PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

FISICA MODERNA
anno accademico 2011-2012

Traccia delle soluzioni

Esercizio 1

La probabilità che il sistema *non* si trovi nello stato $|1\rangle$ è pari alla probabilità che si trovi nello stato $|2\rangle$ più la probabilità che si trovi nello stato $|3\rangle$:

$$P = |\langle 2|\psi\rangle|^2 + |\langle 3|\psi\rangle|^2 = \frac{2}{3} \,.$$

Esercizio 2

Nel caso in cui c'è il rivelatore la probabilità che al momento del passaggio dalla fenditura il sistema si trovi nello stato $|\xi\rangle$ (ovvero la probabilità che il rivelatore misuri/non misuri il passaggio dalla fenditura) è

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & P = |\langle A|\psi\rangle|^2 |\langle A|\phi\rangle|^2 = 1/9 \\ \text{b)} & P = |\langle \neg A|\psi\rangle|^2 |\langle \neg A|\phi\rangle|^2 = 0 \\ \text{c)} & P = |\langle B|\psi\rangle|^2 |\langle B|\phi\rangle|^2 = 1/9 \\ \text{d)} & P = |\langle \neg B|\psi\rangle|^2 |\langle \neg B|\phi\rangle|^2 = 0 \end{array}$$

dove si è usato che gli stati $|\neg A\rangle = (|B\rangle + |C\rangle)/\sqrt{2}$ e $|\neg B\rangle = (|A\rangle + |C\rangle)/\sqrt{2}$ sono ortogonali a $|\psi\rangle$.

Nel caso in cui non c'è il rivelatore, non ha senso chiedersi in che stato fosse il sistema al momento del passaggio della fenditura (ma solo quale sarebbe stata la probabilità del risultato della misura, la quale misura, in generale perturba lo stato). Se uno prova a rispondere alla domanda nel caso in cui non c'è il rivelatore ottiene risposte *paradossali*, per esempio abbiamo visto che lo stato al passaggio della fenditura non può essere in $|\neg A\rangle$, quindi dev'essere in $|A\rangle$ con probabilità $P = 1$, ma allo stesso tempo non può essere in $|\neg B\rangle$, quindi dev'essere in $|B\rangle$ con probabilità $P = 1\ldots$

Esercizio 3

Per formare una base, i vettori $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ e $|\chi\rangle$ devono essere linearmente indipendenti. Per determinare la condizione su a, b e c si può richiedere che sia diverso da zero il determinante della matrice dei coefficienti

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \ ,$$

da cui si ricava la condizione

$$a \neq b \ .$$

Esercizio 4

$$C^\dagger = (AB)^\dagger = [(AB)^T]^* = [B^T A^T]^* = B^\dagger A^\dagger \ .$$

Esercizio 5

Un generico operatore O può sempre essere scritto come $O = O_H + O_A$, dove:

$$O_H = \frac{1}{2}(O + O^\dagger) = O_H^\dagger \ ,$$

$$O_A = \frac{1}{2}(O - O^\dagger) = -O_A^\dagger \ .$$

Esercizio 6

a)

$$UU^\dagger = (1 + i\epsilon H)(1 - i\epsilon H^\dagger) = 1 + i\epsilon(H - H^\dagger) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ ,$$

da cui se H è hermitiano ($H = H^\dagger$) implica che U è unitario ($UU^\dagger = 1$) al prim'ordine in ϵ e viceversa.

b) Se H è hermitiano:

$$UU^\dagger = e^{iH} e^{-iH^\dagger} = e^{iH} e^{-iH} = 1 \ .$$

Esercizio 7

Sia $|\phi\rangle$ uno stato ortonormale a $|\psi\rangle$ ($\langle\phi|\phi\rangle = 1$, $\langle\psi|\phi\rangle = 0$). L'operatore

$$A = \lambda_1|\psi\rangle\langle\psi| + \lambda_2|\phi\rangle\langle\phi|$$

ha indeterminazione nulla sullo stato $|\psi\rangle$, infatti:

$$\Delta^2_\psi A = \langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle^2_\psi = \lambda_1^2 - \lambda_1^2 = 0 \ .$$

Esercizio 8

Essendo $|a\rangle = i|b\rangle$, l'operatore A risulta essere l'operatore nullo

$$A = |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = 0 \ ,$$

per cui la sua indeterminazione è nulla su tutti gli stati

$$\Delta^2_a A = \Delta^2_1 A = \Delta^2_+ A = 0 \ .$$

L'operatore B scritto nella base $|+\rangle$ e $|-\rangle$ è l'operatore identità:

$$B = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| = |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| \ ,$$

da cui si possono calcolare le indeterminazioni sugli stati $|a\rangle$, $|1\rangle$ e $|+\rangle$

$$\Delta^2_a B = \Delta^2_1 B = \Delta^2_+ B = 0 \ .$$

Il principio di indeterminazione è soddisfatto poiché $A = 0$ commuta con B.

Esercizio 9

$$\rho = \frac{1}{2}|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \frac{1}{2}|\phi_2\rangle\langle\phi_2| = \cdots = \frac{3}{4}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{4}|-\rangle\langle -| \ .$$

Esercizio 10

Chiamiamo x_i i punti in cui $f_{(x)}$ si annulla (gli *zeri* di $f(x)$) e per ogni x_i scegliamo un intorno $[a_i, b_i]$ che contenga un solo *zero* di $f(x)$. Applicando $\delta[f(x)]$ su una generica funzione di prova $g(x)$ avremo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta[f(x)]g(x)dx = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \delta[f(x)]g(x)dx \ .$$

Per un generico termine della sommatoria definiamo il cambio di variabili $y = f(x)$

$$\int_{a_i}^{b_i} \delta[f(x)]g(x)dx = \int_{f(a_i)}^{f(b_i)} \delta(y)g(x)\frac{dy}{f'(x)} = \int_{y_m}^{y_M} \delta(y)g(x)\frac{dy}{|f'(x)|} = \frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|}$$

dove nel penultimo passaggio si sono ordinati gli estremi ($y_M = f(b_i)$, $y_m = f(a_i)$ se $f'(x_i) > 0$ mentre $y_M = f(a_i)$, $y_m = f(b_i)$ se $f'(x_i) < 0$). Si ottiene pertanto che

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} .$$

Esercizio 11

Considerando due generici autostati della posizione $|x\rangle$ e $|x'\rangle$

$$\langle x|P|x'\rangle = \langle x| - x'\rangle = \delta(x + x') ,$$

$$\langle x|P^\dagger|x'\rangle = \langle -x|x'\rangle = \delta(-x - x') = \delta(x + x') = \langle x|P|x'\rangle ,$$

per cui P è hermitiano, $P = P^\dagger$.

$$P^2|x\rangle = P| - x\rangle = |x\rangle ,$$

da cui, utilizzando che P è hermitiano, si ricava che P è unitario: $1 = P^2 = PP = PP^\dagger$.

Se $|\psi\rangle$ è un autostato di P con autovalore λ (usando che $P^2 = 1$)

$$P^2|\psi\rangle = \lambda^2|\psi\rangle = |\psi\rangle ,$$

per cui gli autovalori sono $\lambda_\pm = \pm 1$ e le autofunzioni corrispondenti sono le funzioni pari e dispari

$$\langle x|P|\psi_\pm\rangle = \pm\langle x|\psi_\pm\rangle = \langle -x|\psi_\pm\rangle ,$$
$$\psi_\pm(x) = \pm\psi_\pm(-x) .$$

Esercizio 12

Data la dilatazione

$$q' = q + \delta q = \lambda q , \quad \delta q = (\lambda - 1)q ;$$

considerando piccole trasformazioni δq (ovvero $\lambda \simeq 1$), la quantità classicamente conservata è

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(\lambda - 1)q .$$

Sia $\Delta^\dagger$ l'operatore che genera le dilatazioni su un autostato della posizione $|q\rangle$

$$\Delta^\dagger|q\rangle = |q'\rangle = |\lambda q\rangle ,$$

$$\langle q|\Delta|\psi\rangle = \langle \lambda q|\psi\rangle = \psi(\lambda q) = \psi(q + (\lambda - 1)q) = \psi(q) + \frac{\partial \psi(q)}{\partial q}(\lambda - 1)q \ ,$$

per cui l'operatore che genera le dilatazioni sugli stati quantistici è l'operatore $\hat{p}\hat{q}$. Più precisamente poiché $\hat{p}\hat{q}$ non è un operatore hermitiano, l'operatore (hermitiano) che genera le dilatazioni è $(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p})/2$.

Esercizio 13

Utilizzando le regole di commutazione fra p e q ($[q, p] = i\hbar$)

$$\hat{q}' = U\hat{q}U^\dagger = \exp\left(\frac{i\alpha}{2\hbar}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})\right)\hat{q}U^\dagger = \hat{q}\exp\left(\frac{i\alpha}{2\hbar}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q} - 2i\hbar)\right)U^\dagger = \hat{q}e^\alpha UU^\dagger = e^\alpha \hat{q} \ ,$$

e analogamente

$$\hat{p}' = U\hat{p}U^\dagger = e^{-\alpha}\hat{p} \ .$$

Per calcolare come agisce l'operatore U su uno stato $|\psi\rangle$ calcoliamo prima come agisce $U^\dagger$ su un autostato della posizione $|q\rangle$

$$\hat{q}U^\dagger|q\rangle = U^\dagger\hat{q}'|q\rangle = U^\dagger e^\alpha \hat{q}|q\rangle = e^\alpha q U^\dagger|q\rangle \ ,$$

per cui lo stato $U^\dagger|q\rangle$, essendo autostato dell'operatore posizione con autovalore $e^\alpha q$, sarà proporzionale allo stato $|e^\alpha q\rangle$

$$U^\dagger|q\rangle = c|e^\alpha q\rangle \ .$$

La costante c può essere determinata con la condizione di normalizzazione

$$\delta(q' - q'') = \langle q'|q''\rangle = \langle q'|UU^\dagger|q''\rangle = |c|^2\langle e^\alpha q'|e^\alpha q''\rangle = |c|^2\delta(e^\alpha(q' - q'') = |c|^2 e^{-\alpha}\delta(q' - q'') \ ,$$

da cui a meno di una fase arbitraria scelta pari a uno, $c = e^{\alpha/2}$:

$$U^\dagger|q\rangle = e^{\alpha/2}|e^\alpha q\rangle \ ;$$

e analogamente si può mostrare che

$$U^\dagger|p\rangle = e^{-\alpha/2}|e^{-\alpha}p\rangle \ .$$

L'azione di U sugli stati fisici nella base delle posizioni e degli impulsi è dunque

$$\psi'(q) = \langle q|\psi'\rangle = \langle q|U|\psi\rangle = e^{\alpha/2}\langle e^\alpha q|\psi\rangle = e^{\alpha/2}\psi(e^\alpha q) \ ;$$

$$\widetilde{\psi}'(k) = \langle k|\psi'\rangle = \langle k|U|\psi\rangle = e^{-\alpha/2}\langle e^{-\alpha}k|\psi\rangle = e^{-\alpha/2}\widetilde{\psi}(e^{-\alpha}k) \ .$$

Esercizio 14

Innanzitutto vediamo come agisce su un autostato dell'impulso l'operatore parità definito dall'azione su un autostato della posizione $\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle$:

$$\mathcal{P}|k\rangle = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle\langle x|k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx|-x\rangle\langle x|k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx|-x\rangle\langle -x|-k\rangle = |-k\rangle \ .$$

Considerando un generico autostato dell'impulso $|k'\rangle$ abbiamo che

$$\mathcal{P}|\hat{p}|\,|k'\rangle = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\hbar|k|\,|k\rangle\langle k|k'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\hbar|k|\,\delta(k-k')|-k\rangle = \hbar|k'|\,|-k'\rangle \ ,$$

mentre

$$|\hat{p}|\mathcal{P}\,|k'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\hbar|k|\,|k\rangle\langle k|-k'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\hbar|k|\,\delta(k+k')|k\rangle = \hbar|k'|\,|-k'\rangle \ ,$$

per cui gli operatori $\mathcal{P}$ e $|\hat{p}|$ commutano ($[\mathcal{P}, |\hat{p}|] = 0$).

Gli autostati dell'operatore $|\hat{p}|$ sono gli autostati dell'impulso

$$|\hat{p}||\pm k\rangle = \hbar|k||\pm k\rangle$$

mentre gli autostati dell'operatore $\mathcal{P}$ sono gli stati pari e dispari (cfr. Esercizio 11)

$$\mathcal{P}|\psi_\pm\rangle = \pm|\psi_\pm\rangle \ .$$

Gli autostati comuni saranno quindi

$$|k_\pm\rangle = |k\rangle \pm |-k\rangle \ .$$

Nello spazio delle posizioni otteniamo le autofunzioni

$$\langle x|k_\pm\rangle = \psi_k(x) \pm \psi_{-k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(e^{ikx} \pm e^{-ikx}\Big) = \begin{array}{ll} + & \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos kx \\ - & \frac{\sqrt{2}}{\pi} i \sin kx \end{array} \ .$$

Esercizio 15

Gli autostati degli operatori A e B sono costanti del moto se e solo se A e B commutano con l'hamiltoniana ($[A, H] = [B, H] = 0$). Se $[A, H] = [B, H] = 0$ anche

$$[C, H] = [[A, B], H] = [AB, H] - [BA, H] = A[B, H] + [A, H]B - B[A, H] - [B, H]A = 0 \ ,$$

da cui anche gli autostati di $C = [A, B]$ sono costanti del moto.

