

# METODI MATEMATICI della FISICA

## Esercizi su operazioni fondamentali su numeri complessi

1. Porre in forma  $x + iy$  e in forma polare  $|z|e^{i\theta}$  i seguenti numeri complessi:

- $\frac{1+i}{1-i}$   
Soluzione:  $i$
- $\frac{3-2i}{-1+i}$   
Soluzione:  $-5/2 - i/2$
- $\frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i}$   
Soluzione:  $3 - i$
- $\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i-1}$   
Soluzione:  $1 + i$
- $e^{ia} + e^{ib}$   
Soluzione:  $2 \left| \cos \frac{a-b}{2} \right| e^{i(a+b)/2 + i\omega}$ ,  $\omega = 0$  o  $\pi$ .

2. Porre in forma polare e calcolare le radici quadrate di:

- $-5 + 5i$
- $-3i$

3. Calcolare le seguenti potenze:

- $1^{1/5}$
- $(-i)^{1/6}$
- $(1 + i)^{4/6}$

4. Considerare se valgono le seguenti uguaglianze:

- $\text{Log } e^z = z$ , con  $z = 4 + 3\pi i$
- $\text{Log}(zw) = \text{Log } z + \text{Log } w$ , con  $z = -1 + 2i$  e  $w = i$
- $\text{Log} [(-1)^i] = i \text{Log} [-1]$

5. Esercizi su funzioni trigonometriche ed iperboliche:

- Calcolare  $|\cosh(x + iy)|^2$   
Soluzione:  $(\cosh x)^2 - (\sin y)^2 = (\sinh x)^2 + (\cos y)^2$
- Valutare  $|\cos(x + iy)|^2$  e dire se è limitato  
Soluzione:  $(\cosh y)^2 - (\sin x)^2$
- Calcolare parte reale e immaginaria di  $(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n$   
Soluzione:  $(2 \cos \frac{\theta}{2})^n (\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2})$
- Verificare che  $\cos^2 z + \sin^2 z = \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

6. Determinare i luoghi del piano complesso che soddisfano

- $|z - a| + |z - b| = |c|$   
Soluzione: Ellisse con fuochi in  $a$  e  $b$ , purchè...
- $|z - a|^2 + |z - b|^2 = |a - b|^2$   
Soluzione: Cerchio con diametro il segmento  $a-b$
- $|z - a|^2 + |z - b|^2 = |c|^2$   
Soluzione: Cerchio centrato in  $\frac{a+b}{2}$ , purchè...
- $2\Re z > |z|^2$   
Soluzione: Disco unitario con centro in 1

7. Dato il cerchio di centro  $1 + i$  e raggio unitario

- Scrivere l'equazione in forma  $|z - a| = b$   
Soluzione:  $a = 1 + i, b = 1$
- Scrivere l'equazione in forma  $Azz^* + Bz + B^*z^* + C = 0$   
Soluzione:  $A = 1, B = -1 + i, C = 1$
- Fornire una rappresentazione parametrica  
Soluzione:  $1 + i + e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$