

METODI MATEMATICI DELLA FISICA A.A. 2018-19.
DIARIO DELLE LEZIONI

V 01/03/2019 LEZIONE 2

1 e 2) introduzione al corso. Ricapitolazione numeri complessi. c.c. e modulo.

disug. triang. argomento di un numero compl. e notazione esponenziale. Arg.

principale. e sua espressione analitica. un esercizio relativo. $\exp(z)$ e sue proprietà. $\sin(z)$ etc.

definizione di $w = \text{Log}(z)$. come inverso di $\exp(w)$ su una striscia.

L 04/03/2019 LEZIONE 4

3 e 4) Proprietà del Log ed eventuali differenze con il log. elementare

($\text{Log}(z^2)$ vs $2 \text{Log}(z)$ etc).

Arbitrarietà del "taglio" di discontinuità.

Def. delle potenze complesse e loro proprietà.

Mappe semplici, la mappa lineare $w = az + b$, proprietà e significato geometrico.

L'inversione $w = 1/z$ e sue proprietà (verifica esplicita), un esempio (esercizio). le tr. di Moebius (appena iniziato).

M 05/03/2019 LEZIONE 5

4 e 5) tr. di Moebius, invertibilità, matrice associata e isomorfismo

con il gruppo delle matrici 2×2 quozientato. Decomposizione "canonica" e

trasformazioni di circonf. generalizzate in circonf. generalizzate.

La sfera di Riemann e la proiezione stereografica. Il punto all'infinito.

immagine sulla sfera di rette e circonf. in $\mathbb{C}$, conservazione degli angoli

(solo affermazione).

Le funzioni di variabili complesse, continuità, derivabilità in un punto.

Teorema sull'equivalenza con differenziabilità ed eq. di C.R. (dim non ancora fatta).

L 11/03/2019 LEZIONE 7

6 e 7) dimostra sull'equivalenza con differenziabilità ed eq. di C.R.

dell'essere derivabile. Esempi di funzioni derivabili e non. In particolare

$\exp$ e Log . mappe olomorfe sono conformi. Interpretazione nell'infinitesimo

come dilatazione e rotazione. esempio di $w = u + iv = z^2$ e di come si costruisce

un reticolato ortogonale di iperboli equilateri facendo la controimmagine

delle rette $u = U$ e $v = V$. Lo jacobiano. invertibilità locale di una f olomorfa

con derivata non nulla. viceversa: se una funzione olomorfa è

invertibile
allora ha in ogni punto derivata non nulla. esempi e commenti.
confronto
con il caso delle funzioni di variabile reale.

M 12/03/2019 LEZIONE 8

8) funzioni olomorfe e funzioni armoniche.
applicazioni all'elettrostatica con invarianza traslaz. in una
dimensione.
Campo elettr. e potenz. elettrico complesso di un filo unif. carico.
(carica puntiforme in $D=2$). Una mappa olomorfa risolve problemi. Il
caso di
due semipiani (semirette) connessi ortogonalmente e tenuti a dato
potenziale. soluzione, mediante $w=z^2$. sup. equipot. linee di forza
di E ,
densità di carica elettrica.

V 15/03/2019 ESERC. 2

ESERCIT. 1 e 2) determinazione di una funzione olomorfa nota la sua
parte reale.
Esercizio su mappa di Moebius.
verifica che la pr. stereografica è conforme.
verifica che la proiezione stereografica porta circonferenze nel
piano in
circonferenze sulla sfera.

L 18/03/2019 LEZIONE 10

9 e 10) un altro esempio sull'elettrostatica (dominio dato dai primi
tre
quadranti risolto mediante $w=z^{2/3}$).
Integrazione; cammini, cammini regolari, regolari a pezzi, chiusi,
cambio
di parametrizzazione e di orientazione. L'integrale dipende solo dal
sostegno
e dall'orientazione. del cammino. Parte interna e parte esterna di
un
cammino chiuso. Un esempio di calcolo di integrale di cammino.
Disuguaglianze utili per l'integrale.
L'integrale della derivata di una funzione olomorfa dipende solo dai
punti
iniziale e finale del cammino, e vale anche il viceversa (teorema
della
primitiva).

M 19/03/2019 LEZIONE 11

11) Funzione indice e sue proprietà.
Il teorema di Cauchy, formulazione e inizio dimostrazione.