Esercizio 16

Nella base degli stati

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

abbiamo che

$$H = -\frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Gli autovalori e gli autostati di A risultano essere

$$\lambda_\pm = \pm 1 \ , \quad |a_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|+\rangle \pm |-\rangle \Big) \ .$$

Dato lo stato al tempo iniziale $|\psi(0)\rangle = |a_+\rangle$

a) Lo stato al tempo t sarà

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(e^{\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle + e^{-\frac{i\omega t}{2}} |-\rangle \Big)$$

e la probabilità che al tempo t si trovi nello stato $|a_-\rangle$ (ovvero che una misura dell'osservabile A al tempo t dia come risultato l'autovalore λ_- corrispondente all'autostato $|a_-\rangle$) è data da

$$P = |\langle a_- | \psi(t)\rangle|^2 = \sin^2 \frac{\omega t}{2} \ .$$

b) Il valor medio di A al tempo t è

$$\langle A \rangle_t = \langle \psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \cos \omega t \ .$$

c) L'indeterminazione di A al tempo t è

$$\Delta_t^2 A = \langle \psi(t)|A^2|\psi(t)\rangle - \langle \psi(t)|A|\psi(t)\rangle^2 = \langle \psi(t)| \, \mathbb{I} \, |\psi(t)\rangle - \cos^2 \omega t = \sin^2 \omega t \ .$$

Esercizio 17

Nella base degli stati

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

abbiamo che

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Gli autovalori e gli autostati di H risultano essere

$$\lambda_+ = 2E_0 \ , \quad \lambda_- = -E_0 \ , \quad |a_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad |a_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \ .$$

Dato lo stato al tempo iniziale $|\psi(0)\rangle = |-\rangle = \Big(\sqrt{2}|a_+\rangle + |a_-\rangle\Big)/\sqrt{3}$, lo stato al tempo t sarà

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\sqrt{2}e^{\frac{2iE_0t}{\hbar}}|a_+\rangle + e^{-\frac{iE_0t}{\hbar}}|a_-\rangle\Big)$$

e la probabilità che al tempo t si trovi nello stato $|-\rangle$ è data da

$$P_- = |\langle -|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{4}{9}\Big(1 - \cos\frac{3E_0t}{\hbar}\Big) \ .$$

La probabilità che al tempo t si trovi nello stato $|+\rangle$ è invece

$$P_+ = |\langle +|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{9}\Big(5 + 4\cos\frac{3E_0t}{\hbar}\Big) = 1 - P_- \ .$$

Il periodo di oscillazione fra i due stati è quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\hbar}{3E_0} = \frac{h}{3E_0} \ .$$

Notare che mentre la probabilità massima di trovare lo stato in $|+\rangle$ è 1 (quando $T = 2n\pi\hbar/(3E_0)$) la probabilità massima di trovare lo stato in $|-\rangle$ è 8/9 (quando $T = (2n+1)\pi\hbar/(3E_0)$).

Esercizio 18

La dipendenza dal tempo degli operatori $x(t)$ e $p(t)$ è data da

$$\frac{d}{dt}p(t) = \frac{1}{i\hbar}[p, H] = -k \ , \quad \frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{i\hbar}[x, H] = \frac{p}{m} \ ,$$

dove si è usato che $[x, p] = i\hbar$ e $[x, p^2] = 2i\hbar p$. Si ottiene quindi che

$$p(t) = p(0) - kt \ , \quad x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t - \frac{k}{2m}t^2 \ .$$

Dal principio di indeterminazione si ottiene

$$\Delta^2 x(t)\Delta^2 x(0) \geq \frac{1}{4}\langle |[x(t), x(0)]|^2\rangle = \frac{1}{4}\langle |[x(0) + \frac{p(0)}{m}t - \frac{k}{2m}t^2, x(0)]|^2\rangle = \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}$$

per cui, nota l'indeterminazione al tempo $t = 0$, l'indeterminazione minima al tempo t è

$$\Delta x(t) \geq \frac{\hbar t}{2m\Delta x(0)} \ .$$

Esercizio 19

Dall'equazione di Schrödinger si ottiene

$$\langle p|\hat{H}|\psi_E\rangle = \Big(\frac{p^2}{2m} + i\hbar k\frac{\partial}{\partial p}\Big)\psi_E(p) = E\psi_E(p) \ ,$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial p}\psi_E(p) = \frac{1}{i\hbar k}\Big(E - \frac{p^2}{2m}\Big)\psi_E(p) \ ,$$

che ha come soluzione

$$\psi_E(p) = N\exp\Big[\frac{i}{\hbar k}\Big(\frac{p^3}{6m} - Ep\Big)\Big] \ ,$$

con N un'opportuna costante di normalizzazione.

