ESERCIZI FISICA QUANTISTICA I

(1) Un sistema quantistico può trovarsi in due stati $|1\rangle$ o $|2\rangle$, autostati di un'osservabile O che soddisfano le equazioni agli autovalori

$$O|1\rangle = |1\rangle; \qquad O|2\rangle = -|2\rangle. \tag{1}$$

(a) Il sistema viene preparato in un certo stato $|\psi\rangle$, oppure in un altro stato $|\phi\rangle$, e quindi viene effettuata una misura di O. L'operazione (preparazione seguita da misura) è ripetuta più volte. Quando il sistema viene preparato in $|\psi\rangle$ la misura dà sempre come risultato -1, mentre quando il sistema viene preparato in $|\phi\rangle$ la misura dà $+1$ in $\frac{1}{3}$ dei casi, e -1 in $\frac{2}{3}$ dei casi. Scrivere la più generale forma dei vettori di stato $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ nella base degli autostati di O .

(b) Da quanti parametri dipende ciascuno di questi vettori di stato e quali e quanti di questi parametri sono inosservabili, e quali invece corrispondono a proprietà misurabili del sistema?

(c) Qual è la probabilità che un sistema preparato nello stato $|\phi\rangle$ venga rivelato nello stato $|\psi\rangle$? Il risultato è univocamente determinato, o dipende da qualcuno dei parametri da cui dipendono $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$?

(d) Determinare il valor medio dei risultati delle misure di O in ciascuno dei due stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$.

(2) (a) Sia C l'operatore definito dal prodotto di due operatori A e B, $C = AB$; si determini l'operatore aggiunto $C^\dagger$ in termini di $A^\dagger$ e $B^\dagger$.

(b) Si dimostri che l'operatore definito dal commutatore di due operatori hermitiani $A = A^\dagger$ e $B = B^\dagger$, $[A, B] = AB-BA$ è un operatore anti-hermitiano e che quello definito dall'anticommutatore, $\{A, B\} = AB + BA$, è un operatore hermitiano.

(c) Si dimostri che il valor medio di un operatore hermitiano è un numero reale e che il valor medio di un operatore anti-hermitiano è un numero immaginario.

(3) Si dimostri che qualunque operatore può essere scritto come somma di un operatore hermitiano e di un operatore anti-hermitiano.

(4)$^{(*)}$ Il campo elettrico di un'onda piana di luce che si propaga lungo la direzione z è dato da

$$\vec{E}(z,t) = \frac{E_0}{2}[(\cos\theta\, e^{\mathrm{i}\,\phi_1}\,\hat{e}_1 + \sin\theta\, e^{\mathrm{i}\,\phi_2}\,\hat{e}_2)]e^{\mathrm{i}\,(kz-\omega t)} + c.c.] \tag{2}$$

dove $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_1$ sono vettori unitari rispettivamente lungo le direzioni x e y, e dove $c.c.$ indica il complesso coniugato. Lo stato di polarizzazione dell'onda (o del fotone) è descritto dal vettore unitario complesso

$$\hat{e}_{\theta\phi} = \cos\theta\,\hat{e}_1 + \sin\theta\, e^{\mathrm{i}\,\phi}\hat{e}_2, \quad \phi = \phi_2 - \phi_1, \quad \hat{e}^*_{\theta\phi}\cdot e_{\theta\phi} = 1\,.$$

Un'onda si dice polarizzata circolarmente se $\cos\theta = \sin\theta = 1/\sqrt{2}$ e $\phi = \pm\pi/2$ così che

$$\hat{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + \mathrm{i}\,\hat{e}_2), \qquad \hat{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - \mathrm{i}\,\hat{e}_2),$$

con $\hat{e}_\pm$ rispettivamente stati di polarizzazione destrogira e levogira.

(a) Mostrare che gli stati di polarizzazione circolare non dipendono, a parte un fattore di fase inessenziale, da come si scelgono gli assi x e y perpendicolari alla direzione di propagazione z.

Un polaroid (polarizzatore) è un foglio di plastica in grado di trasmettere la componente dell'onda di luce con polarizzazione parallela ad un dato asse (asse di trasmissione) e di assorbire la componente perpendicolare a tale asse. Assumiamo che l'efficienza di trasmissione e assorbimento del polaroid sia pari al 100%.

(b) Calcolare la frazione di intensità dell'onda trasmessa da un polaroid con asse di trasmissione lungo x (legge di Malus). Qual è la probabilità che un singolo fotone sia trasmesso dal polaroid? Qual è la probabilità che un singolo fotone sia trasmesso dal polaroid nel caso di polarizzazione circolare? Qual è lo stato di polarizzazione dopo che il fotone ha attraversato il polaroid?

Fotoni nello stato di polarizzazione $\hat{e}_1$ urtano una sequenza di N polaroid orientati in modo tale che l'asse di trasmissione del primo polaroid formi un angolo $\alpha = \pi/(2N)$ con la direzione $\hat{e}_1$, il secondo un angolo 2α e così via.

