

**METODI MATEMATICI DELLA FISICA**  
**Prova scritta del 14 settembre 2015**

**Esercizio 1.** Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)}.$$

**Esercizio 2.** Determinare la parte principale dello sviluppo di Laurent in  $z = 1$  della funzione

$$\frac{\log z}{(z - 1) \sinh^2(z - 1)}$$

**Esercizio 3.** Dato un operatore unitario  $\hat{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  (spazio di Hilbert), mostrare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} \hat{U}^k$$

converge in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  in un cerchio  $|s| < R$  da determinare.

**Esercizio 4.** Si considerino i funzionali  $F_a$  su  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ :

$$F_a \varphi = \int_{-1}^1 dx \varphi(x) \sin(ax), \quad a > 0$$

- 1) Mostrare che  $F_a$  appartiene a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  e calcolarne la derivata;
- 2) Determinare il limite  $a \rightarrow \infty$  di  $F_a$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .