\gamma_1+\gamma_2)(1+\gamma_1\gamma_2)^{-1}$.

Se $\Lambda_B(\vec{a}_1)\Lambda_B(\vec{a}_2)$ è ulteriormente moltiplicata a destra per $\Lambda_B(\vec{a}_1)$, si ottiene ancora un boost.

2.5 Boost e velocità

Il significato geometrico del boost risulta evidente quando esso venga applicato al quadrivettore che descrive una particella di massa m in quiete:

$$\begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^t \\ \vec{a} & I + \frac{\vec{a}\vec{a}^t}{\gamma+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mc \\ 0 \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} \gamma \\ \vec{a} \end{pmatrix}$$

Si ottiene l'identificazione dei parametri del boost con le componenti temporale e spaziali della quadrivelocità della particella nel nuovo riferimento

$$\gamma = \cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad \vec{a} = \vec{n}\sinh\theta = \frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{22}$$

La componente $(\Lambda_B)^0{}_0 = \gamma$ coincide con l'usuale fattore di dilatazione temporale di Lorentz. Si ottiene anche:

$$\frac{\vec{v}}{c} = \vec{n}\tanh\theta \tag{23}$$

E' utile scrivere esplicitamente la trasformazione di coordinate $x' = Bx$ col parametro di velocità:

$$x'^0 = \gamma\left[x^0 + \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{x}\right], \quad \vec{x}' = \vec{x} + \gamma\frac{\vec{v}}{c}\left[x^0 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c}\frac{\gamma}{1+\gamma}\right] \tag{24}$$

La trasformazione delle componenti spaziali si semplifica quando la velocità è parallela a un asse. Per un boost lungo l'asse x si ottiene,

$$x'^0 = \gamma[x^0 + \frac{v}{c}x], \quad x' = \gamma[x^0\frac{v}{c} + x], \quad y' = y, \quad z' = z \tag{25}$$

2.6 Boost e rotazioni spaziali

Se Λ_R è una matrice di rotazione, la matrice $\Lambda_R\Lambda_B(\vec{a})\Lambda_R^t$ è simmetrica, e descrive perciò un boost. Si verifica facilmente la relazione

$$\Lambda_R\Lambda_B(\vec{a})\Lambda_R^t = \Lambda_B(R\vec{a}) \tag{26}$$

Abbiamo giá mostrato che una generica matrice di Lorentz propria è il prodotto di un boost e una rotazione

$$\Lambda = \Lambda_R\Lambda_B(\vec{a}) = \Lambda_B(\vec{b})\Lambda_R \tag{27}$$

2.7 L'algebra di Lie

Se nell'equazione (26) si considera un parametro $\vec{a}$ infinitesimo si perviene a

$$\Lambda_R\vec{B}\Lambda_R^t = R^t\vec{B}$$

Se, ancora, si considera una rotazione di angolo infinitesimo, si ottiene la relazione tra i generatori dei boost e delle rotazioni

$$[A_i, B_j] = \sum_k \epsilon_{ijk}B_k \tag{28}$$

Essa, aggiunta alle equazioni (14,18), che qui ripetiamo

$$[A_i, A_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} A_k, \qquad [B_i, B_j] = -\sum_k \epsilon_{ijk} A_k \tag{29}$$

caratterizza l'**algebra di Lie** del gruppo di Lorentz. Le sei matrici A_i e B_i sono la base di uno spazio lineare reale di matrici, chiuso per l'operazione di prodotto di Lie dato dalla commutazione tra matrici (un prodotto di Lie deve essere antisimmetrico, bilineare, e soddisfare l'dentità di Jacobi). Tale algebra, denominata so(1,3), ricostruisce il sottogruppo di Lorentz SO(1,3) attraverso la mappa esponenziale:

$$\exp: \quad so(1,3) \quad \to \quad SO(1,3) \tag{30}$$

È possibile riassumere l'algebra in una forma compatta. Posto $B_i = J^{0i}$, $A_1 = J^{23}$, $A_2 = J^{31}$ e $A_3 = J^{12}$, e $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$, si verifica in primo luogo che gli elementi di matrice hanno tutti espressione

$$(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = G^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\sigma - G^{\nu\rho}\delta^\mu{}_\sigma \tag{31}$$

Calcolando direttamente il commutatore di due matrici J si ottiene

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = G^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} - G^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + G^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - G^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} \tag{32}$$

che compendia tutta l'algebra di Lie so(1,3).