(c) Calcolare la probabilità che un fotone incidente sia trasmesso da tutti i polaroid nei casi: $N = 2$, $N = 90$ e $N \to \infty$

(d) Calcolare la probabilità del punto c) nel caso di un fotone con polarizzazione circolare.

(5) (a) Sia H un operatore hermitiano. Dimostrare che l'operatore $U = \exp(\mathrm{i}\, tH)$ (con t parametro reale) è unitario.

(b) Sia $U(t)$ un operatore unitario (con t parametro reale) tale che $U(0) = I$. Dimostrare che, al prim'ordine in t, U può essere scritto nella forma $U(t) = \exp(\mathrm{i}\, tH)$ con H operatore hermitiano.

(c)$^{(*)}$ Sia $U(t)$ un operatore unitario (con t parametro reale) tale che $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$. Dimostrare che: $U(0) = I$, $U(-t) = U^\dagger(t)$ e U può essere scritto nella forma $U(t) = \exp(\mathrm{i}\, tH)$ con H operatore hermitiano.
Suggerimento: differenziare $U(t_1 + t_2)$ rispetto a t_2 e utilizzare il risultato ottenuto in (b).

(6) (a) Viene fatta una misura dell'osservabile $\mathcal{O}$ su un sistema nello stato rappresentato dal ket $|\phi\rangle$. È vero che il sistema dopo la misura si trova nello stato $|\phi'\rangle = O|\phi\rangle$ dove O è l'operatore associato all'osservabile $\mathcal{O}$? Motivare la risposta.

(b) La domanda del punto (a) è vera nel caso in cui $|\phi\rangle$ sia un autostato di O? Motivare la risposta.

(c) Siano O_1 e O_2 operatori associati ad osservabili compatibili e $|\phi\rangle$ un ket generico. Lo stato ottenuto dopo una misura prima di O_1 e poi di O_2 è lo stesso di quello ottenuto dopo una misura prima di O_2 e poi di O_1? Motivare la risposta.

(7) Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché P sia un proiettore è che $P = P^\dagger = P^2$.

(8) Siano $|1\rangle$ e $|2\rangle$ i ket ortogonali corrispondenti agli stati di polarizzazione lineare di un fotone. Considerare le seguenti miscele statistiche di N fotoni ($N \gg 1$):

i) $N/2$ fotoni nello stato $|1\rangle$ e $N/2$ fotoni nello stato $|2\rangle$;

ii) $N/2$ fotoni nello stato $|\psi\rangle = \cos\theta|1\rangle + \sin\theta e^{i\phi}|2\rangle$ e $N/2$ fotoni nello stato $|\varphi\rangle = -\sin\theta|1\rangle + \cos\theta e^{i\phi}|2\rangle$;

iii) $N/4$ fotoni negli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|+\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ e $|-\rangle = (|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$.

(a) Calcolare, nei casi *i)*, *ii)* e *iii)* le probabilità di trovare i fotoni rispettivamente nello stato $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|\psi\rangle$.

(b) È possibile, attraverso opportune misure, distinguere le miscele statistiche *i)*, *ii)* e *iii)*?

(c) Determinare la matrice densità ρ, nella base degli stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$, per le miscele statistiche *i)*, *ii)* e *iii)* e verificare che $Tr(\rho^2) < 1$.

(d) Determinare la matrice densità ρ corrispondente allo stato (puro) $|\chi\rangle = (|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$, sempre nella base degli stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$, e verificare che $Tr(\rho^2) = 1$ e $\rho^2 = \rho$.

(9) Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione tale per cui, nei punti $x = x_i$, $f(x_i) = 0$ ma $f'(x_i) \neq 0$, allora

$$\delta\left[f(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}}.$$

(10) Sia $\hat{\mathcal{P}}$ l'operatore parità tale che

$$\hat{\mathcal{P}}|x\rangle = |-x\rangle.$$

(a) Discutere se l'operatore $\hat{\mathcal{P}}$ è unitario e/o hermitiano.

(b) Sia $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$, determinare $\langle x|\hat{\mathcal{P}}|\psi\rangle$.

(c) Determinare gli autovalori e le autofunzioni (nella base degli autostati della posizione) dell'operatore $\hat{\mathcal{P}}$.

(d) Si consideri l'operatore $|\hat{p}|$ la cui azione sugli autostati dell'impulso $|p\rangle$ è: $|\hat{p}||p\rangle = |p||p\rangle$. Determinare gli autostati comuni di $\hat{\mathcal{P}}$ e $|\hat{p}|$.

(11) Siano $\hat{A}$ e $\hat{B}$ due operatori.

(a) Mostrare perché, in generale, $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} \neq e^{\hat{A}+\hat{B}}$ e sotto quali condizioni vale invece il segno di uguaglianza.

