Metodi Matematici della Fisica
26 settembre 2018

Esercizio 1) Calcolare l'integrale complesso $\int_{\square} dz|z|$, dove $\square$ è il contorno antiorario del quadrato di vertici $0, 1, 1+i, i$.

Esercizio 2) Calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \frac{1}{3+x}$$

Esercizio 3). In uno spazio di Hilbert separabile $\mathscr{H}$, sia $\{u_n\}_1^\infty$ un sistema ortonormale completo. Si consideri l'operatore lineare

$$Ux = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n|x) u_{n+1}, \quad x \in \mathscr{H}$$

e si risponda alle seguenti domande: i) U è limitato? ii) U è invertibile? iii) U è isometrico? iv) U è unitario?
Si costruisca l'operatore aggiunto $U^\dagger$.

Esercizio 4) Si calcoli la trasformata di Fourier, $(\mathscr{F} f)(k)$, di

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+(x-y)^2)(1+y^2)} dy$$

Esercizio 5a) Mostrare che, in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin^2(kx)}{\pi k x^2} = \delta(x)$$

Si ricorda che $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi$.

Esercizio 5b). i) Mostrare che l'operatore $U : \mathrm{L}^2(0,a) \to \mathrm{L}^2(0,b)$, $(a,\, b > 0)$, $(Uf)(x) = \sqrt{\frac{a}{b}} f(x\frac{a}{b})$ è un isomorfismo Hilbertiano.
ii) Sapendo che le funzioni $\{\cos(kx)\}_{k=0}^\infty$ e $\{\sin(kx)\}_{k=1}^\infty$ sono una base completa ortogonale in $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$, mostrare che $\{\cos(6kx)\}_{k=0}^\infty$ e $\{\sin(6kx)\}_{k=1}^\infty$ lo sono in un opportuno spazio $\mathrm{L}^2(0,a)$.
iii) Posto $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\cos(6kx) + e^{-k}\sin(6kx)$, determinare $\|f\|^2$ mediante i coefficienti dello sviluppo.