L'evoluzione al tempo t della funzione d'onda $\psi(p,0)$ è quindi

$$\begin{aligned}
\psi(p,t) \quad &= \quad \langle p|\psi(t)\rangle = \int dE\,\langle p|\psi_E\rangle\langle\psi_E|\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\Big)|\psi(0)\rangle \\
&= \quad \int dE\,N\exp\Big[\frac{i}{\hbar k}\Big(\frac{p^3}{6m} - Ep - Ekt\Big)\Big]\langle\psi_E|\psi(0)\rangle \\
&\overset{(p'=p+kt)}{=} \quad \exp\Big[i\,\frac{(p'-kt)^3 - p'^3}{6\hbar mk}\Big]\int dE\,N\exp\Big[\frac{i}{\hbar k}\Big(\frac{p'^3}{6m} - Ep'\Big)\Big]\langle\psi_E|\psi(0)\rangle \\
&= \quad \exp\Big[i\,\frac{(p'-kt)^3 - p'^3}{6\hbar mk}\Big]\int dE\,\langle p'|\psi_E\rangle\langle\psi_E|\psi(0)\rangle = \exp\Big[i\,\frac{p^3 - (p+kt)^3}{6\hbar mk}\Big]\psi(p+kt,0)
\end{aligned}$$

Esercizio 20

Al tempo $t=0$ la particella si trova in autostato della posizione $x = x_0$,

$$\psi(x,0) = \langle x|x_0\rangle = \delta(x - x_0) \ ,$$

la funzione d'onda al tempo t è data da

$$\begin{aligned}
K(x,x_0;t) \equiv \psi(x,t) &= \langle x|\exp\Big(-\frac{i\hat{p}^2t}{2m\hbar}\Big)|x_0\rangle = \int dp\int dx'\langle x|p\rangle\langle p|\exp\Big(-\frac{i\hat{p}^2t}{2m\hbar}\Big)|x'\rangle\langle x'|\psi,0\rangle \\
&= \int dp\int dx'\exp\Big(-\frac{ip^2t}{2m\hbar}\Big)\frac{1}{2\pi}\exp\Big(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\Big)\delta(x'-x_0) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int dp\exp\Big[\frac{-i}{\hbar}\Big(\frac{p^2t}{2m\hbar} + p(x-x_0)\Big)\Big] = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\exp\Big[-\frac{m(x-x_0)^2}{2i\hbar t}\Big]
\end{aligned}$$

dove l'integrale gaussiano è stato calcolato completando il quadrato. Notare che nel limite in cui $it = \epsilon \to 0$ si riottiene la distribuzione $\delta(x - x_0)$ come limite della gaussiana.

Se il sistema al tempo $t = 0$ ha funziona d'onda $\psi_0(x)$, la funzione d'onda al tempo t sarà data da

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi,t\rangle = \int dx' \langle x| \exp\Big(-\frac{i\hat{p}^2 t}{2m\hbar}\Big)|x'\rangle\langle x'|\psi,0\rangle = \int dx' K(x,x';t)\psi_0(x') \ .$$

Nel caso in cui il sistema al tempo $t = 0$ si trova in un autostato dell'impulso, la funzione d'onda al tempo t sarà data da

$$\psi(x,t) = \int dx' K(x,x';t)\psi_k(x') = \int dx' \langle x| \exp\Big(-\frac{i\hat{p}^2 t}{2m\hbar}\Big)|x'\rangle\langle x'|k\rangle = \exp\Big(-\frac{i\hbar k^2 t}{2m}\Big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikx) \ ,$$

allo stesso risultato si può arrivare sostituendo l'espressione esplicita di $K(x,x';t)$ e $\psi_k(x')$ ed effettuando l'integrale gaussiano risultante.

Esercizio 21

$$\psi(x,t) = \int dk\, e^{i(kx-\omega(k)t)}\bar{\psi}(k) = \int dk\, e^{ikx}\bar{\psi}(k,t) \ ,$$

e

$$\bar{\psi}(k,t) = e^{-i\omega(k)t}\bar{\psi}(k) = \langle k|\psi,t\rangle$$

$$\begin{aligned} v_g \equiv \frac{d}{dt}\langle x\rangle &= \frac{d}{dt}\int dk\, \langle\psi,t|k\rangle\langle k|i\frac{d}{dk}|\psi,t\rangle = \frac{d}{dt}\int dk\, e^{i\omega(k)t}\bar{\psi}^*(k) i\frac{d}{dk}\left(e^{-i\omega(k)t}\bar{\psi}(k)\right) \\ &= \frac{d}{dt} i \int dk\, \bar{\psi}^*(k)\left(-i\frac{d\omega}{dk}\, t\,\bar{\psi}(k) + \frac{d\bar{\psi}(k)}{dk}\right) = \int dk\, \bar{\psi}^*(k)\frac{d\omega}{dk}\bar{\psi}(k) = \left\langle \frac{d\omega}{dk}\right\rangle \ . \end{aligned}$$

