METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 20 giugno 2014

Esercizio 1
Calcolare l'integrale ($n = 2, 3, \ldots$):

$$\int_0^\infty dx \, \frac{1}{\sqrt[n]{x}(x+1)^2}.$$

Esercizio 2
Si considera l'insieme H_D delle funzioni olomorfe su $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tali che

$$\left[\frac{1}{\pi}\int_D dxdy|f(z)|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad (z = x + iy)$$

Mostrare che l'espressione fornisce una norma, e che la norma è Hilbertiana. Calcolare la norma del polinomio $1 + z + \ldots + z^N$. Fornire un bound in n sui coefficienti che sia sufficiente a garantire che la serie $\sum_{n=0}^\infty f_n z^n$ converga in H_D.

Esercizio 3
Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione periodica, che su un periodo è:

$$f(x) = |x| - x, \quad -\tfrac{1}{2} \leq x < \tfrac{1}{2}$$

Discutere alcuni valori particolari, per dedurre somme di serie o proprietà attese.

Esercizio 4
Giustificare l'affermazione: *gli autovalori di un operatore autoaggiunto in uno spazio di Hilbert separabile sono al più un insieme numerabile.* Se l'operatore autoaggiunto è limitato, in che intervallo sono contenuti necessariamente gli eventuali autovalori, e perché?

Esercizio 5
Calcolare la trasformata di Fourier in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ di $x\, e^{-i\pi x}$.