Sia $\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$ tale che $[\hat{C}, \hat{A}] = 0$ e $[\hat{C}, \hat{B}] = 0$:

(b) mostrare che vale l'identità

$$e^{\hat{B}}\hat{A}e^{-\hat{B}} = \hat{A} + [\hat{B}, \hat{A}]\,.$$

Suggerimento: considerare $\hat{F}(t) = e^{\hat{B}t}\hat{A}e^{-\hat{B}t}$ *differenziare* $\hat{F}(t)$ *rispetto a* t *e risolvere l'equazione differenziale.*

(c) mostrare che vale l'identità (Baker-Campbell-Hausdorff):

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\,.$$

Suggerimento: considerare $\hat{G}(t) = e^{(\hat{A}+\hat{B})t}e^{-\hat{B}t}$ *differenziare* $\ln(\hat{G}(t))$ *rispetto a* t *e risolvere l'equazione differenziale utilizzando il risultato ottenuto in (b).*

(12) Si consideri un sistema invariante per dilatazioni, $q \to q' = \lambda q$:

(a) Determinare, mediante il teorema di Noether, la quantità che è classicamente conservata.

(b) Determinare l'operatore Δ che genera le dilatazioni sugli stati quantistici $|q\rangle$.

(c) L'operatore Δ è hermitiano?

(13) Si consideri la trasformazione realizzata dall'operatore unitario

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{i\alpha}{2\hbar}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})\right) .$$

(a) Determinare le trasformazioni degli operatori posizione $\hat{q}$ ed impulso $\hat{p}$ sotto l'azione aggiunta di tale operatore, ovvero $\hat{q}' = U\hat{q}U^\dagger$ e $\hat{p}' = U\hat{p}U^\dagger$

(b) Utilizzare il risultato per determinare l'azione della trasformazione su un ket generico ψ, sia nella base delle posizioni che degli impulsi, ovvero

$$\langle q|\psi'\rangle = \langle q|\hat{U}|\psi\rangle ,$$

$$\langle p|\psi'\rangle = \langle p|\hat{U}|\psi\rangle .$$

(14) Si consideri un sistama a due livelli, la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\hbar\omega\,(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|) .$$

Si definisca l'operatore hermitiano

$$\hat{A} = (|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|) .$$

Supponendo che il sistema al tempo $t = 0$ si trovi nell'autostato di $\hat{A}$ associato all'autovalore 1, determinare:

(a) la probabilità che al tempo t esso si trovi nell'autostato di $\hat{A}$ associato all'autovalore -1;

(b) il valor medio di $\hat{A}$ al tempo t;

(c) l'indeterminazione di $\hat{A}$ al tempo t.

(15) Data una soluzione dell'equazione di Schrödinger,

(a) determinare una soluzione con il verso del tempo scambiato, ossia con $t \to -t$;

(b) determinare la relazione fra i valori medi di posizione ed impulso nella soluzione originale ed in quella così costruita;

(c) discutere se la trasformazione che lega queste due soluzioni sia unitaria.

(16) Sia data la seguente funzione d'onda

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = N\exp\left[\frac{i}{\hbar}p_0 x - \frac{\lambda}{2\hbar}(x - x_0)^2\right] .$$

(a) Determinare la costante N imponendo che la funzione d'onda sia normalizzata.

(b) Calcolare il valor medio e l'indeterminazione degli operatori posizione e impulso sullo stato $|\psi\rangle$.

(c) Calcolare la funzione d'onda nello spazio degli impulsi $\tilde{\psi}(k)$.

(17) Si consideri una particella di massa m in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = -\alpha\,\delta(x)\,.$$

(a) Sia $\alpha > 0$, trovare gli stati legati del sistema e le corrispondenti energie e funzioni d'onda. Determinare il valore x_0 tale che la probabilità di trovare la particella nella regione $x < x_0$ è pari a 1/2.

(b) Considerare un fascio stazionario proveniente da $x = -\infty$. Determinare i coefficienti di riflessione e trasmissione. Determinare il valore dell'energia E del fascio per cui il flusso riflesso è uguale al flusso trasmesso.

(18) Si consideri una particella di massa m in una dimensione soggetta al potenziale lineare

$$V(x) = -F\,x\,.$$

(a) Risolvere le equazioni di Heisenberg per gli operatori posizione e impulso.

(b) Determinare le autofunzioni dell'hamiltoniana nella base degli impulsi.

(b) Ricavare le autofunzioni dell'hamiltoniana nella base delle coordinate esprimendo il risultato in termine della funzione di Airy definita da

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt\,.$$

(19) Sia

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}, \qquad \text{dove} \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\,,$$

il polinomio di Hermite di grado n. Dimostrare che la funzione d'onda

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}$$

è autofunzione dell'oscillatore armonico relativa all'autovalore E_n.
Suggerimento: scrivere l'equazione di Schroedinger per l'oscillatore armonico nella variabile ξ e dimostrare per induzione.