V 22/03/2019 ESERC. 4

ESERCITAZIONE 3 e 4) determinazione della tr. di Mobius che mappa H
in D .
Enunciazione teor. Di Riemann. Proposti esercizi.
applicazioni all'elett. in $D=2$. Potenziale in H dovuto a due

semilinee

cariche a potenziali differenti. Da qui soluzione all'interno di un cerchio

(linee equipotenziali, linee di forza del campo elettrico). Inizio problema

del campo elett. generato da un'astina unif. carica.

L 25/03/2019 LEZIONE 13

12 e 13) teorema di Cauchy per rettangoli.

generalizza quando f non è olomorfa in un punto (pur essendo continua)

applicazione: calcolo dell'integrale gaussiano.

teorema di Cauchy per domini rettangolari.

relazione tra teorema di Cauchy e formula di Stokes.

Formula integrale di Cauchy.

teorema della media. calcolo di un integrale

usando la formula integrale di Cauchy.

M 26/03/2019 LEZIONE 14

14) teorema sull'esistenza delle derivate di ogni ordine di f olomorfa e

conseguenza sulla sua parte reale ed immaginaria. teorema se $f = O(z^n)$ per

z all'infinito allora f è un polinomio, caso $n=0$, (teorema di Liouville).

Applicazione: il teorema fondamentale dell'algebra.

V 29/03/2019 ESERC. 6

ESERCITAZIONE 5 e 6: campo elettrico generato da una barretta uniformemente

carica, descrizione dettagliata in relazione al taglio del logaritmo.

deduzione via Liouville della formula per $1/p(z)$, polinomio con solo radici

semplici. Applicazione al calcolo di un integrale ($(1/(1+x^6))$ tra 0

e infinito.) un altro esempio di integrale reale che si trasforma in un

integrale sulla circ. unitaria.

L 01/04/2019 LEZIONE 16

15 e 16) teorema di Morera.

cenno alla dimostrazione di Artin del teorema di Cauchy.

serie e successioni in $\mathbb{C}$, completezza di $\mathbb{C}$. criterio di Cauchy,

convergenza assoluta, prodotto di Cauchy di serie. criteri di convergenza.

serie di funzioni, convergenza uniforme, conv. unif. e integrazione.

teorema (no dim) per cui una serie di funzioni olomorfe ha limite una

funzione olomorfa etc. esempio della funzione zeta di Riemann.

serie di potenze e teorema sulla convergenza

in un cerchio (con dim),

raggio di convergenza e sua formula (no dim).

una serie di potenze definisce una funzione olomorfa nel suo cerchio

di conv.

verifica che il raggio di conv. della serie delle derivate è uguale a quello della funzione.

M 02/04/2019 LEZIONE 17

17) esempi molto semplici di serie di potenza e calcolo del raggio di convergenza, la serie esponenziale ed identificazione con $\exp(z)$ definita in precedenza. Lo sviluppo di Taylor di una funzione olomorfa in un disco, esistenza ed unicità. Discussione della relazione tra posiz. delle singolarità di una funzione ed il raggio di conv. del suo sviluppo di Taylor.

V 05/04/2019 ESERC. 8

ESERCITAZIONI 7 E 8. esercizio su jacobiano di una trasf. nel piano associata ad una funzione olomorfa. eserc. su calcolo del raggio di conv. di una serie (e discussione in relazione alla singolarità più prossima). verifica usando la serie esponenziale di $\exp(z)$ $\exp(w)=\exp(z+w)$ (prodotto di Cauchy). esercizio su prodotto di Cauchy e calcolo di aree. per una mappa olomorfa f che porta il cerchio unitario in un dato insieme (espressione dell'area per mezzo dei coeff. dello sviluppo di Taylor di f).

L 08/04/2019 LEZIONE 19

18 e 19. ancora un'osservazione sulla "naturalità" delle serie di potenze in $\mathbb{C}$ rispetto a quelle reali. Serie di Laurent, definizione ed esempi. integrali di cammino della serie di L. e unicità della serie.. Teorema sull'esistenza della serie di L. Caso delle singolarità isolate, caso dei poli, limite infinito sulla singol.; sing. essenziali (es. $\exp(1/z)$), teorema di Picard e non esistenza del limite.; singol. eliminabili. contrapposizione per le sing. eliminabili con la situazione analoga per le funzioni di variabile reale.

