

METODI MATEMATICI DELLA FISICA

Prova scritta del 15 settembre 2014

Esercizio 1

Calcolare l'integrale sulla circonferenza unitaria C

$$\int_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^5 + z^4 + z + 1}{z^5} \cos(z + \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Esercizio 2

Si consideri la trasformazione di Möbius

$$f(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$$

Determinare: 1) l'immagine del disco unitario $|z| < 1$; 2) le immagini degli assi reale e immaginario del piano z ; 3) la mappa $f \circ f \circ f(z)$.

Esercizio 3

Sia R una matrice di rotazione 3×3 . 1) Mostrare che i vettori colonna e riga della matrice formano due terne ortonormali. 2) Scrivere la matrice che trasforma la prima terna nella seconda. 3) Mostrare che se R è anche simmetrica, allora è diagonale.

Esercizio 4

Dato l'operatore $(\hat{X}\varphi)(x) = x\varphi(x)$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mostrare:

1) se F è una distribuzione temperata, anche $F \circ \hat{X}$ lo è; 2) $\delta_a \circ \hat{X} = a\delta_a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.