In questa esposizione siamo partiti dagli elementi finiti del gruppo per ottenere l'algebra. Diversamente, a partire dalla proprietà di Lorentz (3) per l'intorno dell'identità, si ottiene l'algebra (32) per i generatori e quindi il gruppo, per esponenziazione.

2.8 Il Piccolo Gruppo (caso massivo)

Sia p il vettore tetramomento, di componenti p^μ, di una particella massiva ($p^0 = \sqrt{m^2c^2 + \|\vec{p}\|^2}$). Le trasformazioni di SO(1,3) che lasciano p invariante,

$$\Lambda_p p = p, \qquad p = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{33}$$

formano un gruppo, denominato *piccolo gruppo* associato a p. Per determinare le matrici che compongono il piccolo gruppo osserviamo che il boost $B_p = \Lambda_B(-\vec{p}/mc)$ porta il riferimento in cui la particella ha impulso $\vec{p}$ a uno in cui la particella è in quiete: $B_p p = p^{(0)}$, dove $p^{(0)} = (mc, \vec{0})^t$. L'equazione (33) diviene $\Lambda_p B_p^{-1} p^{(0)} = B_p^{-1} p^{(0)}$, cioè $B_p \Lambda_p B_p^{-1} p^{(0)} = p^{(0)}$. Le trasformazioni che lasciano invariante $p^{(0)}$ sono quelle puramente spaziali, le rotazioni. Dunque il piccolo gruppo è formato dalle matrici

$$\Lambda_p = B_p^{-1} \Lambda_R B_p \tag{34}$$

dove R è una rotazione arbitraria. Queste trasformazioni sono dette *rotazioni di Wigner*, e sono generate dalle matrici $A_i(\vec{p}) = B_p^{-1} A_i B_p$. Esse soddisfano l'algebra del momento angolare

$$[A_i(\vec{p}), A_j(\vec{p})] = \sum_k \epsilon_{ijk} A_k(\vec{p}) \tag{35}$$

e hanno forma esplicita complicata. Non sono matrici antisimmetriche. La parte simmetrica della matrice $A_i(p)$ è $(mc)^{-1} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} p^j B_k$ (dove $\vec{B}$ sono i generatori dei boost). Nella combinazione lineare $\vec{p} \cdot \vec{A}(p)$ la parte simmetrica si cancella. Non solo, si mostra esplicitamente che $\vec{p} \cdot \vec{A}(p) = \vec{p} \cdot \vec{A}$. La matrice $\vec{p} \cdot \vec{A}$ commuta con le matrici del piccolo gruppo, e genera le rotazioni spaziali con asse parallelo a $\vec{p}$.

Si possono anche introdurre i generatori associati ai boost $\vec{\Lambda}_B(\vec{p}) = B_p^{-1} \vec{B} B_p$ che, insieme ai generatori del piccolo gruppo, soddisfano ancora le regole dell'algebra di Lorentz. Questi ultimi generatori generano l'*insieme complementare* rispetto al piccolo gruppo. Ogni matrice di SO(1,3) ammette la fattorizzazione in una matrice complementare per una del piccolo gruppo: $\Lambda = \Lambda_p \Lambda_c$. Questa fattorizzazione fu impiegata da Wigner per la classificazione delle rappresentazioni del gruppo di Poincaré, associate alle particelle elementari massive. Si puó effettuare una analoga costruzione per le particelle di massa nulla.