Esercizio 22

L'indeterminazione della posizione al tempo t può essere calcolata partendo da

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \frac{t}{m}\hat{p}(0) \ .$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(t) &= \langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2 = \Delta^2 x(0) + \frac{t^2}{m^2}\Delta^2 p(0) + \frac{t}{m}\Big(2\langle x(0)p(0)\rangle - 2\langle x(0)\rangle\langle p(0)\rangle - i\hbar\Big) \\ &= \Delta^2 x(0) - \frac{\gamma}{\beta}\frac{\hbar}{m}t + \frac{1}{\beta}\Big(\frac{\hbar}{m}t\Big)^2 = \frac{\beta^2+\gamma^2}{4\beta} - \frac{\gamma}{\beta}\frac{\hbar}{m}t + \frac{1}{\beta}\Big(\frac{\hbar}{m}t\Big)^2 \ . \end{aligned}$$

Dove si sono calcolate le quantità:

$$\langle x(0)\rangle = \langle\psi|\hat{x}(0)|\psi\rangle = 0\ , \quad \langle x^2(0)\rangle = \frac{\beta^2+\gamma^2}{4\beta}\ , \quad \langle p(0)\rangle = 0\ ,$$

$$\langle p^2(0)\rangle = 2\hbar^2\frac{\beta+i\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\Big(1-\frac{\beta+i\gamma}{2\beta}\Big)\ , \quad \langle x(0)p(0)\rangle = i\hbar\frac{\beta+i\gamma}{2\beta}\ .$$

Un metodo alternativo è scrivere la funzione d'onda al tempo $t=0$ nella forma

$$\psi(x,0) = N\exp\Big[-\frac{x^2}{2\sigma^2}(1+i\frac{\gamma}{\beta})\Big]\ , \quad \text{dove} \quad \sigma^2 = \frac{\beta^2+\gamma^2}{2\beta}\ ,$$

da cui si ricava l'indeterminazione di posizione di una funzione d'onda gaussiana

$$\Delta^2 x(0) = \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{4\beta}\ .$$

La funzione d'onda al tempo t è data da

$$\psi(x,0) = \int dk\,\langle x|\exp\Big(-\frac{i\hat{p}^2 t}{2m\hbar}\Big)|k\rangle\langle k|\psi,0\rangle = \int dk\,\exp\Big(-\frac{i\hbar k^2 t}{2m}\Big)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\bar{\psi}(k,0)$$
$$= \cdots = N'\exp\Big[-\frac{x^2}{2\tilde{\sigma}^2}(1+i\frac{\tilde{\gamma}}{\beta})\Big]\ , \quad \text{dove} \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{\beta^2+\tilde{\gamma}^2}{2\beta}\ , \quad \tilde{\gamma} = \gamma - 2\hbar t/m\ ,$$

da cui si riottiene l'indeterminazione della posizione al tempo t:

$$\Delta^2 x(t) = \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{4\beta} - \frac{\gamma}{\beta}\frac{\hbar}{m}t + \frac{1}{\beta}\Big(\frac{\hbar}{m}t\Big)^2\ .$$

Notare che mentre $\beta > 0$, il termine γ se negativo, porta ad un iniziale diminuzione dell'indeterminazione al crescere di t. Se $\gamma < 0$ l'indeterminazione minima si ha per $\bar{t} = \gamma m/(2\hbar)$.

Esercizio 23

Si considera la buca di potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < a \\ +\infty & \text{se } x < 0 \ \cup \ x > a\ , \end{cases}$$

le autofunzioni e gli autovalori dell'hamiltoniana sono

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{se } x < 0 \ \cup \ x > a \end{cases}\ , \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ , \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

L'indeterminazione della posizione e dell'impulso nell'n-esimo stato sono

$$\Delta_n^2 x = \frac{a^2}{12}\Big(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\Big) , \quad \Delta_n^2 p = \Big(\frac{\hbar n\pi}{a}\Big)^2 ,$$

dove sono stati calcolati (gli integrali che si incontrano si possono risolvere per parti)

$$\langle x\rangle_n = \langle\psi_n|x|\psi_n\rangle = \frac{a}{2} , \quad \langle p\rangle_n = 0 , \quad \langle x^2\rangle_n = \frac{a^2}{3}\Big(1 - \frac{3}{2n^2\pi^2}\Big) , \quad \langle p^2\rangle_n = \langle 2m(H-V)\rangle_n = 2mE_n .$$

Si ottiene quindi

$$\Delta_n^2 x \Delta_n^2 p = \frac{\hbar^2}{2}\Big(\frac{n^2\pi^2}{6} - 1\Big) \overset{n=1}{\geq} \frac{\hbar^2}{2}\Big(\frac{\pi^2}{6} - 1\Big) > \frac{\hbar^2}{4} ,$$

dove l'ultima disuguaglianza è il limite imposto dal principio di indeterminazione.

