Metodi Matematici della Fisica
11 settembre 2017

Esercizio 1) Determinare l'immagine della circonferenza $|z| = 1$ e degli assi Re $z = 0$, Im $z = 0$ per la mappa $w = z/(1 + z)$. Fornire anche un grafico del risultato (si noti che se w è immagine di z, allora $\bar{w}$ è immagine di $\bar{z}$).

Esercizio 2) Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(1 - \cosh z)^2}$$

1) determinare la parte principale dello sviluppo di Laurent in $z = 0$;
2) determinare il raggio di convergenza della parte analitica dello sviluppo.

Esercizio 3) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} dx\, (\tan x)^{1/4}$$

Esercizio 4) Nello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, si considerino gli operatori $(P\varphi)(x) = -i\varphi'(x)$, $(Q\varphi)(x) = x\varphi(x)$ ed $\mathcal{F}$ (trasformata di Fourier).
1) A partire dalle definizioni di trasformata e antitrasformata di Fourier e dal teorema di inversione, mostrare che $(\mathcal{F}^2\varphi)(x) = \varphi(-x)$.
2) Dimostrare che $Q\mathcal{F} = \mathcal{F}P$;
3) calcolare il commutatore di $P^2 + Q^2$ con $\mathcal{F}$.

Esercizio 5) Si consideri nello spazio di Hilbert $\ell_2(\mathbb{C})$ la famiglia di operatori U_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, definiti da

$$U_\alpha \;:\; \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \to \{e^{-in\alpha} c_n\}_{n=1}^{\infty}$$

1) Si dimostri che gli U_α sono operatori unitari,
2) che soddisfano la proprietà di gruppo abeliano e quella di forte continuità in $\alpha = 0$.
Sapreste determinarne il generatore?