

**Metodi Matematici della Fisica**  
**27 giugno 2017**

i) Si consideri la funzione  $f(z) = \frac{1}{z^3-1}$  e lo sviluppo  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+1)^n$ . Se ne determini il raggio di convergenza. Si determinino i coefficienti  $c_n$  e si verifichi l'accordo con la risposta alla prima domanda.

ii) Mostrare che la matrice  $\begin{pmatrix} 3/2 & z \\ z^* & 1/4 \end{pmatrix}$  non rappresenta una proiezione ortogonale su  $\mathbb{C}^2$  per qualunque  $z \in \mathbb{C}$ .

**Esercizio 1)** Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt{x}}{(x+i)^2}$$

**Esercizio 2)** Si considerino le matrici  $2 \times 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$$

Mostrare che formano un gruppo, non unitario, di trasformazioni sui vettori di  $\mathbb{C}^2$ . Mostrare che è fortemente continuo in  $x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \|M(x)u - u\| \rightarrow 0$ ,  $\forall u \in \mathbb{C}^2$ . Determinare  $T$  affinché  $M(x) = \exp(xT)$ .

**Esercizio 3)** Si determini nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  lo sviluppo in serie di Fourier della funzione  $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ . Esplicitare l'identità di Parseval.