Esercizio 24

Dall'equazione di Schrödinger si ottiene

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_I''(x) = E\psi_I(x) & \text{se } x < 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{II}''(x) = (E-V)\psi_{II}(x) & \text{se } x > 0 , \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{ik_I x} + Be^{-ik_I x} & k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ \psi_{II}(x) = Ce^{ik_{II} x} + De^{-ik_{II} x} & k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar} > 0 . \end{cases}$$

Imponendo la condizione di continuità della funzione d'onda in $x = 0$ si ottiene:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad \Rightarrow \quad A + B = C + D ,$$

la derivata prima è invece discontinua in $x = 0$ a causa della presenza del potenziale a delta, si può ottenere la condizione sulla discontinuità della derivata prima integrando l'equazione di Schrödinger in un intorno di $x = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}dx = E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi(x)dx - V\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Theta(x)\psi(x)dx + \frac{\hbar^2 g}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)\psi(x)dx = \frac{\hbar^2 g}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)\psi(x)dx$$

da cui

$$\psi_{II}'(\epsilon) - \psi_I'(-\epsilon) = g\psi(0) \quad \Rightarrow \quad ik_{II}(C-D) - ik_I(A-B) = -g(C+D) .$$

Nel caso in cui l'onda incidente proviene da sinistra, $D = 0$. Il sistema di equazioni che lega i coefficienti A, B e C è quindi

$$\begin{gathered} A + B = C \\ ik_{II}C - ik_I(A-B) = -gC . \end{gathered}$$

Da cui si possono calcolare i coefficienti di trasmissione e riflessione

$$T = \frac{k_{II}}{k_I}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k_I k_{II}}{g^2 + (k_I + k_{II})^2} \ , \quad R = 1 - T = \frac{g^2 + (k_I - k_{II})^2}{g^2 + (k_I + k_{II})^2} \ .$$

Dai casi particolari $g = 0$ e $k_I = k_{II}$, si possono trovare i valori dei coefficienti di trasmissione e riflessione rispettivamente al potenziale a barriera singolo e al potenziale a delta singolo.

Esercizio 25

Cerchiamo gli stati legati, per cui $E < V_0 < V_1$. Dall'equazione di Schrödinger otteniamo

$$\begin{cases} \psi''_I(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi_I(x) & \text{se } x < -a \\ \psi''_{II}(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_{II}(x) & \text{se } |x| < a \\ \psi''_{III}(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E)\psi_{III}(x) & \text{se } x > a \ , \end{cases}$$

con soluzioni

$$\begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{k_0 x} & k_0 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} > 0 \\ \psi_{II}(x) = Be^{ikx} + Ce^{-ikx} = D\sin(kx + \delta) & k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0 \\ \psi_{III}(x) = Ee^{-k_1 x} & k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_1-E)}}{\hbar} > 0 \ . \end{cases}$$

Imponendo la continuità della derivata logaritmica $d\log\psi/dx = \psi'/\psi$ in $x = -a$ e $x = a$ si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\psi'(-a)}{\psi(-a)} = k_0 = k\cot(\delta - ka) > 0 \\ \frac{\psi'(a)}{\psi(a)} = -k_1 = k\cot(\delta + ka) < 0 \end{cases}$$

quadrando le due equazioni

$$\begin{cases} \sin^2(\delta - ka) = \frac{k^2}{k_0^2+k^2} = \frac{E}{V_0} \\ \sin^2(\delta + ka) = \frac{k^2}{k_1^2+k^2} = \frac{E}{V_1} \end{cases}$$

da cui eliminando δ si ricava

$$2ka = \frac{2a}{\hbar}\sqrt{2mE} = -\arcsin\sqrt{\frac{E}{V_0}} - \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_1}} + n\pi \ ,$$

dove la condizione di periodicità fissa il numero n degli stati legati. Perché esista almeno uno stato legato ($n = 1$) l'equazione dovrà essere soddisfatta per un dato valore di $E = E_1$ (fissati a, V_0 e V_1). Data la monotonicità dell'equazione, esiste almeno uno stato legato se, per il valore massimo di E ($E = V_0$)

$$\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2mV_0} > -\arcsin\sqrt{1} - \arcsin\sqrt{\frac{V_0}{V_1}} + \pi = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{V_0}{V_1}} \ ,$$

la quale non è soddisfatta in generale (fissati V_0 e V_1 è sempre possibile trovare un valore di a per cui la diseguaglianza non è soddisfatta).

