ESERCIZI FISICA QUANTISTICA II

(1) Si considerino due corpi con masse m_1 e m_2, posizioni $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ e impulsi $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$. Si considerino le coordinate del centro di massa $\vec{X} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/(m_1 + m_2)$ e relativa $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ e si determinino gli impulsi coniugati $\vec{P}$ e $\vec{p}$ che soddisfano le regole di commutazione canoniche.

(2) Esprimere l'energia cinetica per un sistema di due corpi di impulso p_1 e p_2 e massa m_1 e m_2 in termini dell'impulso totale e dell'impulso relativo.

(3) Considerare un sistema di due particelle di uguale massa m in una dimensione soggette al potenziale

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}m\omega^2\left(5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2\right) ,$$

dove x_1 e x_2 sono le coordinate delle due particelle. Determinare il cambiamento lineare di coordinate che permette di separare il problema. Determinare lo spettro di energia e la sua degenerazione.

(4) Per un sistema di due corpi in tre dimensioni in uno stato $|\psi\rangle$ considerare gli operatori parità $\mathcal{P}$ e scambio $\mathcal{S}$, definiti rispettivamente da $\langle\vec{x}_1\vec{x}_2|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-\vec{x}_1, -\vec{x}_2)$ e $\langle\vec{x}_1\vec{x}_2|\mathcal{S}|\psi\rangle = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$. Determinare l'azione degli operatori $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{S}$ sulla funzione d'onda del sistema nella base delle coordinate del centro di massa e relativa, e scrivendo queste ultime in coordinate sferiche.

(5) Considerare una sistema di due particelle unidimensionali, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2\right) + \hbar\lambda\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right)$$

dove a_i è un operatore che agisce sullo spazio degli stati fisici della i-esima particella, e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$
$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

per ogni i, j.

1. determinare la più generale trasformazione lineare degli operatori a_i che preserva le relazioni di commutazione;
2. utilizzare il risultato del punto precedente per determinare lo spettro della hamiltoniana.

(6) In uno spazio d-dimensionale, determinare il generatore delle traslazioni lungo una direzione $\hat{n}$, ed esprimere il risultato in termini dell'operatore impulso. Scrivere quindi l'operatore che realizza una traslazione finita di lunghezza k lungo $\hat{n}$, prima in termini del generatore, e poi esplicitamente nella base delle coordinate.

(7) Esprimere la funzione delta di Dirac n-dimensionale $\delta^{(n)}(\vec{x}-\vec{x}_0)$ in coordinate sferiche $r, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$.

(8) Si considere il momento angolare orbitale. Esprimere gli operatori L_x, L_y, L_z, L_+, L_- e L^2 nella base delle coordinate sferiche.

(9) Determinare i commutatori $[L_i, x_j]$, $[L_i, p_j]$, $[L_i, x^2]$ e $[L_i, p^2]$ ed interpretare il risultato in termini di proprietà di trasformazione sotto rotazioni.

(10) Sia $L_n = L_i n_i$ la componente del momento angolare lungo una direzione generica $\hat{n}$.

(a) Dimostrare che sugli stati $|lm\rangle$ tali che $l = 1$ vale

$$(L_n^3 - L_n)|lm\rangle = 0$$

(b) Dimostrare che il valor medio su un autosto di L_n delle componenti di $\vec{L}$ lungo le direzioni ortogonali a $\hat{n}$ sono nulle

(c) Sia $|\psi\rangle$ uno stato normalizzato tale che $\psi(x, y, x) = (ax + by + cz)f(r)$. Calcolare il valor medio di $\vec{L}$ su $|\psi\rangle$ nel caso in cui a, b, c siano numeri reali.

(11) Determinare i valori delle indeterminazioni $\Delta^2 L_x$ e $\Delta^2 L_y$ sugli autostati simultanei di L^2 e L_z. Determinare fra tali autostati quali sono "di minima indeterminazione" ovvero minimizzano il valore del prodotto $\Delta L_x \Delta L_y$.

(12) Si consideri uno stato $|\phi\rangle$ tale che: $\langle \vec{x}|\phi\rangle = \phi(|\vec{x}|)$ e mostrare che $|\phi\rangle$ è autostato di tutte le componenti del momento angolare.

(13) Si dimostri che $Y_{ll}(\theta, \phi) = \mathcal{N}_{ll} \sin^l \theta e^{il\phi}$ risolve l'equazione

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - l\cot\theta\right) Y_{ll}(\theta, \phi) = 0$$

e si determini la costante $\mathcal{N}_{ll}$ imponendo la condizione di normalizzazione per $Y_{ll}(\theta, \phi)$.

