Metodi Matematici della Fisica
21 febbraio 2018

Esercizio 1) Calcolare:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \, \frac{e^{ix\pi}}{x^2 - 1 - 2ix}$$

Esercizio 2) Si consideri la funzione complessa $f(z) = \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z+2}$ dove Log è il logaritmo principale. Specificarne le singolarità.
Posto $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, si dica come è fatto il coefficiente c_k e si determinino esplicitamente i primi 3 coefficienti.
Si determini il raggio di convergenza della serie.

Esercizio 3) Sullo spazio di Hilbert $\mathbb{R}^2$ con l'usuale prodotto scalare, si consideri l'operatore lineare

$$O = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Calcolare la norma-sup di O.
2) Mostrare che il punto 1) ha una semplice relazione con gli autovalori di $O^T O$.

Esercizio 4) Si consideri la funzione $f(x) = \sin x$. Determinare la funzione lineare $ax + b$ che meglio approssima f sull'intervallo $[0, \pi/2]$ nella norma di $\mathrm{L}^2[0, \pi/2]$.

Esercizio 5a) Mostrare che la famiglia di funzioni

$$f(x) = \tanh(\beta x), \qquad \beta > 0$$

converge a $\mathrm{sign}(x)$ per $\beta \to +\infty$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 5b) Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $\cos(x/2)$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Quale identità segue dall'applicazione della formula di Parseval?
Si espliciti la somma della serie in $x = (3/2)\pi$.