Metodi Matematici della Fisica
29 gennaio 2019

Esercizio 1)
Sia C la circonferenza antioraria di centro $i\pi$ e raggio π. Calcolare l'integrale:

$$\int_C dz \frac{e^{z/2} + |z|^2}{(z - i\pi)^2}$$

Esercizio 2)
Si determini l'immagine della semiretta Re$z = 1$, Im$z > 0$ del piano complesso per la mappa $u + iv =$Log z. Si determini il vettore tangente in ogni punto, e si tracci qualitativamente il grafico della curva nel piano (u, v).

Esercizio 3). Sullo spazio lineare delle matrici reali 3×3 munito del prodotto interno $(A, B) = \mathrm{tr}[A^T B]$, si consideri l'operatore lineare $\hat{\mathbf{M}}A = MA$, dove M è la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si espliciti l'operatore aggiunto $\hat{\mathbf{M}}^\dagger$.
- Si determini Ker $\hat{\mathbf{M}}$, che dimensioni ha?
- Si determini il proiettore $\hat{\mathbf{P}}$ su Ker $\hat{\mathbf{M}}$.
- Si calcoli $\hat{\mathbf{P}}I$, dove I è la matrice unità 3×3.

Esercizio 4a)
Sullo spazio $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, siano DF ed $\mathscr{F}F$ la derivata e la trasformata di Fourier di una distribuzione F. Dimostrare che: $D^2\mathscr{F}F = -\mathscr{F}X^2F$, dove $< X^2F|\varphi > \equiv < F|X^2\varphi >$ e $(X^2\varphi)(x) = x^2\varphi(x)$.

Esercizio 4b)
Usando opportunamente il lemma di Riemann-Lebesgue (ma non solo) si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty dx \frac{\sin(nx)}{x\sqrt{1 + x^2}}$$