Metodi Matematici della Fisica
19 luglio 2018

Esercizio 1) Scrivere la parte principale dello sviluppo di Laurent centrato in $z = -1$ della funzione $f(z) = \frac{\text{Log}(-z)}{(z^2-1)^2}$. Qual è il disco forato di convergenza?

Esercizio 2) Calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos(\pi x)}{4 + 5x^2 + x^4}$$

Esercizio 3). Mostrare che, per $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Detta R_θ la matrice, in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ si considera l'operatore $(U_\theta f)(\mathbf{x}) = f(R_\theta^{-1}\mathbf{x})$. Mostrare esplicitamente che U_θ è unitario.
Si dimostri che gli autovalori di U_π sono solo ± 1 e si caratterizzino i rispettivi autospazi.

Esercizio 4) Sia $H = F + F^\dagger$, dove F è l'operatore di Fourier Plancherel su $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. i) Determinare il nucleo $\ker H$ e il proiettore su tale sottospazio; ii) Mostrare che H è limitato e calcolare la norma-sup di H.

Esercizio 5a)
Si consideri la successione di distribuzioni $F_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n \delta(x - \frac{k}{n})$.
1) In base alle vostre conoscenze, posso affermare che il limite $n \to \infty$ esiste? 2) Quale distribuzione lo descrive? 3) (facoltativo) dimostrare il punto 1.

Esercizio 5b). Su $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ è assegnata la famiglia di funzionali lineari

$$F_n : f \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (x-n)^2}} f(x)dx, \quad n = 1, 2, ...$$

Si dimostri, in base a quanto studiato, che gli F_n sono funzionali lineari limitati su $\mathrm{L}^2(R)$. È vero o falso che $F_n \to 0$ in norma?
Facoltativo: è vero o falso che $\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ si ha $\lim F_n f = 0$?