Nel limite in cui un estremo della buca tende a infinito $V_1 \to +\infty$ la condizione per l'esistenza di uno stato legato diventa

$$V_0 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{32 a^2 m} \ ,$$

mentre nel caso di buca simmetrica ($V_0 = V_1$) la condizione è sempre soddisfatta (esiste sempre almeno uno stato legato)

$$\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2mV_0} > 0 \ .$$

Esercizio 26

Consideriamo $x = 0$ e $x = l = 2a$ gli estremi della barriera, la soluzione dell'equazione di Schrödinger è

$$\begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & k = \frac{\sqrt{2m(E)}}{\hbar} & \text{se } x < 0 \\ \psi_{II}(x) = De^{ik'x} + Ee^{-ik'x} & k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} > 0 & \text{se } 0 < x < l \\ \psi_{III}(x) = Ce^{ikx} & & \text{se } x > l \ , \end{cases}$$

dove si è imposto che l'onda incidente proviene da $x < 0$. Imponendo la continuità della funzione d'onda e della sua derivata in $x = 0$ e $x = l$ si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} A + B = D + E \\ A - B = \frac{k'}{k}(D - E) \\ Ce^{ikl} = De^{ik'l} + Ee^{ik'l} \\ \frac{k}{k'}Ce^{ikl} = De^{ik'l} - Ee^{ik'l} \end{cases}$$

da cui si può ricavare il coefficiente di trasmissione T:

$$T = \frac{|A|^2}{|C|^2} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2 \sin^2 k'l}{4E(E-V_0)}} \ ,$$

si ha trasmissione completa ($T = 1$) per $k' = n\pi/l$.

Esercizio 27

Per prima cosa si può notare che l'operatore parità P commuta con l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} , \qquad [\hat{P}, \hat{H}] = 0 ,$$

per cui gli autostati dell'oscillatore armonico sono autostati dell'operatore parità che con autovalore $+1$ (stati pari) o -1 (stati dispari). Lo stato fondamentale $|0\rangle$ dell'oscillatore armonico è lo stato in cui

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

dove a è l'operatore di distruzione

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) ,$$

da cui

$$\langle x|\hat{a}|0\rangle = \left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_0(x)$$

la cui soluzione è una gaussiana, quindi una funzione pari. Lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico è pertanto uno stato pari

$$\hat{P}|0\rangle = |0\rangle .$$

Lo stato n-esimo dell'oscillatore armonico è dato da

$$\hat{P}|n\rangle = \hat{P}\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = (-1)^n\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\hat{P}|0\rangle = (-1)^n\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = (-1)^n|n\rangle ,$$

dove è stato utilizzato che l'operatore parità anticommuta con $\hat{a}^\dagger$ (poiché $\hat{P}$ anticommuta con $\hat{x}$ e $\hat{p}$)

$$\hat{P}\hat{a}^\dagger = -\hat{a}^\dagger\hat{P} , \qquad \hat{P}(\hat{a}^\dagger)^n = (-1)^n(\hat{a}^\dagger)^n\hat{P} .$$

Quindi la parità dell'autostato n-esimo dell'oscillatore armonico è:

$$\hat{P}|n\rangle = (-1)^n|n\rangle .$$

L'operatore $\exp(i\pi\hat{N})$ agisce su un generico stato come

$$e^{i\pi\hat{N}}|\psi\rangle = \sum_n e^{i\pi\hat{N}}|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_n e^{i\pi n}|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_n(-1)^n|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_n \hat{P}|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \hat{P}|\psi\rangle ,$$

e fornisce quindi una rappresentazione esplicita dell'operatore parità.

Esercizio 28

Tramite una traslazione l'hamiltoniana H può essere riscritta nella forma di un potenziale armonico più un termine costante:

$$H = H_0 - Ex = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2\tilde{x}^2}{2} - \frac{E^2}{2m\omega^2} \ ,$$

dove $\tilde{x} = x - \frac{E}{m\omega^2}$.

Lo spettro degli autovalori dell'hamiltoniana H è quindi

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \frac{E^2}{2m\omega^2} \ .$$

L'equazione del moto è data da

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = -\omega^2\tilde{x} \ ,$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ p(t) = m\frac{d\tilde{x}}{dt} = m\omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t) \end{cases} ,$$

le cui condizioni iniziali sono $\tilde{x}(0) = x(0) - \frac{E}{m\omega^2} = A$, $p(0) = B$. I valori medi al tempo t saranno quindi

$$\begin{cases} \langle\tilde{x}(t)\rangle_n = \langle x(0) - \frac{E}{m\omega^2}\rangle_n \cos\omega t + \langle p(0)\rangle_n \sin\omega t = -\frac{E}{m\omega^2}\cos\omega t \\ \langle p(t)\rangle_n = m\omega(-\langle x(0) - \frac{E}{m\omega^2}\rangle_n \sin\omega t + \langle p(0)\rangle_n \cos\omega t) = \frac{E}{\omega}\sin\omega t \end{cases} ,$$

usando la coordinata iniziale x

$$\begin{cases} \langle x(t)\rangle_n = \langle\tilde{x}(t) + \frac{E}{m\omega^2}\rangle_n = \frac{E}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) \\ \langle p(t)\rangle_n = \frac{E}{\omega}\sin\omega t \end{cases} .$$