3 Rappresentazioni lineari di SO(1,3)

Una rappresentazione lineare del gruppo di Lorentz SO(1,3) è una mappa $\Lambda \to D(\Lambda)$, dove $D(\Lambda)$ sono matrici $n \times n$ o, più in generale, operatori lineari su uno spazio infinito-dimensionale, tali che

$$D(\Lambda_1 \Lambda_2) = D(\Lambda_1) D(\Lambda_2) \tag{36}$$

La condizione implica $D(\Lambda^{-1}) = D(\Lambda)^{-1}$ e $D(1) = 1$. Dal momento che ogni trasformazione di Lorentz è ottenibile come prodotto di una rotazione spaziale e un boost, $\Lambda = \Lambda_R \Lambda_B$, è sufficiente rappresentare queste particolari trasformazioni.

Con riferimento alla notazione già introdotta, alla rotazione di Lorentz spaziale $\Lambda_R(\varphi\vec{n})$ corrisponde la matrice unitaria $D_R(\varphi\vec{n})$, e al boost $\Lambda_B(\theta\vec{n})$

corrisponde la matrice $D_B(\theta\vec{n})$. Come già mostrato, le rotazioni e i boost con direzione $\vec{n}$ formano sottogruppi a un parametro e sono rappresentabili nella forma

$$\Lambda_R(\varphi\vec{n}) = e^{\varphi\vec{n}\cdot\vec{A}}, \qquad \Lambda_B(\theta\vec{n}) = e^{\theta\vec{n}\cdot\vec{B}}$$

Come conseguenza dell'eq.(36), anche le matrici D corrispondenti formano sottogruppi a un parametro e ammettono quindi le rappresentazioni

$$D_R(\varphi\vec{n}) = e^{-i\varphi\vec{n}\cdot\vec{J}}, \qquad D_B(\theta\vec{n}) = e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{K}}$$

dove $\vec{J}$ e $\vec{K}$ sono due terne di generatori, e si è scelto per comodità di introdurre il fattore $(-i)$. La regola di prodotto (36) implica che $\vec{J}$ e $\vec{K}$ soddisfino un'algebra di Lie reale con le stesse costanti di struttura dell'algebra di Lorentz. Il prodotto di Lie è in questo caso il commutatore diviso per l'unità immaginaria:

$$\frac{1}{i}[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k, \qquad \frac{1}{i}[J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k \tag{37}$$

$$\frac{1}{i}[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k \tag{38}$$

Poiché la mappa esponenziale ricostruisce il gruppo a partire dalla sua algebra, la costruzione di una rappresentazione del gruppo di Lorentz può convenientemente partire da una rappresentazione dell'algebra di Lorentz.

Le rotazioni saranno sempre rappresentate in modo unitario:

$$D_R^{-1} = D_R^\dagger = D_{R^t} \tag{39}$$

Ciò implica che la terna $\vec{J}$ è composta da operatori (matrici) Hermitiani e corrisponde a quantità osservabili: il **momento angolare totale**. Le regole di commutazione (37) che coinvolgono il momento angolare possono essere dedotte in modo analogo a quanto fatto per il gruppo di Lorentz e discendono da:

$$D_R^\dagger \vec{K} D_R = R\vec{K}, \qquad D_R^\dagger \vec{J} D_R = R\vec{J} \tag{40}$$

che dicono che $\vec{J}$ e $\vec{K}$ sono **terne vettoriali** per il gruppo delle rotazioni.

3.1 Cenni di classificazione

L'algebra (37,38) si semplifica notevolmente con il cambio di base di generatori:

$$\vec{U} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}), \qquad \vec{V} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) \tag{41}$$

Si ottengono due terne di matrici di momento angolare disaccoppiate:

$$\frac{1}{i}[U_i, U_j] = \epsilon_{ijk} U_k, \qquad \frac{1}{i}[V_i, V_j] = \epsilon_{ijk} V_k, \qquad \frac{1}{i}[U_i, V_j] = 0 \tag{42}$$

in cui sia U^2 che V^2 commutano con $\vec{U}$ e $\vec{V}$. Prenderemo in considerazione le rappresentazioni *irriducibili* dell'algebra, caratterizzate dai due autovalori di U^2 e V^2. Si danno a questo punto due possibilità, che analizzeremo tra breve:

1) $\vec{U}$ e $\vec{V}$ sono terne Hermitiane. Allora la rappresentazione è finito-dimensionale, ma non è unitaria per i boost.
2) $\vec{J}$ e $\vec{K}$ sono terne Hermitiane. Allora la rappresentazione è unitaria e infinito-dimensionale.

