METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 29 gennaio 2014

Esercizio 1
Calcolare l'integrale:
$$\int_0^\infty dx\, \frac{x \sin(\pi x)}{(x^2+1)^2}.$$

Esercizio 2
Sia $f_n(z)$ una successione di funzioni olomorfe con dominio contenente il disco $|z| \leq 1$. Sotto quale condizione la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sul disco chiuso? Dare una condizione sufficiente di convergenza uniforme della serie.

Esercizio 3
Una matrice complessa $n \times n$ $\mathbf{P}$ è un proiettore ortogonale. Quali valori può assumere la traccia della matrice e qual' è il significato geometrico? Scrivere esplicitamente lo sviluppo in serie di $\mathbf{P}$ della matrice $\exp(i\pi\mathbf{P})$.

Esercizio 4
Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{\sin x}{x + ie^x}$$
Dire se appartiene a $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$, $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 5
Determinare, se esiste, il limite in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ della successione di funzioni generalizzate
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^n & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Esercizio 6
Enunciare il teorema di Riemann-Lebesgue e illustrarlo con l'esempio della funzione $f(x) = (1+x^2)^{-1}$.