(14)
1. Determinare le matrici di S_x, S_y ed S_z per un sistema di spin uno nella base degli autostati di S_z, ossia gli elementi di matrice $\langle 1, m|S_i|1, m'\rangle$.
2. Determinare la trasformazione unitaria che realizza il cambiamento da questa base a quella in cui gli elementi di matrice di S_i valgono $\langle j|S_i|k\rangle = -i\hbar\epsilon^{ijk}$.

(15) Determinare la probabilità che una particella di spin 1 avente $s_z = +1$ sia rivelata con spin pari a ± 1 lungo un asse $\vec{n}$ generico.

(16) Si consideri un sistema di spin uno la cui hamiltoniana è data da

$$H = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

dove $\vec{B}$ è un vettore a componenti reali, e $\vec{S}$ è l'operatore di spin. Si determini e risolva la legge del moto per gli stati fisici in rappresentazione di Schroedinger. Si determini la probabilità si determini che un sistema che al tempo $t = 0$ è nello stato $m = -1$, al tempo t sia rivelato stato $m = +1$.

(17) Si consideri il problema precedente nel caso di un sistema di spin $\frac{1}{2}$. Si determini la probabilità si determini che un sistema che al tempo $t = 0$ è nello stato $m = 1/2$, al tempo t sia rivelato stato $m = -1/2$.

(18) Considerare la composizione di tre stati di spin $\frac{1}{2}$. In particolare sia dato un sistema di tre particelle di spin $\frac{1}{2}$, che interagiscono attraverso l'hamiltoniana

$$H = V(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1),$$

dove s_i è l'operatore di spin per la i-esima particella. Si determini lo spettro degli autovalori di energia e la loro degenerazione.

(19) Determinare i coefficienti di Clebsh-Gordan per la composizione di due spin 1 e di tre spin 1/2.

(20) Una particella in un potenziale sfericamente simmetrico è in uno stato descritto dal pacchetto d'onda

$$\psi(x, y, z) = C\,(xy + yz + zx)e^{-\alpha r^2}$$

(a) Qual è la probabilità che una misura del quadrato del momento angolare dia per risultato 0?

(b) Qual è la probabilità che dia $6\hbar^2$?

(c) Se si trova che il valore del numero quantico angolare è 2, quali sono le probabilità relative ai possibili valori di m?

(21) Lo stato di una particella di massa m è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(e^{i\phi}\sin\theta + \cos\theta)\,g(r),$$

dove

$$\int |g(r)|^2 r^2 dr = 1$$

e ϕ, θ sono gli angoli azimutale e polare rispettivamente.

(a) Quali sono i possibili risultati di una misura della componente L_z del momento angolare della particella in questo stato?

(b) Qual è la probabilità di ottenere ciascuno di tali possibili risultati?

(c) Qual è il valore di attesa di L_z?

(22) Dimostrare che l'operatore impulso radiale $p_r \to -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)$ è hermitiano verificando esplicitamente che $(\langle\psi|p_r|\phi\rangle)^* = \langle\phi|p_r|\psi\rangle$ nella base delle coordinate sferiche.

(23) Sia dato un sistema di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ che interagiscono attraverso la hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p_1}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p_2}^2}{2m_2} + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + B_1\vec{L}\cdot(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + B_2\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare relativo del sistema di due particelle. Si separi completamente il problema, e supponendo noto e non-degenere lo spettro dell'hamiltoniana radiale, si determinino lo spettro di H e la sua degenerazione.

(24) Determinare lo stato fondamentale (a meno della normalizzazione) e la forma generica degli stati eccitati per le autofunzioni dell'oscillatore armonico isotropo in coordinate sferiche.

(25) Considerare un oscillatore armonico *bidimensionale* isotropo avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^2,$$

con operatori di distruzione $a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x_i + i\frac{p_i}{m\omega}\right)$. Definire gli operatori

$$j_a \equiv \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma^a_{ij} a_j,$$

dove σ^a_{ij} è la a–esima matrice di Pauli di componenti i, j.

1. Determinare le relazioni di commutazione degli operatori j^a fra di loro e con l'hamiltoniana.
2. Esprimere l'operatore $j_1^2 + j_2^2 + j_3^2$ in termini dell'hamiltoniana e utilizzare il risultato per determinare lo spettro dell'hamiltoniana e la sua degenerazione.
3. Confrontare lo spettro e la sua degenerazione risultato che si ottiene separando il problema in coordinate cartesiane.

(26) Per un oscillatore armonico tridimensionale, dimostrare che in un autostato di energia i valori medi di energia cinetica e potenziale sono uguali $\langle T\rangle = \langle V\rangle$, confrontando la dipendenza dai parametri m ed ω dell'autovalore di energia e dell'hamiltoniana. Utilizzare il risultato per calcolare il prodotto dell'indeterminazione di $|\vec{x}|^2$ and $|\vec{p}|^2$ in un autostato di energia e confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.