Ricordiamo che per un noto teorema di Wigner gli *stati* di un sistema fisico devono trasformarsi secondo una rappresentazione *unitaria* del gruppo di Lorentz. Per quanto affermato nel caso 2), questa è necessariamente infinito-dimensionale. Le osservabili, o più in generale gli operatori di campo, si trasformano in genere secondo rappresentazioni finite, caso 1). Iniziamo con quest'ultima possibilità.

3.1.1 Caso finito-dimensionale

Se $\vec{U}$ e $\vec{V}$ sono Hermitiani, per la teoria generale delle rappresentazioni irriducibili del momento angolare risultano

$$U^2 = u(u+1)I, \qquad V^2 = v(v+1)I,$$

con (u, v) coppia di multipli interi di $1/2$. La rappresentazione (u, v) ha dimensione finita $d = (2u+1)(2v+1)$. Fissata una base, i generatori sono dati da matrici complesse di dimensione $d \times d$. Una base possibile è quella in cui le matrici U_3 e V_3 sono diagonali:

$$|u, u_3; v, v_3\rangle, \quad -u \leq u_3 \leq u, \ -v \leq v_3 \leq v$$

La terna $\vec{J} = \vec{U} + \vec{V}$ è ancora costituita da matrici di momento angolare, con $J^2 = j(j+1)I$ e $j = |u - v|, \ldots, u + v$. Si può introdurre la base comune a J^2 e J_3

$$|u, v; j, m_j\rangle, \quad -j \leq m_j \leq j$$

legata alla precedente base dalla costruzione di Clebsh-Gordan.

La terna dei generatori dei boost è costituita da matrici anti-Hermitiane, $K_i^\dagger = -K_i$. Passando alle matrici D: le matrici associate alle rotazioni sono unitarie, $D_R D_R^\dagger = 1$, mentre quelle corrispondenti ai boost sono Hermitiane, $D_B^\dagger = D_B$.

Oltre alla rappresentazione banale (0,0) su uno spazio di dimensione 1, le successive più semplici rappresentazioni agiscono su C^2:

$(1/2, 0)$: $\vec{U} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, $\vec{V} = 0$ da cui $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ e $\vec{K} = \frac{1}{2i}\vec{\sigma}$.

$(0, 1/2)$: $\vec{U} = 0$, $\vec{V} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ da cui $\vec{J} = \frac{1}{2}\sigma$ e $\vec{K} = -\frac{1}{2i}\vec{\sigma}$.

In entrambi i casi le rotazioni corrispondono alla stessa matrice di SU(2), mentre i boost corrispondono a matrici Hermitiane tra loro inverse. (1/2,0) e (0,1/2) sono rappresentazioni del gruppo di SO(1,3) con matrici SL(2,C), discusse in dettaglio nel paragrafo 5.

3.1.2 Rappresentazioni unitarie

La rappresentazione è unitaria quando entrambi i generatori $\vec{J}$ e $\vec{K}$ sono operatori autoaggiunti. Di conseguenza

$$\vec{V} = \vec{U}^\dagger, \qquad [U_i, U_j^\dagger] = 0$$

Gli operatori U_i sono normali (commutano con l'aggiunto) e hanno una base di stati ortogonali, ma spettro complesso. Dato che $\vec{K}$ è una terna vettoriale per le rotazioni, la costruzione degli elementi di matrice nella base di J^2 e J_3 procede sulla base del teorema di Wigner-Eckart e dell'algebra soddisfatta dalle componenti[3, 6]

