METODI MATEMATICI della FISICA

Esercizi su sviluppi in serie di potenze / di Laurent

1. Determinare la regione di convergenza delle seguenti serie:
   - $\sum_k \frac{z^k}{1+z^k}$; la convergenza è uniforme?
     Soluzione: sì in $|z| < R < 1$
   - $\sum_k z^{2^k}$
     Soluzione: $|z| < 1$
   - $\sum_{k>0} k^{-1/k} z^{k^2}$
     Soluzione: $|z| < 1$
   - $\sum_k (ik)^{ik} z^k$
     Soluzione: $|z| < e^{\pi/2}$
2. Sommare le seguenti serie e darne il raggio di convergenza:
   - $\sum_{k>0} z^{3k}$
     Soluzione: $\frac{z^3}{1-z^3}$, $|z| < 1$
   - $\sum_k \frac{(-1)^k (z-2\pi i)^k}{k!}$
     Soluzione: e^{-z}
   - $\sum_k \frac{(-1)^k}{2^k} z^{2k}$
     Soluzione: $\frac{1}{1+z^2/2}$, $|z| < \sqrt{2}$
   - $\sum_k k z^k$
     Soluzione: $\frac{z}{(1-z)^2}$
   - $\sum_k k^2 z^k$
     Soluzione: $\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$
   - $\sum_k \frac{k z^k}{2^k}$
     Soluzione: $\frac{2z}{(2-z)^2}$, $|z| < 2$
   - $\sum_k (k + a^k) z^k$
     Soluzione: $\frac{z}{1-z^2} + \frac{1}{1-az}$, $|z| < \min(1, 1/|a|)$
   - $\sum_k \cos(ik) z^k$
     Soluzione: $\frac{1}{2} \frac{2-z(e+1/e)}{1+z^2-z(e+1/e)}$, $|z| < 1/e$

3. Sviluppare le seguenti funzioni in serie di Laurent:
   - $\frac{1}{z^3-1}$ centrata in $z = 1$, nel disco forato
   - $\frac{1}{z^3-1}$ centrata in $z = 1$, per $|z - 1| > \sqrt{3}$
   - $\frac{1}{z^3-1}$ centrata in $z = 0$, per $|z| < 1$
   - $\frac{1}{z^3-1}$ centrata in $z = 0$, per $|z| > 1$
4. Determinare la parte principale e la regione di convergenza dello sviluppo in serie di Laurent di:
   - $\frac{1}{\sin z}$ in un anello contenente la circonferenza $|z| = 4$
   - $\frac{\cos z}{z^2 \sin z}$ intorno a $z = 0$
     Soluzione: $\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3z}$, $|z| < \pi$
   - $\frac{\sinh z}{z^2 \sqrt{z+1}}$ intorno a $z = 0$
     Soluzione: $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z}$, $|z| < 1$