Metodi Matematici della Fisica
30 gennaio 2017

i) $f \in \mathrm{L}^2(-1,1)$ ha norma $\|f\|_2 = 5$. Porre un limite superiore alla norma di f in $\mathrm{L}^1(-1,1)$.

ii) Considerate l'applicazione $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, $< f|\varphi >= \int_{-1}^{1} dx x \varphi(x)$. Dimostrare che f è una distribuzione temperata e calcolarne la derivata.

iii) Calcolare il residuo in $z = 0$ di

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{e^z - 1}$$

AVVERTENZA: 2 dei 3 esercizi i,ii,iii devono avere valutazione sufficiente, altrimenti la prova è comunque valutata insufficiente.

Esercizio 1) Si consideri la matrice 2×2

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione da $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{x}^\dagger M \mathbf{y} = \sum_{ij} \overline{x}_i M_{i\,j} y_j$.
1) Si dimostri che definisce un prodotto interno su $\mathbb{C}^2$.
2) Se A è una matrice 2×2 si determini l'espressione della corrispondente matrice aggiunta rispetto a questo prodotto interno.

Esercizio 2) Si determini nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ lo sviluppo in serie trigonometrica della funzione $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$, discutendo in breve il tipo di convergenza possibile.

Esercizio 3) Si consideri sul $\mathrm{L}^2[-\pi, \pi]$ l'operatore lineare P definito da

$$(Pf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[4\cos^2(x-y) - 1\right] f(y) dy$$

Si dimostri che P è un proiettore ortogonale.