4 Il gruppo di Poincaré

Una trasformazione di Poincaré

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{43}$$

è specificata dalla coppia $(\Lambda, a) \in \mathcal{L} \times R^4$. L'applicazione di due trasformazioni di Poincaré corrisponde alla legge di composizione

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, a_2 + \Lambda_2 a_1) \tag{44}$$

Si ottiene la trasformazione inversa $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$. Gli elementi (I, a) e $(\Lambda, 0)$ sono i due sottogruppi corrispondenti alle traslazioni nello spazio-tempo e alle trasformazioni di Lorentz. Si ha la fattorizzazione

$$(\Lambda, a) = (I, a)(\Lambda, 0) = (\Lambda, 0)(I, \Lambda^{-1}a) \tag{45}$$

Una rappresentazione del gruppo di Poincaré associa a ogni trasformazione di Poincaré (Λ, a) un operatore lineare $D(\Lambda, a)$ tale che

$$D(\Lambda_1, a_1)D(\Lambda_2, a_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_2 a_1 + a_2) \tag{46}$$

Definiamo gli operatori rappresentativi dei sottogruppi $D(a) = D(I, a)$ e $D(\Lambda) = D(\Lambda, 0)$. Le **traslazioni** corrispondono al sottogruppo unitario abeliano $D(a)$ con generatori dati da operatori Hermitiani P^μ:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \tag{47}$$

e hanno la rappresentazione esponenziale $D(a) = e^{ia_\mu P^\mu}$. Dalla identità (45) segue

$$D(\Lambda)D(a)D(\Lambda^{-1}) = D(\Lambda a)$$

Passando a una traslazione infinitesima si ottiene l'equazione

$$D(\Lambda)^{-1}P^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$$

che indica che *i generatori delle traslazioni si trasformano come le componenti di un tetravettore del gruppo di Lorentz*. Nel seguito si deve porre attenzione al fatto che $P_\mu = G_{\mu\nu}P^\nu$. Specifichiamo ulteriormente la trasformazione di Lorentz Λ:

*) Λ è una rotazione infinitesima:

$$(I + i\varphi\vec{n}\cdot\vec{J})P^\mu(I - i\varphi\vec{n}\cdot\vec{J}) = [\delta^\mu{}_\nu + \varphi(\vec{n}\cdot\vec{A})^\mu{}_\nu]P^\nu$$

$$i[J_i, P^\mu] = (A_i)^\mu{}_\nu P^\nu$$

In particolare, usando il fatto che le matrici A_i (generatori delle rotazioni spaziali) hanno componenti temporali nulle, si ottiene:

$$[J_i, P^0] = 0, \qquad \frac{1}{i}[J_i, P_j] = \epsilon_{ijk}P_k \tag{48}$$

**) Λ è un boost infinitesimo:

$$(I + i\theta\vec{n}\cdot\vec{K})P^\mu(I - i\theta\vec{n}\cdot\vec{K}) = [\delta^\mu{}_\nu + \theta(\vec{n}\cdot\vec{B})^\mu{}_\nu]P^\nu$$

$$i[K_i, P^\mu] = (B_i)^\mu{}_\nu P^\nu$$

I generatori delle rotazioni spaziali hanno solo componenti miste:

$$\frac{1}{i}[K_i, P^0] = P_i, \qquad \frac{1}{i}[K_i, P_j] = \delta_{ij} P^0 \tag{49}$$

Le regole dell'algebra per $\vec{J}$ e $\vec{K}$, (37) e (38), unite a quelle per il tetramomento P^μ, eq.(47),(48) e (49), costituiscono l'**algebra del gruppo di Poincaré**.