(27) Considerare una particella di massa μ soggetta ad un potenziale centrale della forma

$$V(r) = \lambda^2 r^\alpha.$$

Determinare la dipendenza degli autovalori di energia dai parametri fisici μ, λ e α. Che cosa succede se $\alpha < -2$?

(28) Determinare il valor medio di r^k nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, con k intero. Utilizzare il risultato per determinare in questo stato il valor medio della posizione radiale, la sua varianza, ed il valor medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.

(29) Determinare la posizione del massimo della densità di probabilità radiale $\rho(r)$ nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. Confrontare il risultato con il raggio dell'orbita nel modello di Bohr.

(30) Dimostrare le seguenti proprietà del propagatore $K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t)$

1. $$K^*(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}, t; \vec{x}', t');$$
2. se il sistema è invariante per traslazioni allora
$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}' - \vec{x}; t', t);$$
3. se le autofunzioni della hamiltoniana sono reali allora
$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}, t'; \vec{x}', t);$$

4. se le autofunzioni della hamiltoniana sono autostati della parità allora
$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(-\vec{x}', t'; -\vec{x}, t).$$

(31) Determinare la azione classica in termini delle condizioni iniziali e finali per una particella libera unidimensionale. Determinare quindi l'elemento di matrice dell'operatore di evoluzione temporale (propagatore)
$$K(q', t'; q, t) = \langle q', t' | e^{\frac{1}{i\hbar} H(t'-t)} | q', t' \rangle$$
e dimostrare che esso, a meno della normalizzazione, coincide con l'esponenziale di $i/\hbar$ volte l'azione classica. Determinare il risultato nel limite $t' \to t$.

(32) Considerare un sistema tridimensionale soggetto ad un potenziale idrogenoide schermato
$$V(x) = \begin{cases} -\frac{e^2}{r} & 0 < r < R \\ -\frac{e^2}{r} e^{-\lambda(r-R)} & r > R \end{cases}$$

1. Calcolare la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale.
2. Discutere gli andamenti della soluzione trovata quando $\lambda \to 0$ e quando $R \to \infty$.

(33) La carica del nucleo di un atomo idrogenoide aumenta di una unità in seguito ad un decadimento β.

1. Determinare la variazione di energia dell'elettrone nell'n-esimo stato al primo ordine in teoria delle perturbazioni.
2. Determinare esattamente la differenza di energia tra il lvello n-esimo di energia per due atomi idrogenoidi per cui la carica del nucleo differisce di una unità e confrontare con il risultato trovato al punto precedente.

(34) Considerare un oscillatore armonico bidimensionale con potenziale
$$V(x, y) = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + \lambda xy. \tag{1}$$

1. Trattando il termine proporzionale a λ come una perturbazione, determinare la correzione ai primi due livelli eccitati al primo ordine in λ.
2. Determinare la degenerazione degli stati perturbati.
3. Determinare lo spettro esattamente e discutere per quali valori del parametro λ l'approssimazione perturbativa è buona.

(35) Considerare una particella di massa m in tre dimensioni soggetta ad potenziale armonico isotropo, perturbata a partire dal tempo $t = 0$ da un campo elettrico diretto lungo l'asse z oscillante e smorzato:
$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \Theta(t) \cos \omega t e^{-t/\tau}, \tag{2}$$
dove ω e τ sono costanti reali positive e $\vec{E}_0$ è un vettore costante.

1. Scrivere l'espressione dell'ampiezza di transizione dallo stato fondamentale in uno stato eccitato qualunque al primo ordine della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo.
2. Dimostrare che solo una transizione può avvenire e determinarne la probabilità per $t \gg \tau$.

(36) Considerare un sistema di N particelle la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^{N} V_i\left(\vec{x}_i\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} V_{ij}\left(\vec{x}_i, \vec{x}_j\right).$$

Dimostrare che se le N particelle sono identiche, allora la quanità

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv \langle \psi | \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_i) | \psi \rangle$$

non dipende da i. Considerare sia il caso di bosoni che di fermioni e discutere il significato fisico di $\rho(\vec{x}, t)$.

(37) Considerare un atomo di elio, formato da due elettroni identici di massa m e spin $\frac{1}{2}$ che si muovono nel potenziale di un nucleo. Detti $\vec{x}_1$, $\vec{p}_1$, $\vec{x}_2$ e $\vec{p}_2$ gli operatori posizione ed impulso dei due elettroni, ed e una costante reale (carica dell'elettrone), l'hamiltoniana è

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{12} \\ H_0 &= \frac{\vec{p_1}^2}{2m} + \frac{\vec{p_2}^2}{2m} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_1|} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_2|}, \\ H_{12} &= \frac{2e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \end{aligned}$$

Determinare funzione d'onda, energia e degenerazione per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato del sistema.