

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 18 febbraio 2015

Esercizio 1

Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin^2(x+1)}{x^2+x+1}.$$

Esercizio 2

Si consideri l'operatore lineare $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$

$$(Tf)(x) = \int_0^1 ds \frac{f(s)}{\sqrt[4]{|x-s|}}, \quad x \in [0, 1]$$

Mostrare che T è un operatore limitato e calcolarne la norma.

Esercizio 3

Mediante la disuguaglianza di Schwarz maggiorare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{|x|e^{-(x+1)^2}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Suggerire una stima migliore.

Esercizio 4

Dimostrare che la successione di funzioni $\frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2x^2)$ converge a δ_0 in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.