5 IL GRUPPO UNIMODULARE SL(2,C)

Nella trattazione del gruppo delle rotazioni SO(3) si era mostrato che è possibile darne una rappresentazione nel gruppo SU(2), costituito dalle matrici complesse unitarie 2×2 con determinante unitario. Alla rotazione R corrisponde la matrice complessa U del gruppo $SU(2)$ attraverso la relazione

$$R = e^{\varphi \vec{n} \cdot \vec{A}} \quad \leftrightarrow \quad U = e^{-\frac{i}{2}\varphi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} \tag{50}$$

Osserviamo che mentre la per una rotazione vale $R(\varphi + 2\pi) = R(\varphi)$, la corrispondente matrice unitaria cambia segno: $U(\varphi + 2\pi) = -U(\varphi)$. Si dice che la rappresentazione è a due valori: $R \to \pm U$. La mappa (50) discende dall'azione del gruppo SU(2) sul vettore formato dalle matrici di Pauli, che è una rotazione:

$$U^\dagger \sigma_i U = R_{ij} \sigma_j \tag{51}$$

In modo del tutto analogo, è possibile rappresentare il gruppo di SO(1,3) mediante matrici complesse 2×2 con determinante unitario, costituenti il **gruppo unimodulare** $SL(2, C)$.

Una prima indicazione viene dall'insieme delle matrici complesse Hermitiane 2×2, parametrizzate mediante un vettore x a quattro componenti reali x^μ,

$$H(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \sum_\mu x^\mu \sigma_\mu \tag{52}$$

Si è introdotto il simbolo σ_0 per indicare la matrice identità. L'espressione del determinante $(x^0)^2 - \|\vec{x}\|^2$ riproduce la forma quadratica invariante per le trasformazioni del gruppo di Lorentz. L'azione del gruppo unimodulare sulle matrici Hermitiane

$$H(x) \to H(x') = M^\dagger H(x) M, \qquad M \in SL(2, C), \tag{53}$$

induce una trasformazione lineare sui vettori, $x' = \Lambda x$, e conserva il determinante.

La matrice $M^\dagger \sigma_\mu M$ è Hermitiana e ammette sviluppo nelle stesse matrici σ_ν:

$$M^\dagger \sigma_\mu M = \Lambda_{\mu\nu} \sigma_\nu \tag{54}$$

Osserviamo che, in questo contesto, non diamo rilevanza al fatto che gli indici matriciali siamo di covarianza o controvarianza. Utilizzando la proprietà $\mathrm{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}$ si ottiene a partire dalla (54) l'espressione esplicita della matrice Λ associata alla matrice M:

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(M^\dagger \sigma_\mu M \sigma_\nu) \tag{55}$$

In particolare, le matrici di Lorentz associate a matrici $M = U_R$ in $SU(2)$, sottogruppo di $SL(2,C)$, sono le matrici Λ_R che descrivono una rotazione spaziale R.

<u>Proposizione</u>: se $M \in SL(2,C)$ allora $\Lambda \in SO(1,3)$.
Dim.: dobbiamo mostrare che $\Lambda_{00} \geq 1$ e $\det \Lambda = 1$. La prima proprietà segue dal fatto che $M^\dagger M$ è sempre positiva: $\Lambda_{00} = (1/2)\mathrm{tr}(MM^\dagger) \geq 1$. La dimostrazione della seconda proprietà è laboriosa. La matrice M può essere fattorizzata in $UZV^\dagger$, dove U e V sono matrici SU(2), corrispondenti a rotazioni R ed S, e Z è diagonale con determinante unitario: $Z_{11} = z$ e $Z_{22} = 1/z$. Utilizzando la (51) e la proprietà ciclica della traccia:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(U^\dagger \sigma_\mu U) Z (V^\dagger \sigma_\nu V) Z^*] \\ &= \frac{1}{2}(\Lambda_R)_{\mu\alpha}(\Lambda_S)_{\nu\beta}\mathrm{Tr}(\sigma_\alpha Z \sigma_\beta Z^*) = (\Lambda_R \tilde{\Lambda} \Lambda_S^t)_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{56}$$

Poiché le matrici Λ_R e Λ_S hanno determinante unitario, si deve solo verificare che è $\det \tilde{\Lambda} = 1$. Si ottiene

