

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 24 giugno 2015

Esercizio 1. Calcolare:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x^\nu}, \quad 0 < \nu < 1.$$

(e' utile considerare il cammino chiuso formato dai semiassi $\operatorname{Re} z > 0$ e $\operatorname{Im} z > 0$ e il quarto di circonferenza all'infinito).

In alternativa calcolare:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos(\theta - \theta')}{2 + \cos(2\theta)}$$

Esercizio 2. Si considerino gli operatori \hat{D}_N su $L^2(0, 2\pi)$:

$$(\hat{D}_N f)(x) = \sum_{|n| \leq N} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{2\pi} e^{in(x-y)} f(y)$$

- 1) Mostrare che \hat{D}_N è limitato e calcolarne la norma.
- 2) Calcolare esplicitamente il kernel $K_N(x, y)$ dell'operatore integrale.
- 3) $\hat{D}_N \rightarrow \hat{1}$ se $N \rightarrow \infty$ nella norma degli operatori?

Esercizio 3. Determinare le matrici $\exp(-sM)$, $s \in \mathbb{R}$, e loro autovalori, essendo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.

Mostrare che se $f_n \rightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R})$ allora $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.