METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 08 luglio 2016

i) Determinare l'anello di convergenza della serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1+z)^n}{(2i+1)^{|n|}}$$

ii) Data la mappa $w = \exp z$ determinare l'immagine del rettangolo di vertici $2, 3, 3+i, 2+i$ e calcolarne l'area.

iii) Dimostrare che $\mathrm{tr}(A^\dagger B)$ definisce un prodotto interno di matrici A e B in $\mathbb{C}^{n\times n}$

AVVERTENZA: 2 dei 3 esercizi i,ii,iii devono avere valutazione sufficiente, altrimenti la prova è comunque valutata insufficiente.

Esercizio 1
Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{2\pi} dx\, \frac{\cos(4x)}{2+\sin x}$$

Esercizio 2
Si consideri la funzione $f(x) = \exp(-|x|)$.
1) Se ne determini lo sviluppo di Fourier in $\mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$.
2) Ottenere da tale sviluppo la somma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Esercizio 3
1) Calcolare gli autovalori della matrice

$$M = \exp \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Ha soluzione l'equazione $Mu = u$? Nel caso, la si determini.