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{00} & 0 & 0 & \tilde{\Lambda}_{03} \\ 0 & \tilde{\Lambda}_{11} & \tilde{\Lambda}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda}_{21} & \tilde{\Lambda}_{22} & 0 \\ \tilde{\Lambda}_{30} & 0 & 0 & \tilde{\Lambda}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Lambda}_{00} = \tilde{\Lambda}_{33} = \frac{1}{2}(|z|^2 + |z|^{-2}), \qquad \tilde{\Lambda}_{30} = \tilde{\Lambda}_{03} = \frac{1}{2}(|z|^2 - |z|^{-2})$$

$$\tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\Lambda}_{22} = \frac{1}{2}(z^*/z + z/z^*) \qquad \tilde{\Lambda}_{12} = -\tilde{\Lambda}_{21} = \frac{1}{2}(z^*/z - z/z^*)$$

Si perviene al risultato cercato $\det \tilde{\Lambda} = 1$.•

Poiché ogni matrice di Lorentz SO(1,3) si fattorizza in una rotazione spaziale per un boost, $\Lambda = \Lambda_R \Lambda_B$, rimane da considerare la classe delle matrici in $SL(2,C)$ che forniscono i boost. Osserviamo a questo scopo che ogni matrice complessa in $SL(2,C)$ si fattorizza nel prodotto di una matrice in $SU(2)$ per una matrice Hermitiana positiva $H(t)$ con determinante unitario:

$$\det H(t) = (t^0)^2 - \|\vec{t}\|^2 = 1, \qquad \mathrm{tr} H(t) = 2t^0 \geq 0$$

Le due condizioni sono soddisfatte da $t^0 = \cosh\frac{\theta}{2}$ e $\vec{t} = \vec{n}\sinh\frac{\theta}{2}$, dove $\vec{n}$ è un versore in R^3:

$$H(\vec{n}\theta) = \sigma_0 \cosh\frac{\theta}{2} + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sinh\frac{\theta}{2} = e^{\frac{\theta}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} \tag{57}$$

Poiché H è Hermitiana, la corrispondente matrice di Lorentz $(1/2)\mathrm{tr}(H\sigma_\mu H\sigma_\nu)$ è simmetrica (per la proprietà ciclica della traccia) ed è perciò un boost $\Lambda_B(\vec{a})$, dove $a_i = (\Lambda_B)_{i0} = (1/2)\mathrm{tr}(H\sigma_i H\sigma_0) = n_i \sinh\theta$. Pertanto vale la corrispondenza

$$e^{\frac{1}{2}\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \to \Lambda_B(\theta\vec{n}) \tag{58}$$

precisata dalla relazione analoga a (51), $H(\vec{n}\theta)\sigma_\mu H(\vec{n}\theta) = \Lambda_B(\vec{n}\theta)_{\mu\nu}\sigma_\nu$.

In conclusione, *il gruppo $SL(2,C)$ è una rappresentazione (a due valori) di SO(1,3)*. La rappresentazione non è realizzata da matrici tutte unitarie (lo è solo per il sottogruppo delle rotazioni), e si mostra facilmente che è irriducibile, vale a dire che non esistono in C^2 sottospazi invarianti sotto l'azione del gruppo.

L'algebra di Lie $s\ell(2,C)$ è un'algebra reale, equipaggiata del prodotto di Lie $-\mathrm{i}[\ \ ,\ \ ]$ e generata dalle matrici $\vec{\sigma}/2$ (corrispondenti ai generatori delle rotazioni) e $\mathrm{i}\vec{\sigma}/2$ (corrispondenti ai generatori dei boost).

Il gruppo $SL(2,C)$ è chiuso rispetto alle operazioni idempotenti

$$M \to M^c = M^{\dagger^{-1}}, \qquad M \to M^*$$

con le proprietà $(M_1M_2)^c = M_1^c M_2^c$ o $(M_1M_2)^* = M_1^* M_2^*$. Pertanto oltre alla rappresentazione del gruppo di Lorentz proprio in $SL(2,C)$ che a Λ associa M, si possono anche considerare le due ulteriori rappresentazioni, dette rispettivamente coniugata e complessa, che a Λ associano M^c e M^*. Per l'identità $M^c = \sigma_2 M^* \sigma_2$ le rappresentazioni coniugata e complessa sono equivalenti. Invece, M e M^* non sono equivalenti: se lo fossero esisterebbe una matrice invertibile A tale che $M = AM^*A^{-1}$ per ogni M. La relazione di equivalenza comporterebbe che $\mathrm{Tr}M = \mathrm{Tr}(M^*)$, il che non è in generale vero. Si ritrova il fatto che esistono due rappresentazioni inequivalenti.

5.1 Trasformazioni di Möbius

Il gruppo unimodulare $SL(2,C)$ è collegato alle **trasformazioni di Möbius**[5] del piano complesso esteso $C \cup \{\infty\}$:

$$t_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc = 1$$

Le trasformazioni di Möbius formano un gruppo, ed è omeomorfo al gruppo $SL(2,C)$. Infatti, raccogliendo i parametri nella matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{59}$$

risulta che essa è unimodulare ($\det M = 1$), e la mappa conserva il prodotto: $t_{M_2 M_1} = t_{M_2} \circ t_{M_1}$.

Per $c = 0$ si ottengono le trasformazioni di Möbius lineari $z' = \alpha z + \beta$ (traslazione, rotazione di angolo argα e dilatazione di scala $|\alpha|$). Per $a = d = 0$ e $b = c =$i si ottiene la trasformazione di inversione. Entrambe hanno la proprietà di trasformare cerchi in cerchi (la retta è assimilata a un cerchio di raggio infinito). Ogni trasformazione di Möbius è fattorizzabile in due trasformazioni lineari separate da una inversione, e pertanto trasforma cerchi in cerchi. La fattorizzazione permette di mostrare subito che, dati quattro punti del piano, le trasformazione di Möbius lasciano invariante la quantità

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)} \tag{60}$$

Se al piano complesso $z = x_1 + ix_2$ si aggiunge un terzo asse reale x_3, è possibile costruire la "sfera di Riemann", $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, e identificare i punti del piano complesso esteso con i punti sulla sfera attraverso la *mappa stereografica*, costruita intersecando la retta passante per il polo (0,0,1) e il punto sulla sfera (x_1, x_2, x_3), con il piano complesso z. Si calcola:

$$\vec{x} \to z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \tag{61}$$

I punti dell'emisfero nord corrispondono alla regione $|z| > 1$. Se si associa al polo il punto all'infinito del piano complesso, la proiezione stereografica è una mappa biunivoca. (Una costruzione alternativa pone la sfera tangente al piano complesso $x_3 = 0$).

Le trasformazioni di Möbius $z' = t_U(z)$ associate a matrici U di $SU(2)$ inducono, attraverso la mappa stereografica, rotazioni della superficie sferica. La lunghezza della corda tra due punti $\vec{x}$ e $\vec{y}$ della superficie sferica è invariante per una rotazione della sfera. Esprimendo $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ mediante le immagini stereografiche z e w dei due punti, si ottiene una distanza di punti nel piano complesso

$$d(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \tag{62}$$

che è invariante per trasformazioni di Möbius associate a SU(2).

References

[1] A. Lenard, *A characterization of Lorentz transformations*, J. Math. Phys. **19** (1978) 157.

[2] I. M. Gel'fand, R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro, *Representations of the Rotation and Lorentz groups and their applications*, Pergamon Press, 1963.

[3] M. Naimark, *Linear Representations of the Lorentz Group*, MacMillan, 1964.

[4] Y. Ohsuki, *Unitary representations of the Poincaré group and relativistic wave equations*, World Scientific, 1988.

[5] A. Perelomov, *Generalized coherent states and their applications*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 1986.

[6] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific, 1985.

[7] M. Scadron, *Advanced Quantum Theory*, Springer Verlag, 1980.

[8] D. M. Fradkin, *Comments on a paper by Majorana concerning elementary particles*, EJTP **3** (2006) 305-314.