

**METODI MATEMATICI DELLA FISICA**  
**Prova scritta del 8 luglio 2015**

**Esercizio 1.** Calcolare in successione i due integrali:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} \log x$$

(è utile considerare un settore circolare di opportuna apertura, poggiato sul semiasse reale).

**Esercizio 2.** Determinare i coefficienti  $c_n(t)$  dello sviluppo in serie di potenze

$$\frac{e^{zt}}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n c_n(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Qual'è il raggio di convergenza della serie in  $z$ ? Come si comporta  $|c_n(t)|$  per grande  $n$ ?

**Esercizio 3.** Sia  $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Mostrare che:

- 1)  $(\text{Ran } \hat{A})^\perp = \text{Ker } \hat{A}^\dagger$ ;
- 2) se esiste  $\hat{A}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , allora  $\hat{A}^\dagger$  è invertibile.
- 3) In che relazione sono  $\|\hat{A}\|$  e  $\|\hat{A}^{-1}\|$  ?

**Esercizio 4.** Mostrare che la derivata in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  di  $\frac{1}{2} \log(x^2)$  è  $P(1/x)$  (parte principale di  $1/x$ ).