M 09/04/2019 LEZIONE 20

20. Il teorema dei residui e calcolo di un integrale (che si riporta alla circonf. unitaria).

V 12/04/2019 ESERC. 10

ESERCITAZIONI 9 e 10. lo sviluppo di Taylor del

$\log z$ con centro in un punto qualsiasi, osservazione che il raggio di convergenza è sempre la distanza dall'origine e non dipende dalla posizione del taglio. Esercizio su serie di laurent di una funzione. I polinomi di Hermite: funzione generatrice, relazione di ricorrenza, eq. differenziale, integrale di normalizzazione. Il lemma di Jordan per l'integrazione complessa (a proposito dell'integr. di $\sin(x)/x$).

L 15/04/2019 LEZIONE 22

21 e 22. caratterizzazione degli zeri di una funzione olomorfa, concetto di prolungamento analitico. semplici esempi. applicazione: il calcolo dell'integrale di $\exp(-x^2+zx)$ fatto via prolungamento analitico. La funzione Gamma di Eulero, definizione e suo prolung. analit. a funzione meromorfa su tutto $\mathbb{C}$. un altro esercizio sul prolungamento analitico di una funzione definita attraverso una serie.

M 16/04/2019 LEZIONE 23

23. spazi normati e loro proprietà. spazi di Banach, esempio di $C[a,b]$ con dimostra. operatori lineari, definizione, continuità limitatezza, ed equivalenza delle due. Estensione di un operatore limitato alla chiusura del suo dominio. Gli spazi $L(X,Y)$ e $B(X,Y)$.

L 29/04/2019 LEZIONE 25

24 e 25. norma di un operatore e sue proprietà: lo spazio $B(X,Y)$ è uno spazio normato. teorema se Y è completo allora $B(X,Y)$ è completo (con dimostra). Funzione di operatori, l'inverso se esiste, serie di Neumann per l'inverso di $(1-A)$ se A ha norma minore di 1. Gli spazi L^p , dimostra che sono spazi lineari e discussione della quotientazione rispetto alla relazione essere uguali q.o. Lo spazio L_1 , dimostrazione della sua completezza (Fischer-Riesz)

M 30/04/2019 LEZIONE 26

26. Disuguaglianze di Holder e Minkowski per L^p (senza dimostra) gli spazi di successioni $l^p(\mathbb{C})$, teorema: sono completi (con dimostra).. esercizio su un operatore su $l^p(\mathbb{C})$, si dimostra che è limitato e se ne calcola la norma, invertibile ma l'inverso non è limitato sul suo dominio.

V 03/05/2019 ESERC. 12

ESERCITAZIONI 11 e 12. dedicata a strategie di integrazione, integrali trigonometrici che si riducono ad un integrale sul cerchio unitario. il lemma di Jordan e la valutazione dell'integrale di $\sin x/x$ sull'asse reale. integrale di funzioni contenenti un taglio, esempi che si risolvono in più modi.

L 06/05/2019 LEZIONE 28

27 e 28. spazi con prodotto interno. disug. di Bessel e di Schwartz e norma associata ad un prodotto interno. formula di polarizzazione e identità del parallelogramma. teorema (senza dim) che lo associa al fatto che una norma derivi da un $(\cdot, \cdot)$. Il $(\cdot, \cdot)$ è continuo rispetto alla norma. esempi di spazi di H. di matrici. L^2 e $L^2(C)$. Isomorfismo tra S.H. S.H. separabilità es. accennato per $L^p(C)$. processo di ortogonalizzazione es. dei polin. di Legendre e delle funzioni di Hermite. es. di sottosp. lin. non chiuso e riflessione sul fatto che le funzioni integr. secondo Riemann non portano a spazi completi con norme integrali.

M 07/05/2019 LEZIONE 29

29. tutti gli S.H. di dimensione n sono isomorfi a C^n . la chiusura di un sottospazio lineare è un sottospazio lineare. Complemento ortogonale e sue proprietà. Relazione solo parzialmente dimostrata della relazione tra M-ortog-ortog e la chiusura di M. Inizio dimostrazione del teorema della proiezione (il lemma). (arrivati nel lemma fino alla dimostrazione dell'esistenza)

V 10/05/2019 LEZIONE 31

30 e 31. Fine dimostrazione del lemma del teor. proiezione e quindi dimostrazione del teorema. fine dimostrazione della relazione tra M-ortog-ortog e la chiusura di M. esempio della costruzione della proiezione nel caso di sottospazio di dimensione finita. sistemi ortonormali e orton. completi, definizione di sonc . formula di Parseval ed enucleazione formule di "pratico impiego", in particolare sviluppabilità su un sonc di ogni vettore. Spazi di Hilbert separabili e s.o.n.c. (senza dimostrazione). Inizio operatori su uno spazio di H. proprietà: il kernel è chiuso. Funzionali e prodotto interno.

lemma di rappr. di Riesz (con dimostra)

L 13/05/2019 ESERC. 14

ESERCITAZIONI 13 e 14. Norma euclidea di una matrice: massimo autovalore
di A^*+A , esempio numerico relativo, relazione con la norma di A in quanto
elemento dello spazio hilbertiano delle matrici con $\text{tr}(A^*+A)$ finita.
operatore di moltiplicazione in $L^p[a,b]$, determinazione della sua norma,
l'op. di moltiplicazione in $L^2[R]$ non è limitato, considerazioni relative
al caso della meccanica quantistica.
Funzioni di operatori limitati, il caso di $\exp(A)$, discussione del fatto
che $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$ solo se gli op. commutano.
Relazione di inclusione tra gli spazi $L^p(W)$ nel caso l'insieme W abbia
misura finita.

M 14/05/2019 LEZIONE 32

32. definizione dell'aggiunto di un operatore limitato .
Proprietà dell'aggiunzione.
rappresentazione matriciale di un op. limitato
(e rappresentazione del suo aggiunto).
relazione : $\ker(A)^{\text{ortog}} = \text{chiusura Ran}(A)$.
I proiettori ortogonali, definizione tramite il teorema della proiezione,
idempotenza e hermitianità, equivalenza con l'essere un proiettore (no dim.).

V 17/05/2019 LEZIONE 34

33 e 34. esempi di proiettori, i proiettori e le op. algebriche (senza dim.)
operatori isometrici ed operatori unitari, uso della id. di polarizza per
dimostrare che dalla conservazione della norma segue quella del prodotto
interno. $U^*+U=I$ e $U^*+U=I \Rightarrow UU^*=I$ per gli operatori unitari,
l'aggiunto estende l'operatore inverso per gli op. isometrici,
identificazione per questi ultimi di UU^* come proiettore sul Range di U .
Aggiunto di un operatore non limitato e dominio denso dell'operatore.
Principali proprietà dell'aggiunzione (e segnalazione di quelle che non
sono valide).
esempio: dimostrazione che l'op. di moltiplicazione su $L^2(R)$ ammette
aggiunto ed è autoaggiunto.

L 20/05/2019 ESERC. 16

ESERCITAZIONI 15 e 16.

traccia di un proiettore, proprietà, traccia di una matrice di proiezione,

esercizio numerico nel caso di matrici 3×3 .

esponenzializzazione di matrici, utilizzo del teorema di H.C.

soluzione nel

caso delle matrici con n autovalori distinti e nel caso di matrici hermitiane.

Esempio numerico con una matrice 2×2 (lasciato in alcuni dettagli da

completare agli studenti). Calcolo dell'aggiunto di $\exp(zA)$ con A limitato

su S.H. caso $z=it$, con t reale: gli op. risultano unitari.

enunciazione del

teor. di Stone, esempio senza dimostrazioni nel caso delle traslazioni,

esempio nel caso dell'op. di moltiplicazione per $\exp(itx)$, proposto agli

studenti di calcolare nel dettaglio il generatore (lo riprenderemo in seguito).

M 21/05/2019 LEZIONE 35

35. Serie di Fourier, introduzione e convenzioni.

Il lemma di Riemann. relazione tra regolarità

e andamento con n dei coeff. a_n e b_n .

(esercizio relativo proposto agli studenti)

Il teorema di Dini, formulazione e commenti, generalizza al caso di funzione con limiti dx e sx .

(dimostra ancora da fare)

V 24/05/2019 LEZIONE 37

36 e 37. Dimostra teorema del Dini, esempio dello sviluppo di f . della

funzione $f(x)=x$ e coerenza con il teorema (anche nella forma generalizzata),

identità di Parseval e valutazione della somma della serie di termine $1/n^2$.

secondo teorema di Fejér e completezza in L^2 del sistema di Fourier. (conv.

secondo Cesàro in L^1). Analoghi sviluppi su $L^2[a,b]$ (ottenuti con isomorfismo).

