

Metodi Matematici della Fisica 20 giugno 2018

Esercizio 1) Sia γ la semicirconferenza orientata da $-i$ a $+i$, e passante per $+1$. Calcolare l'integrale su γ per tutte le tre funzioni:
1) $z + |z|$, 2) $\text{Log}(z)$, 3) $\sin(z)$

Esercizio 2) Calcolare

$$\int_0^{2\pi} dx \frac{\sin x + \cos x}{2 + \sin x}$$

Esercizio 3). Sullo spazio lineare L delle matrici complesse $n \times n$ munito del prodotto interno $(B, A) = \text{tr}(B^\dagger A)$, si consideri l'operatore lineare $K_M : A \rightarrow MA$, dove M è una fissata matrice $n \times n$.

i) Si costruisca l'operatore coniugato hermitiano (aggiunto) di K_M .

ii) In $n = 3$ si dica se l'operatore K_M con

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/\sqrt{6} & 1/(3\sqrt{2}) \\ -1/\sqrt{6} & 1/2 & -1/(2\sqrt{3}) \\ 1/(3\sqrt{2}) & -1/(2\sqrt{3}) & 1/6 \end{pmatrix}$$

sia o no un proiettore ortogonale. In caso affermativo si determini in L la dimensione dello spazio di proiezione di K_M .

Esercizio 4) Una funzione è definita in \mathbb{C} mediante la serie

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{\cos(nz)}{e^n + 1}$$

i) Si determini la regione Ω del piano complesso in cui f risulta essere una funzione olomorfa. ii) Si determini in Ω l'espressione della derivata $f'(z)$. FACOLTATIVO: Sapreste estendere per prolungamento analitico la funzione f oltre Ω ?

Esercizio 5a)

1) Posto: $\langle \theta_a | \varphi \rangle = \int_a^\infty dx \varphi(x)$, determinare la distribuzione $\mathcal{F}^2 \theta_a$.

2) Mostrare che $\lim_{a \rightarrow \infty} a \theta_a = 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (più in generale $a^k \theta_a \rightarrow 0 \forall k > 0$).

Esercizio 5b). Si calcoli $\lim_{k \rightarrow \infty} k \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin(x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} \exp(-ikx)$.