Metodi Matematici della Fisica
10 settembre 2019
(Lo studente è invitato a svolgere 4 esercizi a scelta)

Esercizio 1) Valutare l'integrale $\int_{-2}^{2} dx \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$.
(può essere utile una semplice sostituzione di variabile).

Esercizio 2) Sia $f(z) = \int_{\gamma(z)} \frac{\cos(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta$, dove $\gamma(z)$ è un qualsiasi cammino regolare da $z_0 = \pi/2$ a z che non passa per l'origine.
Si argomenti che la definizione ha senso e definisce una funzione con una singolarità isolata in $z = 0$. Si calcoli quindi la parte principale del relativo sviluppo di Laurent.
Cosa cambierebbe se considerassimo $g(z) = \int_{\gamma(z)} \frac{\cos(\zeta)}{\zeta} d\zeta$?

Esercizio 3) Nello spazio di Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ si consideri la famiglia di operatori $\{T_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ definiti da $(T_a f)(x) = f(x)$ per $x > a$ e $(T_a f)(x) = -f(x)$ per $x < a$.

- Si dimostri che i T_a sono operatori autoaggiunti ed unitari.
- Se ne determinino autovalori ed autovettori.
- Esiste per ogni $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ il $\lim_{a\to+\infty} T_a f$? E nel caso quanto vale? Esiste anche in norma $\lim_{a\to+\infty} T_a$?
- Si calcoli $[T_a, T_b]$, discutete la rilevanza del risultato dal punto di vista dell'esistenza di una base ortonormale di autovettori comuni a T_a e T_b.

Esercizio 4) Si determini nello spazio $\mathrm{L}^2[0, \pi]$ un'espansione della funzione $f(x) = \sin(x)$ in armoniche della sola funzione coseno. Si discuta il tipo di convergenza della serie ottenuta e si ottenga come conseguenza il valore di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Esercizio 5) Si consideri la successione di distribuzioni temperate $\Delta_N = \frac{1}{N} \sum_{k=-N}^{N} \delta_{\frac{k}{N}}$, dove δ_a indica la delta di Dirac in a. Mostrare che la successione converge, e determinare la distribuzione limite. Calcolare la derivata della distribuzione limite.
(sugg.: nel processo di soluzione si riconosca un'espressione ben nota!)