La tr. di Fourier, introd. intuitiva. proprietà elementari di limitatezza

e continuità della funzione trasformata. Lemma di Riemann–Lebesgue basato

sulla densità delle funzioni a scala.

Convoluzione in L_1 , proprietà rispetto alla trasformata. Teorema di

inversione (no dimostra). Dimostra che le funzioni di Hermite sono autovettori della trasf.

L 27/05/2019 saltata per votazioni

M 28/05/2019 LEZIONE 38

38. trasformata di un prodotto di convoluz.

T.: le funzioni di Hermite formano un s.o.n.c.

La trasf. di F. in L^2 .

Teorema di Plancharel (no dimostra) rappresentazione dell'operatore unitario di Fourier Plancharel e del suo inverso per mezzo delle funzioni di Hermite.

V 31/05/2019 ESERCIT.18

ESERCITAZIONI 17 e 18. calcolo della trasf. di F. di una funzione di L^2

ma non di L^1 .

Relazione tra regolarità di una funzione e andamento all'infinito della

sua trasformata

(analizzato il caso delle funzioni di L^1 con derivata prima continua e integrabile.).

In relazione alle serie trigonometriche: s.o.n.c. di soli seni o di soli coseni

(esempio dell'applicazione alla corda vibrante con estremi fissi).

Esempio dettagliato di un operatore isometrico ma non unitario

(l'operatore

di Shift in $l^2(\mathbb{C})$).

un esercizio ulteriore sulle serie di Fourier.

L 03/06/2019 LEZIONE 40

39 e 40. Spazio $S(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescenza rapida, definizione, convergenza.

Teorema di completezza (cenno alla dimostrazione), inclusione in L^p , se f_n

converge in $S(\mathbb{R})$ allora converge anche in L^p .

spazio S e tr. di Fourier: L'immagine di S è in S e la trasformata è un

operatore continuo di S in se'.

Teorema di inversione (con dimostrazione): F è un operatore iniettivo e suriettivo

di S in se'; teorema di isometria.

La trasf. della convoluzione di elementi di $S(\mathbb{R})$ è in $S(\mathbb{R})$.

M 04/06/2019 (*)

Brevissima introduzione alle distribuzioni. Definizione dello spazio delle

distribuzioni temperate,

criterio sufficiente (e necessario) affinché un funzionale lineare su $S(\mathbb{R})$ sia

anche continuo. Distribuzioni regolari, (funzioni a crescita lenta), esempi,

l'esponenziale come es. di funzione loc. int. non a crescita lenta, distribuzioni non regolari, la delta di Dirac. Convergenza di successioni

di distribuzioni, due successioni che convergono alla delta di Dirac.

V 07/06/2019 ESERCIT.20

es. di operatori unitari in $L^2(C)$, esempio di gruppo di operatori unitari

in $L^2(C)$ fortemente continuo, e determinazione del generatore (si tratta

dell'evoluzione temporale per l'oscillatore armonico in mecc.

quant.)

gruppo delle traslazioni in $L^2(R)$, unitaria equivalenza via trasf. di

Fourier con il gruppo unitario che moltiplica per un fattore di fase.

unitaria equivalenza del gener. delle traslazioni con l'op. di

moltiplicazione, Verifica che su $S(R)$ questo corrisponde all'usuale generatore

operatore di momento (cioè di derivazione)

L 10/06/2019 (*)

Completezza dello spazio $S(R)'$. Altri esempi: la parte principale, formula di

C.P. Calcolo distribuzionale: c.c. di una distrib. trasformazione per parità,

moltiplicaz. per una funzione a crescita algebrica infinitamente derivabile e

relativa proprietà della delta di Dirac, $x\delta(x)=0$. Derivata di una

distrib. Derivata della Theta e della delta.

Trasformata di Fourier delle distribuz.

Trasf. e antitrasf. della delta, relazione di "ortogonalità" delle autofunzioni

dell'operatore di momento. Cenno a eq. differenziali alle

distribuzioni,

soluzione di $f'=0$.

L'argomento delle lezioni indicate con (*), rivolte agli studenti più interessati, e appositamente non numerate, è fuori dal programma d'esame.