

METODI MATEMATICI DELLA FISICA

Prova scritta del 22 giugno 2011

Esercizio 1

Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin(3\theta)}{2 + \sin \theta}.$$

Esercizio 2

Determinare i possibili sviluppi in serie (analitiche e/o di Laurent) con centro $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + iz}$$

indicando per ciascuna la regione di convergenza.

Esercizio 3

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, con prodotto interno $(x|y)$. L'insieme delle coppie ordinate

$$\mathcal{H}^2 = \{ (x, y) \mid x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{H} \},$$

è uno spazio lineare con le regole $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

1) Mostrare che $\langle (x, y) | (x', y') \rangle =: (x|x') + (y|y')$ è un prodotto interno,

2) dimostrare che $\mathcal{H}^2$ è completo.

Esercizio 4

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione

$$\langle F | \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-\epsilon x} \phi(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$